数理解析研究所講究録
1187 巻 2001 年 105-109

凸集合における不等式の一つの思想

山形大学・工学部　高橋眞映 (Sin-Ei Takahasi)
Department of Basic Technology, Applied Mathematics and Physics,
Yamagata Univ.
岡山県立大学・情報工学部　高橋泰嗣 (Yasuji Takahashi)
Department of System Engineering, Okayama Prefectural University

ある線形空間上の凸集合の各点に一つの不等式が対応しているとき、最良不等式に対応している点は何か幾何学的性質を持つであろう。あるいはそれを持って不等式達の最良とみる。何か自然な思想のように思われる。我々の目的は、これを一つ実現してみようというものである。

このことを為すため、いま任意の集合 X 上の非負値関数 $\varphi, \varphi_0, \varphi_1$ を考え、

$$m=\inf_{x\notin Z(\varphi_0)}\frac{\varphi(x)}{\varphi_0(x)} \text{ and } M=\sup_{x\notin Z(\varphi_1)}\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)},$$

where $Z(\varphi_i)=\{x\in X:\varphi_i(x)=0\}$ $(i=0,1)$ と置き、 $0<m, M<\infty$ を仮定する。従って

$$m\varphi_0(x)\leq\varphi(x)\leq M\varphi_1(x)\quad(\forall x\in X)$$

が成り立つ。ここで各 $x\in X$ に対して

$$D_\varphi(x)=\{(\alpha,\beta)\in \boldsymbol{R}^2:\varphi(x)\leq\alpha\varphi_1(x)+\beta\varphi_0(x)\}$$

と置き、そのようなものの全ての共通部分

$$D_\varphi=\bigcap_{x\in X}D_\varphi(x)$$

を考える。このとき、D_φ は平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上の空でない凸領域を作り、D_φ の各点 (α,β) に X 上の一つの不等式

$$\varphi\leq\alpha\varphi_1+\beta\varphi_0$$

が対応している。そこで凸領域 D_φ を調べるため次のような定数を定義する。

$$\alpha_\varphi=\sup_{M\varphi_1(x)\neq m\varphi_0(x)}\frac{M\varphi(x)-mM\varphi_0(x)}{M\varphi_1(x)-m\varphi_0(x)} \text{ and } \rho=\sup_{x\notin Z(\varphi_0)}\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)}.$$

このとき勿論 $0\leq\alpha_\varphi\leq M$ and $0<\rho\leq\infty$ となっている。そして我々は次の一般的結果を得る。

定理. (i) $\{(\alpha,\beta)\in\boldsymbol{R}^2:1\leq\frac{\alpha}{M}+\frac{\beta}{m},\ \alpha_\varphi\leq\alpha\}\subseteq D_\varphi$.

(ii) If $\alpha_\varphi<M$, then $D_\varphi\subseteq\{(\alpha,\beta)\in\boldsymbol{R}^2:1\leq\frac{\alpha}{M}+\frac{\beta}{m}\}$.

(iii) If $\alpha_\varphi = M$, then

$$D_\varphi \cap \{(\alpha,\beta)\in \boldsymbol{R}^2 : \beta \geq 0\} \subseteq \{(\alpha,\beta)\in \boldsymbol{R}^2 : \beta \geq 0 \text{ and } 1 \leq \frac{\alpha}{M} + \frac{\beta}{m}\}.$$

and

$$D_\varphi \cap \{(\alpha,\beta)\in \boldsymbol{R}^2 : \beta \leq 0\} \subseteq \{(\alpha,\beta)\in \boldsymbol{R}^2 : \beta \leq 0 \text{ and } 1 \leq \frac{\alpha}{M} + \frac{\beta}{M\rho}\}.$$

証明. (i) もし $\frac{\alpha_\varphi}{M} \leq t$ であれば、 $\varphi(x) - m\varphi_0(x) \leq t\left(M\varphi_1(x) - m\varphi_0(x)\right)$ が成り立つ。従って、全ての $x \in X$ に対して、 $\varphi(x) \leq tM\varphi_1(x) + m(1-t)\varphi_0(x)$ である。それ故、

$$\begin{aligned} D_\varphi &\supseteq \{(\alpha,\beta)\in \boldsymbol{R}^2 : \exists\, t \in \boldsymbol{R} \text{ s. t. } \alpha \geq tM\,,\ \beta \geq m(1-t)\,,\ \frac{\alpha_\varphi}{M} \leq t\} \\ &= \{(\alpha,\beta)\in \boldsymbol{R}^2 : \frac{\alpha}{M} + \frac{\beta}{m} \geq 1\,,\ \alpha_\varphi \leq \alpha\} \end{aligned}$$

である。

(ii) $\alpha_\varphi < M$ と仮定する。従って M の仮定から次式を満たす $X \setminus Z(\varphi_1)$ の中の列 $\{x_n\}$ が存在する：

(1) $$M = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(x_n)}{\varphi_1(x_n)}.$$

勿論、各 $n = 1, 2, \cdots$ に対して、$\varphi(x_n) \neq 0$ と仮定出来る。ところで、もし $\varphi_0(x_{n_1}) = \varphi_0(x_{n_2}) = \cdots = 0$ となるような $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_n\}$ が存在したとすると、仮定によって $\alpha_\varphi < \frac{\varphi(x_{n_{j_0}})}{\varphi_1(x_{n_{j_0}})} \leq M$ を満たす番号 j_0 が存在しなければならない。このとき、次式が成り立つ：

(2) $$D_\varphi \subseteq D_\varphi(x_{n_{j_0}}) = \{(\alpha,\beta)\in \boldsymbol{R}^2 : \frac{\varphi(x_{n_{j_0}})}{\varphi_1(x_{n_{j_0}})} \leq \alpha\}.$$

そこで

$$a = \frac{1}{2}\left(\alpha_\varphi + \frac{\varphi(x_{n_{j_0}})}{\varphi_1(x_{n_{j_0}})}\right) \text{ and } b = m(1 - \frac{a}{M}).$$

と置く。従って $1 = \frac{a}{M} + \frac{b}{m}$ かつ $\alpha_\varphi \leq a$ である。また

$$\{(\alpha,\beta)\in \boldsymbol{R}^2 : 1 \leq \frac{\alpha}{M} + \frac{\beta}{m}\,,\ \alpha_\varphi \leq \alpha\} \subseteq D_\varphi$$

であるから、 $(a, b) \in D_\varphi$ が成り立つ。しかしながら、

$$(a, b) \notin \{(\alpha,\beta)\in \boldsymbol{R}^2 : \frac{\varphi(x_{n_{j_0}})}{\varphi_1(x_{n_{j_0}})} \leq \alpha\}$$

であるから、これは (2) に反する。それ故各 $n = 1, 2, \cdots$ に対して、$\varphi_0(x_n) \neq 0$ と仮定出来る。このとき次式が成り立つ：

(3) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(x_n)}{\varphi_0(x_n)} = m\,.$$

実際そうでないと仮定してみると、次式を満たす正数 $\delta > 0$ と $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n'}\}$ を見つけることができる：

$$m + \delta \leq \frac{\varphi(x_{n'})}{\varphi_0(x_{n'})} \quad (n' = 1', 2', \cdots). \tag{4}$$

ところで $\dfrac{M(m+\delta)\alpha_\varphi}{M\delta + m\alpha_\varphi} < M$ に注意すれば、次式を満たす自然数 n_0' が存在する：

$$\frac{M(m+\delta)\alpha_\varphi}{M\delta + m\alpha_\varphi} < \frac{\varphi(x_{n_0'})}{\varphi_1(x_{n_0'})}. \tag{5}$$

それ故次式が成り立つ：

$$\begin{aligned}
&\alpha_\varphi\varphi_1(x_{n_0'}) + m(1 - \frac{\alpha_\varphi}{M})\varphi_0(x_{n_0'}) \\
&\quad < \varphi(x_{n_0'})\frac{M\delta + m\alpha_\varphi}{M(m+\delta)} + m(1 - \frac{\alpha_\varphi}{M})\frac{\varphi(x_{n_0'})}{m+\delta} \quad \text{(by (4) and (5))} \\
&\quad = \varphi(x_{n_0'})\left(\frac{M\delta + m\alpha_\varphi}{M(m+\delta)} + m(1 - \frac{\alpha_\varphi}{M})\frac{1}{m+\delta}\right) \\
&\quad = \varphi(x_{n_0'}).
\end{aligned}$$

このことから $\left(\alpha_\varphi, m(1 - \frac{\alpha_\varphi}{M})\right) \notin D_\varphi(x_{n_0'})$ がわかる。しかしながら $D_\varphi \subseteq D_\varphi(x_{n_0'})$ かつ $\{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2 : 1 \leq \frac{\alpha}{M} + \frac{\beta}{m},\ \alpha_\varphi \leq \alpha\} \subseteq D_\varphi$ であるから、$\left(\alpha_\varphi, m(1 - \frac{\alpha_\varphi}{M})\right) \in D_\varphi$ が成り立つ。従って $\left(\alpha_\varphi, m(1 - \frac{\alpha_\varphi}{M})\right) \in D_\varphi(x_{n_0'})$ が成り立つがこれは矛盾である。このようにして (3) が示された。従って (1) と (3) から次式が結論される：

$$\begin{aligned}
D_\varphi &\subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} D_\varphi(x_n) \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2 : 1 \leq \alpha\left(\frac{\varphi(x_n)}{\varphi_1(x_n)}\right)^{-1} + \beta\left(\frac{\varphi(x_n)}{\varphi_0(x_n)}\right)^{-1}\} \\
&\subseteq \{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2 : 1 \leq \frac{\alpha}{M} + \frac{\beta}{m}\}.
\end{aligned}$$

(iii) $M = \alpha_\varphi$. と仮定する。従って次式を満たす X のなかの部分列 $\{x_n\}$ を取ることができる：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(x_n) - m\varphi_0(x_n)}{M\varphi_1(x_n) - m\varphi_0(x_n)} = 1.$$

このとき $\varphi(x_n) \neq 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ と仮定できる。それ故我々は次式を得る：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - m\dfrac{\varphi_0(x_n)}{\varphi(x_n)}}{M\dfrac{\varphi_1(x_n)}{\varphi(x_n)} - m\dfrac{\varphi_0(x_n)}{\varphi(x_n)}} = 1. \tag{6}$$

そこで $\left\{\dfrac{\varphi_0(x_n)}{\varphi(x_n)}\right\}$ が有界列であることに注意すれば、(6) から $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\varphi_1(x_n)}{\varphi(x_n)} = \dfrac{1}{M}$ を得る。更に $D_\varphi \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2 : 1 \leq \alpha\dfrac{\varphi_1(x_n)}{\varphi(x_n)} + \beta\dfrac{\varphi_0(x_n)}{\varphi(x_n)}\}$ かつ $\dfrac{\varphi_0(x_n)}{\varphi(x_n)} \leq \dfrac{1}{m}$ $(n = 1, 2, \cdots)$

に注意すれば、次式を得る：

$$D_\varphi \cap \{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2 \colon \beta \geq 0\} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2 \colon \beta \geq 0 \text{ and } 1 \leq \alpha \frac{\varphi_1(x_n)}{\varphi(x_n)} + \frac{\beta}{m}\}.$$

従って

$$D_\varphi \cap \{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2 \colon \beta \geq 0\} \subseteq \{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2 \colon \beta \geq 0 \text{ and } 1 \leq \frac{\alpha}{M} + \frac{\beta}{m}\}$$

が成り立つ。

また各 n に対して、$\dfrac{\varphi_0(x_n)}{\varphi(x_n)} = \dfrac{\varphi_1(x_n)}{\varphi(x_n)} \dfrac{\varphi_0(x_n)}{\varphi_1(x_n)} \geq \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\varphi_1(x_n)}{\varphi(x_n)}$ が成り立つから、もし $\beta \leq 0$ であれば、$\beta \dfrac{\varphi_0(x_n)}{\varphi(x_n)} \leq \dfrac{\beta}{\rho} \dfrac{\varphi_1(x_n)}{\varphi(x_n)}$ である。従って

$$\begin{aligned} & D_\varphi \cap \{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2 \colon \beta \leq 0\} \\ & \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2 \colon \beta \leq 0 \text{ and } 1 \leq \alpha \frac{\varphi_1(x_n)}{\varphi(x_n)} + \frac{\beta}{\rho} \frac{\varphi_1(x_n)}{\varphi(x_n)}\} \\ & \subseteq \{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2 \colon \beta \leq 0 \text{ and } 1 \leq \frac{\alpha}{M} + \frac{\beta}{M\rho}\} \end{aligned}$$

が成り立つ。証明終

問題。 定理 (iii) においても $D_\varphi \subseteq \{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2 \colon 1 \leq \frac{\alpha}{M} + \frac{\beta}{m}\}$ が成り立つのか？あるいは定理がベストなのか？

さて更に具体的な例として Djokovic' inequality :

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \left\| x_{i_1} + \cdots + x_{i_k} \right\| \leq \binom{n-2}{k-1} \sum_{i=1}^{n} \| x_i \| + \binom{n-2}{k-2} \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|$$

$$(x_1, \cdots, x_n \in H : \text{a Hlawka space},\ 2 \leq k \leq n-1)$$

を考察してみる。各 $x_1, \cdots, x_n \in H$ に対して、

$$\delta_k(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \left\| x_{i_1} + \cdots + x_{i_k} \right\|$$

と置くと、$\{\delta_k : 1 \leq k \leq n\}$ は線形空間 $X = H \oplus \cdots \oplus H$ 上のセミノルム系をつくるが、今 k を固定して、$\varphi_0 = \delta_n$, $\varphi_1 = \delta_1$, $\varphi = \delta_k$ と置く。このとき Djokovic' inequality は

$$\varphi \leq \binom{n-2}{k-1} \varphi_1 + \binom{n-2}{k-2} \varphi_0 \text{ on } X$$

を意味している。このとき $m = M = \binom{n-1}{k-1}$, $\alpha_\varphi = \binom{n-2}{k-1}$ である事がわかるので、上の定理から

$$\{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2 : \binom{n-1}{k-1} \leq \alpha + \beta,\ \binom{n-2}{k-1} \leq \alpha\} \subseteq D_\varphi \subseteq \{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2 : \binom{n-1}{k-1} \leq \alpha + \beta\}$$

が成り立つ。しかし実際には

$$D_\varphi = \{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2 : \alpha \geq \binom{n-2}{k-1} \text{ and } \alpha + \beta \geq \binom{n-1}{k-1}\}$$

が示せるので、Djokovic 型不等式族が作る凸領域 D_φ は最小領域

$$\{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2 : 1 \leq \frac{\alpha}{M} + \frac{\beta}{m},\ \alpha_\varphi \leq \alpha\}$$

に一致し、$\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2}$ に注意すれば、その唯一つの端点 $(\alpha_\varphi, M - \alpha_\varphi)$ に対応している不等式が、Djokovic's inequality であったということになる。それ故 Djokovic's inequality は最良と言って良いのであろう (cf. [1])。

他に

$$\min(x_1, \cdots, x_n) \leq \left(\frac{x_1^t + \cdots + x_n^t}{t}\right)^{\frac{1}{t}} \leq \max(x_1, \cdots, x_n) \quad (x_1, \cdots, x_n > 0)$$

$$\mu(\Omega)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \| f \|_p \leq \| f \|_q \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \| f \|_r \quad (f \in L^r(\Omega, \mu) \quad 0 < p < q < r < \infty)$$

等についても考察してみたい。 しかしながらこれはなかなかの難問で、現在東京理科大の宮島静雄氏の協力を得て研究が進行中である。これらに関しては別の機会に譲りたい。

参考文献

1. S.-E. Takahasi, Y. Takahashi and A. Honda, A new interpretation of Djokovic's inequality, submitted.