数理解析研究所講究録
1188 巻 2001 年 96-101

Higson compactification of the half-open intervals

岩本 豊 (弓削商船高等専門学校)
Yutaka Iwamoto, Yuge National College of Maritime Technology
友安一夫 (都城工業高等専門学校)
Kazuo Tomoyasu, Miyakonojo National College of Technology

本稿では, 空間は全て局所コンパクトハウスドルフ空間を扱うものとする.

(X,d), (Y,ρ) を距離空間とする. 連続写像 $f: X \to Y$ が, 任意の $r>0$ に対して, 次の条件をみたすとき, f は $(*)_d$ 条件を満たすという:

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{diam}_\rho f(B_d(x,r)) = 0 \quad \cdots\cdots \quad (*)_d$$

正確には, 任意の $r>0$ と $\varepsilon>0$ に対して, あるコンパクト集合 $K=K_{r,\varepsilon}$ が存在して, $x\in X\setminus K$ であれば, $\mathrm{diam}_\rho f(B_d(x,r))<\varepsilon$ ということである.

$C_d^*(X)$ を $(*)_d$ の条件を満たす X 上の実数値有界連続関数全体とする. ここで, (X,d) がプロパーな距離空間 (=任意の有界閉集合がコンパクトな距離空間) であるとき, $C_d^*(X)$ は定値関数を含み, $C^*(X)$ ($=X$ 上の実数値有界連続関数全体) に一様収束位相を入れた中で閉部分環となっている. 従って, $C_d^*(X)$ と1対1に対応しているコンパクト化がある. これを Higson コンパクト化といい, $\overline{X}^d$ で表す. Higson コンパクト化は距離に依存するコンパクト化であり, Higson コンパクト化の剰余 $\overline{X}^d\setminus X$ を $\nu_d X$ で表す.

Higson コンパクト化に関して, N. Higson は, コンパクトでない一様可縮かつプロパーな距離空間 X の Higson コンパクト化の Čech コホモロジーは消えているか, という問題を提出した. この Higson の問題に対して, 1994年に, J. Keesling は, コンパクトでない連結な空間の Higson コンパクト化の1次元 Čech コホモロジーは零でないことを証明し, Higson の問題を否定的に解決している. このときの証明の手法は, Higson コンパクト化が Stone-Čech コンパクト化と類似した性質を持つことを示唆しており, 実際両者の間に幾つかのアナロジーが成り立つことが知られている (cf. [1], [4], [5], [6]). 特に次のことが分かっている [3]: コンパクトでないプロパーな距離空間 X に対して,

$$\beta X \approx \sup\{\overline{X}^d : d \text{ は } X \text{ 上のプロパーな距離}\}$$

が成立する.

これにより Stone-Čech コンパクト化を Higson コンパクト化の族で近似できることが分かるのであるが, どのような Higson コンパクト化で近似できているかということに関しては明らかでない. そこで, 本稿では半開区間 $J=[0,\infty)$ に注目し, βJ が J 上の同相写像により生成されるプロパーな距離による Higson コンパクト化の族により近似されることを述べる.

命題 1 ([4], Proposition 1) X をコンパクトでない距離空間でプロパーな距離 d を持つものとする．Y をコンパクト距離空間であるとし，$f : X \to Y$ を連続写像としたとき，f を $\hat{f} : \overline{X}^d \to Y$ に拡張できることと f が条件 $(*)_d$ を満たすことは同値である．さらに，Higson コンパクト化 $\overline{X}^d$ はその様な性質を持つコンパクト化のなかで同値なものを除き，ただ一つに定まる．

プロパーな距離空間 (X, d) の部分集合族 $\{E_1, \ldots, E_n\}$ が分岐 (diverge) しているとは，任意の $r > 0$ に対して，$\bigcap_{i=1}^n B_d(E_i, r)$ が有界集合であるときをいう．但し，$B_d(E_i, r)$ は E_i の r-近傍である $(i = 1, \ldots, n)$．これより，$\{E_1, \ldots, E_n\}$ が分岐していることと$\lim_{x\to\infty} \sum_{i=1}^n d(x, E_i) = \infty$ (= 任意の $N > 0$ に対して，あるコンパクト集合 $K = K_N$ が存在して，$x \in X \setminus K$ であるならば $\sum_{i=1}^n d(x, E_i) > N$) であることは同値である．

これより，Higson コンパクト化は次のように特徴付けられる．

命題 2 (cf. [1], Proposition 2.3) X をコンパクトでない距離空間でプロパーな距離 d を持つものとする．このとき，次は同値である．

(1) $\alpha X \approx \overline{X}^d$ (= ある同相写像 $f : \alpha X \to \overline{X}^d$ が存在して $f|_X = \mathrm{id}_X$ となる.)
(2) X の互いに素な閉集合 A, B に対して，$\{A, B\}$ が分岐していることと $\mathrm{cl}_{\alpha X} A \cap \mathrm{cl}_{\alpha X} B = \emptyset$ であることは同値である．

定理 3 ([1], Theorem 1.4) X をコンパクトでない距離空間でプロパーな距離 d を持つものとし，A を X のコンパクトでない閉部分空間であるとする．このとき，$\mathrm{cl}_{\overline{X}^d} A \approx \overline{A}^{d'}$ である．但し，d' は d より生成された A 上の部分距離である．

補題 4 X をコンパクトでない距離空間でプロパーな距離 d を持つものとする．$U \subset \overline{X}^d$ を $x \in \nu_d X$ の近傍とする．このとき，任意の $r > 0$ とコンパクト集合 $K \subset X$ に対して，ある $y \in X \setminus K$ で $B_d(y, r) \subset U$ となるものが取れる．

証明の概要. $\overline{X}^d$ を $\prod_{f \in C_d^*(X)} I_f$ の部分集合と考える． 但し，$I_f = \mathrm{cl}_{\mathbb{R}} f(X)$ である．このとき，ある $U_i \subset I_{f_i}$, $i = 1, \ldots, n$ と $f_1, \ldots, f_n \in C_d^*(X)$ が取れて，$x \in \cap_{i=1}^n p_i^{-1}(U_i) \subset U$ を満たすようにできる．但し，$p_i : \prod_{f \in C_d^*(X)} I_f \to I_{f_i}$は自然な射影である．$\pi : \prod_{f \in C_d^*(X)} I_f \to (\prod_{i=1}^n I_{f_i}, \rho)$ は自然な写像とすると，ある $\varepsilon > 0$ で $B_\rho(\pi(x), \varepsilon) \subset U_1 \times \cdots \times U_n$ を満たすようなものが取れる．このとき，積写像 $g = (f_i)_{i=1}^n : X \to \prod_{i=1}^n I_{f_i}$ は条件 $(*)_\rho$ を満たしているので，命題 1 より，g の拡張$\hat{g} : \overline{X}^d \to \prod_{i=1}^n I_{f_i}$ が取れる．$\hat{g}^{-1}(B_\rho(\pi(x), \varepsilon/4)) \cap (X \setminus K) \neq \emptyset$ であることから，$\mathrm{diam}_\rho\, g(B_d(y, r)) < \varepsilon/2$ を満たすような $y \in \hat{g}^{-1}(B_\rho(\pi(x), \varepsilon/4)) \cap (X \setminus K)$ が取れる．このとき $B_d(y, r) \subset U$ となる．□

補題 5 X をコンパクトでない距離空間でプロパーな距離 d を持つものとし，N_r $(r > 0)$ を X の r-稠密な閉集合であるとする．d' を d から生成された N_r における部分距離であるとするとき，$\nu_d X$ と $\nu_{d'} N_r$ は同相である $(\nu_d X \cong \nu_{d'} N_r)$.

証明. $x \in \nu_d X$ に対して，$U \subset \overline{X}^d$ を x の近傍とする．このとき，任意のコンパクト集合 $K \subset X$ に対して，補題 4 より，ある $y \in X \setminus K$ で $B_d(y, r) \subset U$ となるものが取れる．ここで，N_r が X において r-稠密であることから， $B_d(y, r) \cap N_r \neq \emptyset$ となる．これよ

り，$B_d(y,r)\cap N_r \subset U\cap N_r \neq \emptyset$ となる．ゆえに，$\mathrm{cl}_{\overline{X}^d} N_r \setminus N_r = \nu_d X$ となる．定理 3 より，$\mathrm{cl}_{\overline{X}^d} N_r \approx \overline{N_r}^{d'}$ であるから，$\nu_d X \cong \nu_{d'} N_r$ を得る．□

d を $[0,\infty)$ のプロパーな距離とし，以下の条件 (†) を満たしているものとする：

$$d(x,y)+d(y,z)=d(x,z) \quad x,\ y,\ z\in[0,\infty)\ (x<y<z) \quad \cdots\cdots \quad (\dagger)$$

この条件は距離 d が 半開区間 J 上の同相写像で生成されたものであることを主張している．

実際，d を $[0,\infty)$ 上のプロパーな距離で条件 (†) を満たしているものとする．このとき，写像 $h:[0,\infty)\to[0,\infty)$ を $h(x)=d(0,x)$ と定義すれば，これは同相写像であり，$d(x,y)=|h(x)-h(y)|\ \ (x,y\in[0,\infty))$ となる．また逆に，同相写像 $h:[0,\infty)\to[0,\infty)$ を与えたとき，$d(x,y)=|h(x)-h(y)|\ \ (x,y\in[0,\infty))$ と定義すれば，条件 (†) を満たすプロパーな距離となる．

定理 6 d を半開区間 $X=[0,\infty)$ 上のプロパーな距離で条件 (†) を満たしているものとする．このとき，$\nu_d X$ は indecomposable continuum である．

証明の概要. $X=[0,\infty)$ とし d を条件 (†) を満たす X 上のプロパーな距離とする．このとき $\nu_d X$ は continuum である．K と L を $\nu_d X$ の閉部分集合 $(K,\ L\neq\nu_d X)$ とし $\nu_d X=K\cup L$ を満たしているものとする．このとき，K が連結でないことを証明する．

まず, $x\in\nu_d X\setminus K$ と $y\in\nu_d X\setminus L$ を任意に取り出す．$\overline{X}^d$ の正則性より，$\overline{X}^d$ における互いに素な開集合 $U,\ V$ で $x\in U\subset \mathrm{cl}_{\overline{X}^d} U\subset \overline{X}^d\setminus K$，$y\in V\subset \mathrm{cl}_{\overline{X}^d} V\subset \overline{X}^d\setminus L$ かつ $\mathrm{cl}_{\overline{X}^d} U\cap \mathrm{cl}_{\overline{X}^d} V=\emptyset$ を満たすものが取れる．このとき，帰納的に点列 $\{a_i\}_{i=1}^\infty$ and $\{b_i\}_{i=1}^\infty$ を次のように取り出すことができる．

補題 4 より，$B_d(a_1,2)\subset U$ を満たすような点 $a_1\in U$ が存在する．ここで d が条件 (†) を満たすプロパーな距離であることから，ある $b_1(>a_1)$ で $b_1\in \mathrm{cl}_X B_d(a_1,2)$ and $d(a_1,b_1)=2$ を満たすようなものが取れる．

次に，$i<n$ まで点列 $a_1<b_1<\cdots<a_i<b_i$ が構成できたとする．このとき，$a_n\in U$ で次の条件を満たすものが取れる．

(1) $b_{n-1}<a_n$,
(2) $d(b_{n-1},a_n)>2^{n+1}$,
(3) $[b_{n-1},a_n]\cap V\neq\emptyset$ かつ
(4) $B_d(a_n,2^n)\subset U$ (補題 4).

さらに，条件 (†) より，$b_n\in \mathrm{cl}_X B_d(a_n,2^n)$ で次の条件を満たすものを取り出すことができる．

(5) $a_n<b_n$ かつ $d(a_n,b_n)=2^n$.

次に連続写像 $f:X\to[0,1]$ を以下のように定める．

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\in[0,a_1], \\ \dfrac{d(x,a_i)}{2^i}, & x\in[a_i,b_i] \text{ かつ } i \text{ は奇数}, \\ 1, & x\in[b_i,a_{i+1}] \text{ かつ } i \text{ は奇数}, \\ \dfrac{d(x,b_i)}{2^i}, & x\in[a_i,b_i] \text{ かつ } i \text{ は偶数}, \\ 0, & x\in[b_i,a_{i+1}] \text{ かつ } i \text{ は偶数}. \end{cases}$$

ここで条件 (5) より，f は well-defined であり，条件 $(*)_d$ も満たしていることに注意する．

f が条件 $(*)_d$ を満たしているので，命題 1 より， f の拡張 $\hat{f}:\overline{X}^d \to [0,1]$ が存在する．このとき，$\hat{f}(K)=\{0,1\}$ となることを示す．条件 (3) より，$b_n < c_n < a_{n+1}$ かつ $c_n \in V$ を満たす点列 $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$ を取り出すことができる．$f(c_{2n+1})=1$ かつ $\mathrm{cl}_{\overline{X}^d}\{c_{2n+1}\}_{i=1}^{\infty} \subset V \cap \nu_d X \subset K$ であることから，$\hat{f}^{-1}(1)\cap K \neq \emptyset$ である．同様に，$f(c_{2n})=0$ であることから，$\hat{f}^{-1}(0)\cap K \neq \emptyset$ が示せる．しかし，f の構成の仕方と条件 (4) と (5) から，$f^{-1}\big((0,1)\big) \subset U \cap X$ であり，$\hat{f}^{-1}\big((0,1)\big)\cap K=\emptyset$. 従って，$\hat{f}(K)=\{0,1\}$ である．これは，K が連結でないことをしめしており，$\nu_d X$ は indecomposable continuum であることが分かる．□

Higson コンパクト化は距離に依存するコンパクト化であるので，$\nu_d X$ $(X=[0,\infty))$ が decomposable continuum となる場合もある．

例 7 $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}^2$ を $g(t)=(t,t\sin t)$ で定義された埋め込み写像であるとする．$X=g([0,\infty))$ とおき，d を平面 $\mathbb{R}^2$ の通常の距離による部分距離であるとする．このとき，命題 2 と補題 5 より，$\nu_d X$ は decomposable continuum であることが示せる．

$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ を正値連続関数とする．ここで，距離 d_f を以下のように定義する：

$$d_f(x,y)=\left|\int_x^y f(t)dt\right| \quad x,\ y\in[0,\infty)$$

d_f は $X(=[0,\infty))$ 上の微分同相写像により生成されている．すなわち，微分同相写像 $F:[0,\infty)\to[0,\infty)$ を $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ と定義すれば，$d_f(x,y)=|F(x)-F(y)|$ $(x,y\in[0,\infty))$ となる．さらに $f\geq 1$ であるとき，d_f は条件 (†) を満たしているプロパーな距離となる．

αX と γX を X のコンパクト化であるとする．このとき，ある連続写像 $f:\alpha X\to\gamma X$ で $f|_X$ が X 上恒等写像であるものが存在するとき，$\alpha X \succeq \gamma X$ と書く．

このとき，以下の定理を得る [2].

定理 8 X を半開区間 $[0,\infty)$ であるとする．このとき，Stone-Čech コンパクト化 βX は剰余が indecomposable continuum な Higson コンパクト化により近似できる．すなわち，

$$\beta X \approx \sup_{\succeq}\{\overline{X}^{d_f} \mid f:X\to\mathbb{R}\ \text{は連続かつ}\ f\geq 1\}.$$

証明の概要．まず，次のことを示す：「A, $B\subset X$ を互いに素な閉集合とする．このとき，ある連続写像 $f:X\to\mathbb{R}$ で $f\geq 1$ かつ $\mathrm{cl}_{\overline{X}^{d_f}}A\cap\mathrm{cl}_{\overline{X}^{d_f}}B=\emptyset$ を満たすものが存在する.」

実際，A, B を X における互いに素な閉集合とする（一般性を失うことなく，A, B をコンパクトでないとしてよい）と次を満たす非有界な点列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$，$\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$，$\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ を取り出すことができる：

$$A\subset\bigcup_{n=0}^{\infty}[a_n,b_n],\ B\subset\bigcup_{n=0}^{\infty}[p_n,q_n]\ \text{かつ}\ a_n\leq b_n<p_n\leq q_n<a_{n+1},\ n=0,1,\ldots\ldots$$

ここで，連続関数 $f:X\to\mathbb{R}$ を次のように定める．

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x\in\bigcup_{n=0}^{\infty}[a_n,b_n],\\ \dfrac{(k_n-1)\cdot(x-b_n)}{(p_n-b_n)}+1, & x\in[b_n,p_n],\\ k_n, & x\in[p_n,q_n],\\ \dfrac{(k_n-1)\cdot(a_{n+1}-x)}{(a_{n+1}-q_n)}+1, & x\in[q_n,a_{n+1}],\end{cases}$$

但し，$k_n=\max\{n+1,\ (n+1)/(p_n-b_n),\ (n+1)/(a_{n+1}-q_n)\}$ である．明らかに f は well-defined かつ $f\geq 1$ である．

このとき，$f\geq 1$，$f(A)=1$ かつ，$b\in B\cap[p_n,q_n]$ に対して $f(b)=k_n\geq n+1$ であることから，$x>b_{2n}$ であるならば $d_f(x,A)+d_f(x,B)>n$ であることが分かる．ゆえに，$\lim_{x\to\infty}\big(d_f(x,A)+d_f(x,B)\big)=\infty$，すなわち，部分集合族 $\{A,\ B\}$ は分岐していることがわかる．ゆえに, 命題 2 より，$\mathrm{cl}_{\overline{X}^{d_f}}A\cap\mathrm{cl}_{\overline{X}^{d_f}}B=\emptyset$ であることが従う．

$\gamma X=\sup_{\succeq}\{\overline{X}^{d_f}\mid f:X\to\mathbb{R}$ は連続かつ $f\geq 1\}$ とおき，A と B を X における互いに素な閉集合であるとする．ここで，最初に示したことから，ある連続関数 $f:X\to\mathbb{R}$ で $f\geq 1$ かつ $\mathrm{cl}_{\overline{X}^{d_f}}A\cap\mathrm{cl}_{\overline{X}^{d_f}}B=\emptyset$ を満たしているようなものが取れる．このとき，定理 6 より，$\nu_{d_f}X$ は indecomposable continuum となることに注意する．さらに，$\gamma X\succeq\overline{X}^{d_f}$ かつ $\mathrm{cl}_{\overline{X}^{d_f}}A\cap\mathrm{cl}_{\overline{X}^{d_f}}B=\emptyset$ であることから，任意の互いに素な X の閉集合 A, B に対して $\mathrm{cl}_{\gamma X}A\cap\mathrm{cl}_{\gamma X}B=\emptyset$ であることが従う．このとき，正規空間の Stone-Čech コンパクト化の特徴付けの定理から，$\beta X\approx\gamma X$ が得られる．□

上で注意したように d_f は J 上の微分同相写像によって生成されているので上の定理は次のように言い換える事ができる：

$$\beta X\approx\sup\{\overline{X}^{d}\mid d \text{ は } X \text{ 上の微分同相写像により生成された距離}\}.$$

さらにこの結果を次のように拡張する事ができる [2]：

定理 9 X を半開区間 $[0,\infty)$ であるとする．このとき，Stone-Čech コンパクト化 βJ は J 上の PL-同相写像から生成された距離による Higson コンパクト化により近似できる．すなわち，

$$\beta X\approx\sup\{\overline{X}^{d}\mid d \text{ は } X \text{ 上の } PL\text{-同相写像により生成された距離}\}.$$

参考文献

[1] A.N. Dranishnikov, J. Keesling and V.V. Uspenskij, *On the Higson corona of uniformly contractible spaces*, Topology 37 (1998), 791-803.

[2] Y. Iwamoto and K. Tomoyasu, *Higson compactifications obtained by expanding and contracting the half-open interval*, to appear in Tsukuba J. Math.

[3] K. Kawamura and K. Tomoyasu, *Approximations of Stone-Čech compactifications by Higson compactifications*, to appear in Coll. Math.

[4] J. Keesling, *The one-dimensional Čech cohomology of the Higson compactification and its corona*, Topology. Proc. 19 (1994), 129-148.

[5] ________, *Subcontinua of the Higson corona*, Topology Appl. 80 (1997), 155-160.

[6] K. Tomoyasu, *Proper metric spaces and Higson compactifications of product spaces*, Glasnik Mat. 34(54) (1999), 65-72.