数理解析研究所講究録
1189 巻 2001 年 144-152

Chaotic order and Furuta inequality

前橋工科大学　亀井栄三郎
Maebashi Institute of Technology
Eizaburo Kamei

1. Operator Chaos. ヒルベルト空間上の positive opretor A に対して $\log A$ を何故 operator chaos と見なすのか、ということから始めよう。その為にはまず von Neumann entropy [20] までさかのぼらなければならない。von Neumann は量子統計集団を表す統計作用素（ positive trace class operator ）A に対してエントロピーを次のように与えた。

$$\hat{S}(A) = -\mathrm{tr}A \log A$$

梅垣 [25] はこの拡張として統計作用素 A, B に対して相対作用素エントロピーを次のように与えた。

$$\hat{S}(A|B) = \mathrm{tr}A(\log A - \log B)$$

その後この相対エントロピーは荒木、或いは Uhlmann らによってより広範な作用素環上の定義へと拡張されている (cf.[26])。

更に中村-梅垣 [20](cf. [26]) は作用素エントロピー (operator entropy) を次のように定義しうることを示した。

$$S(A) = -A \log A$$

この定義において重要な事はこれが operator concave function になっているか、ということであった。中村-梅垣はこの事の証明に苦労しているが、最近、古田 [10] によって明快な証明が与えられた。

我々は作用素エントロピーの相対化を目指した。その為の道具として久保-安藤 [18] によって与えられた作用素平均の理論を使う。こでは特に α-power mean $\natural_\alpha$ と呼ばれる作用素平均が有用である。それは次のように与えられるのであるが $\alpha = \frac{1}{2}$ のときが丁度 geometric mean である。ヒルベルト空間上の positive opretor A, B

$$A \natural_\alpha B = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\alpha A^{\frac{1}{2}}, \quad for\ \alpha \in [0,1]$$

これを用いて我々は positive invertible operators A, B に対し 相対作用素エントロピー (relative operator entropy) $S(A|B)$ を次のように与えた [3]。

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{A \natural_\alpha B - A}{\alpha} = A^{\frac{1}{2}}(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}} = S(A|B)$$

これは Uhlmann [24] によって与えられた相対エントロピーの手法を作用素化したものである。 A と B が可換の時は梅垣 [25] によって与えられた相対エントロピーに一致する。更に $B=I$ の時 $S(A|I)=-A\log A$ となり作用素エントロピーが得られる。

一方、 $S(I|A)=\log A$ であることから、これを A 自身の持つカオス、すなわち operator chaos と見るのが妥当であろうと考える。そこでこの operator chaos によって決められる順序、すなわち $\log A\geq\log B$ を chaotic order と呼び $A\gg B$ と表す事にする ([4],[5])。

2. Chaotic Furuta Inequality. この chaotic order における Furuta 型不等式を考察していく中で我々は次の道具を手に入れることが出来た。これは安藤 [1] の exponential inequality に刺激され得られた結果である [7]。これを chaotic 版の Furuta 不等式と呼んでおこう。

Theorem A(Chaotic Furuta inequality). *Let A and B be positive invertible operators. Then the followings are equivalent.*

(i) $$A\gg B$$

(ii) $$A^{-r}\ \sharp_{\frac{r}{p+r}}\ B^p\leq I\quad for\quad 0\leq r\quad and\quad 0\leq p$$

(iii) $$B^{-r}\ \sharp_{\frac{r}{p+r}}\ A^p\geq I\quad for\quad 0\leq r\quad and\quad 0\leq p.$$

これは更に次のような一般化ができる事が解る ([14],[15])。

Theorem 1. *Let A and B be positive invertible operators, then the followings are equivalent.*

(1) $$A\gg B\ (\text{i.e.}\log A\geq\log B)$$

(2) $$A^{-r}\ \sharp_{\frac{\delta+r}{p+r}}\ B^p\leq B^\delta\quad for\quad r\geq 0\quad and\quad 0\leq\delta\leq p$$

(3) $$B^{-r}\ \sharp_{\frac{\delta+r}{p+r}}\ A^p\geq A^\delta\quad for\quad r\geq 0\quad and\quad 0\leq\delta\leq p$$

$$(4) \qquad A^{-r} \natural_{\frac{\gamma+r}{p+r}} B^p \leq A^\gamma \quad for \quad -r \leq \gamma \leq 0 \quad and \quad 0 \leq p$$

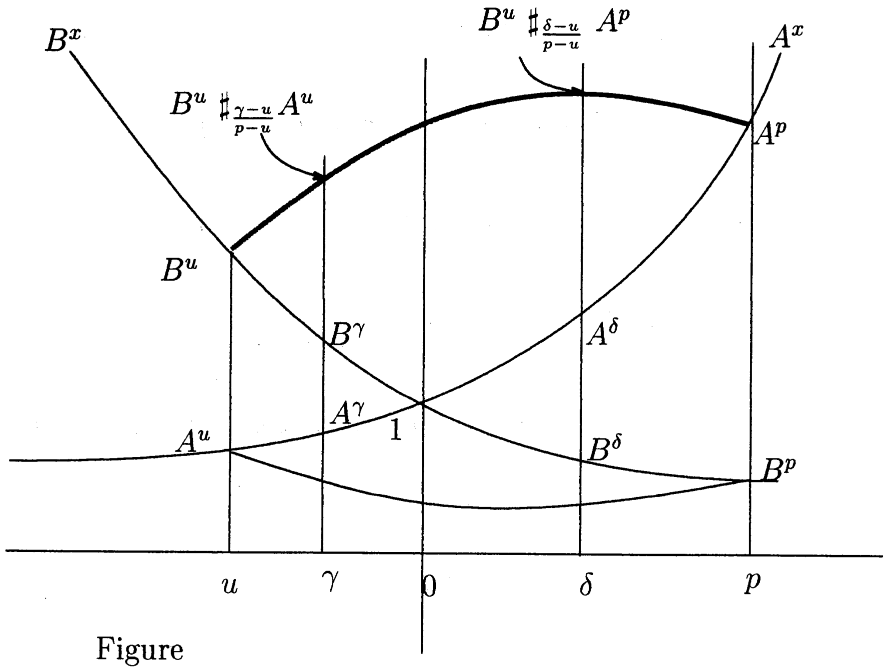
$$(5) \qquad B^{-r} \natural_{\frac{\gamma+r}{p+r}} A^p \geq B^\gamma \quad for \quad -r \leq \gamma \leq 0 \quad and \quad 0 \leq p.$$

Proof. Since $A^{-r} \natural_{\frac{r}{p-u}} B^p \leq 1$ by Theorem A, (1) implies (4) is given as follows:

$$A^{-r} \natural_{\frac{\gamma+r}{p+r}} B^p = A^{-r} \natural_{\frac{\gamma+r}{r}} (A^{-r} \natural_{\frac{r}{p+r}} B^p) \leq A^{-r} \natural_{\frac{\gamma+r}{r}} 1 = A^\gamma.$$

The equivalence of these inequalities are easily seen as follows:
(2) is equivalent to $B^{-p} \natural_{\frac{-\delta+p}{r+p}} A^r \geq B^{-\delta}$ since $B^\delta \geq A^{-r} \natural_{\frac{\delta+r}{p+r}} B^p = B^p \natural_{1-\frac{\delta+r}{p+r}} A^{-r} = B^p \natural_{\frac{-\delta+p}{r+p}} A^{-r}$. By exchanging $-\delta$ and γ, p and r, we have (5). Replacing A and B by B^{-1} and A^{-1} respectively, we see the equivalence of (2) and (3) or (4) and (5).

下の図によってこの関係を見ることが出来る。



Figure

3. フルタ不等式. Furuta 不等式が与えられたのは 1987 年、[8](cf.[9]) においてである。その形を述べておこう。

Furuta Inequality:
If $A \geq B \geq 0$,
then for each $r \geq 0$,

$$(A^{\frac{r}{2}}A^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

and

$$(B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (B^{\frac{r}{2}}B^pB^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

holds for p and q such that $p \geq 0$ *and* $q \geq 1$ *with*

$$(1+r)q \geq p+r.$$

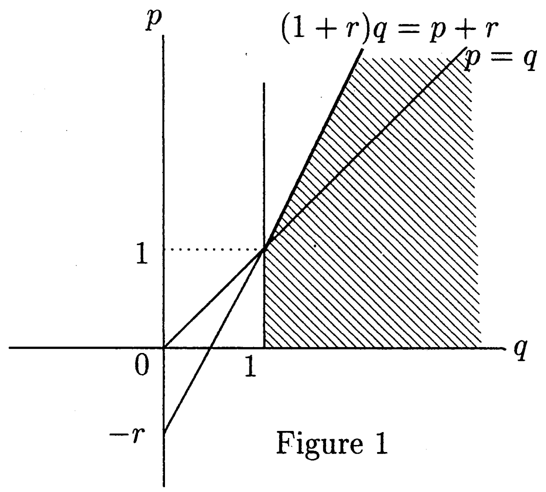


Figure 1

この不等式は Löwner-Heinz 不等式を $r = 0$ の場合として含みこの領域の best possibility は棚橋 [21] によって証明されている。

Furuta 不等式は q を省いて $p \geq 1$, $r \geq 0$ として扱っても本質は変わらない。書き直すと次のようになる。

$A \geq B \geq 0$ に対し

$$(A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}} \leq A^{1+r}, \quad \textit{and} \quad B^{1+r} \leq (B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}}$$

作用素平均を用いて Furuta 不等式を表せば次のようになる ([2],[6],[7],[13] etc.): If $A \geq B \geq 0$, then

(I) $$A^{-r} \sharp_{\frac{1+r}{p+r}} B^p \leq A \quad \textit{and} \quad B \leq B^{-r} \sharp_{\frac{1+r}{p+r}} A^p$$

hold for $p \geq 1$ and $r \geq 0$.

更に我々は α-power mean $\sharp_\alpha$ を用いてフルタ不等式に別証明を与えることで次のような結果を得る事が出来た [13]。

Satellite theorem of the Furuta inequality: *If $A \geq B \geq 0$, then*

$$A^u \natural_{\frac{1-u}{p-u}} B^p \leq B \leq A \leq B^u \natural_{\frac{1-u}{p-u}} A^p$$

for all $p \geq 1$ and $u \leq 0$.

さてこの Furuta 不等式と先の Chaotic Furuta 不等式関連であるが、内山 [22] は Furuta 不等式を用いるだけで Chaotic Furuta 不等式が導けることを次のように示した。古田 [11] に従った形でこれを述べよう。道具は次の事実である。

(5) $$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{\log X}{n})^n = X.$$

そこで $A \gg B$ を仮定すると、

$$A_n = 1+\frac{\log A}{n} \geq B_n = 1+\frac{\log B}{n}$$

が得られる。この $A_n \geq B_n \geq 0$ に対して Furuta 不等式を用いれば

$$(A_n^{\frac{nr}{2}} B_n^{np} A_n^{\frac{nr}{2}})^{\frac{\frac{1}{n}+r}{p+r}} \leq A_n^{1+nr}.$$

$n \longrightarrow \infty$ とすれば (4) がえられる。

4. Chaotic order and Furuta inequality. ここでは我々は内山 [21] の示したことの逆を示そう。すなわち Chaotic Furuta 不等式を用いるだけで Furuta 不等式が得られる。まず次の事実を見ておく。これは Theorem 1 において $\delta = 1$ と置けば得られることであるが Satellite Theorem と比較すれば chaotic order $\gg$ と usual order $\geq$ との違いが理解しやすい。

Theorem 2. *If $A \gg B$ for $A,\ B > 0$, then*

(II) $$A^{-r} \natural_{\frac{1+r}{p+r}} B^p \leq B \quad \text{and} \quad A \leq B^{-r} \natural_{\frac{1+r}{p+r}} A^p$$

hold for all $p \geq 1$ and $r \geq 0$.

次が Furuta 不等式と Chaotic Furuta 不等式が同値であることを示す結果である [17](cf.[16])。

Theorem 3. *The followings are equivalent.*

(i) *If* $A \geq B > 0$, *then* (I) *holds for* $p \geq 1$ *and* $r \geq 0$.

(ii) *If* $A \gg B$ *for* $A,\ B > 0$, *then* (II) *holds for* $p \geq 1$ *and* $r \geq 0$.

Proof. (ii) $\Longrightarrow$ (i) については既に内山 [22] によって示されている。そこで (ii) $\Longrightarrow$ (i) についてのみ示せばよい。

Suppose that the chaotic Furuta inequality (ii) and $A \geq B > 0$. Since $A \gg B$ is satisfied, we have (II) and so

$$\begin{aligned} A^{-r} \sharp_{\frac{1+r}{p+r}} B^p &= B^p \sharp_{1-\frac{1+r}{p+r}} A^{-r} = B^p \sharp_{\frac{p-1}{p+r}} A^{-r} \\ &= B^p \sharp_{\frac{p-1}{p}} (B^p \sharp_{\frac{p}{p+r}} A^{-r}) \leq B^p \sharp_{\frac{p-1}{p}} I = I \sharp_{\frac{1}{p}} B^p = B. \end{aligned}$$

Moreover, since $A \geq B$ is assumed, we have the Furuta inequality (I).

5. Application. 最近、内山 [23] は Furuta 不等式の拡張を試み次のような結果を示している。

Uchiyama's result. *Let* A, B *and* C *be positive invertible operators. If* $A \leq B\ !_\lambda\ C$, *then for* $t \geq s \geq 0$ *and* $r \geq 0$

$$A^{\frac{r}{2}}(B^s \triangledown_\lambda C^s)A^{\frac{r}{2}} \leq \{A^{\frac{r}{2}}(B^t \triangledown_\lambda C^t)A^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{s+r}{t+r}}.$$

ここで $B\ !_\lambda\ C$ は harmonic mean、$B \triangledown_\lambda C$ は arithmetic operator mean [18] でありそれらは次のように与えられる。
$\lambda \in [0,1]$ に対して

$$B\ !_\lambda\ C = (\lambda B^{-1} + (1-\lambda)C^{-1})^{-1}$$

$$B \triangledown_\lambda C = \lambda B + (1-\lambda)C.$$

以下の結果は、古田との共同作業 [12] で得られたものである。しかしここでは [12] とは少し違った仕様で述べてみよう。まず次の事実を示しておく。

Theorem 4. *Let* $A,\ B,\ C > 0$. *If* $A \ll B\ !_\lambda\ C$, *then*

$$A^t \ll B^t \triangledown_\lambda C^t \quad (\text{or } A \ll (B^t \triangledown_\lambda C^t)^{\frac{1}{t}})$$

for all $t > 0$.

Proof. Since x^α is operator concave for $\alpha \in [0,1]$, we have

$$(*)\ \lambda S^\alpha + (1-\lambda)T^\alpha \leq (\lambda S + (1-\lambda)T)^\alpha \quad \text{for } \alpha \in [0,1] \text{ and } S,\ T \geq 0.$$

By using this fact, we can show the result as follows:
(i) In the case $t \geq 1$; $B\ !_\lambda\ C \leq B \triangledown_\lambda C \leq (B^t \triangledown_\lambda C^t)^{\frac{1}{t}}$ by (*).
(ii) In the case $1 \geq t > 0$;

$$(B\ !_\lambda\ C)^t = (B^{-1} \triangledown_\lambda C^{-1})^{-t} \leq (B^{-t} \triangledown_\lambda C^{-t})^{-1} = B^t !_\lambda C^t \leq B^t \ \triangledown_\lambda \ C^t$$

because the first inequality follows by (*) and the last inequality holds always. This implies $A^t \ll B^t \ \triangledown_\lambda \ C^t$, so that we have the result by (i) and (ii);

$$A^t \ll (B^t \triangledown_\lambda C^t) \ \ (\text{or } A^t \ll B^t \triangledown_\lambda C^t) \quad \text{for all } t > 0.$$

この事より先の Theorem 1 を用いることで次の結果を得ることが出来る。

Theorem 5. *Let $A,\ B,\ C > 0$.*
(I) *If $A^t \ll B^t \triangledown_\lambda C^t$ for all $t > 0$, then*

$$(B^s \triangledown_\lambda C^s) \leq A^{-r} \ \sharp_{\frac{s+r}{t+r}} \ (B^t \triangledown_\lambda C^t).$$

(II) *If $A^t \gg B^t\ !_\lambda\ C^t$ for all $t > 0$, then*

$$B^s\ !_\lambda\ C^s \geq A^{-r} \ \sharp_{\frac{s+r}{t+r}} \ (B^t\ !_\lambda\ C^t).$$

Proof. (I) We have only use Theorem 1 (3) and $(*)$ for $A \ll (B^t \triangledown_\lambda C^t)^{\frac{1}{t}}$.
(II) Replacing A by A^{-1}, B by B^{-1} and C by C^{-1} in (I),
$A^{-t} \ll B^{-t} \triangledown_\lambda C^{-t}$ is equivalent to $A^t \gg (B^{-t} \triangledown_\lambda C^{-t})^{-1} = B^t\ !_\lambda\ C^t$.

$\sharp_\alpha$ を用いない形で表せば次のようになる。

$$(\mathrm{I}') \qquad A^{\frac{r}{2}}(B^s \triangledown_\lambda C^s)A^{\frac{r}{2}} \leq \{A^{\frac{r}{2}}(B^t \triangledown_\lambda C^t)A^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{s+r}{t+r}},$$

$$(\mathrm{II}') \qquad A^{\frac{r}{2}}(B^s\ !_\lambda\ C^s)A^{\frac{r}{2}} \geq \{A^{\frac{r}{2}}(B^t\ !_\lambda\ C^t)A^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{s+r}{t+r}}.$$

更に内山の結果は $\{A^{\frac{r}{2}}(B^t \bigtriangledown_\lambda C^t)A^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{s+r}{t+r}}$ が作用素単調関数となっていることも示唆している。これは次のようにまとめることが出来る。

Theorem 6. *Let* $A,\ B,\ C > 0$ *and* $r,\ s,\ t \geq 0$ *such that* $t \geq s$ *and* $(r,t) \neq (0,0)$. *Then the following (I) and (II) hold and each follows from each other.*
(I) *If* $A^t \ll B^t \bigtriangledown_\lambda C^t$ *for all* $t > 0$, *then*

$$f(t) = \{A^{\frac{r}{2}}(B^t \bigtriangledown_\lambda C^t)A^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{s+r}{t+r}}$$

is increasing of t.
(II) *If* $A^t \gg B^t\ !_\lambda\ C^t$ *for all* $t > 0$, *then*

$$h(t) = \{A^{\frac{r}{2}}(B^t\ !_\lambda\ C^t)A^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{s+r}{t+r}}$$

is decreasing of t.

この証明は $A \ll (B^t \bigtriangledown_\lambda C^t)^{\frac{1}{t}}$ であることより次の Theorem C [7] から明らかとなる。

Theorem C. *Let* $A,\ B, > 0$. *Then the followings are equivalent.*

(i) $$A \ll B \ (\text{i.e.} \log A \leq \log B)$$

(ii) $g(t) = (A^{\frac{r}{2}}B^tA^{\frac{r}{2}})^{\frac{s+t}{t+r}}$ *is increasing of* $t(\geq s)$ *for fixed* $s,\ r \geq 0$.

References

[1] T.Ando, On some operator inequalities, Math. Ann., 279(1987), 157-159.
[2] M.Fujii, Furuta's inequality and its mean theoretic approach, J.Operator Theory, 23(1990), 67-72.
[3] J.I.Fujii and E.Kamei, Relative operator entropy in noncommutative information theory, Math. Japon., 35(1990), 387-396.
[4] M.Fujii and E.Kamei, Furuta's inequality for the chaotic order, Math. Japon., 36(1991), 603-606.
[5] M.Fujii and E.Kamei, Furuta's inequality for the chaotic order,II, Math. Japon., 36(1991), 717-722.

[6] M.Fujii and E.Kamei, Mean theoretic approach to the grand Furuta inequality, Proc. Amer. Math. Soc., 124(1996), 2751-2756.

[7] M.Fujii, T.Furuta and E.Kamei, Furuta's inequality and its application to Ando's theorem, Linear Algebra and its Appl., 179(1993), 161-169.

[8] T.Furuta, $A \geq B \geq 0$ assures $(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ for $r \geq 0, p \geq 0, q \geq 1$ with $(1+2r)q \geq p+2r$, Proc. Amer. Math. Soc., 101(1987), 85-88.

[9] T.Furuta, Elementary proof of an order preserving inequality, Proc. Japan Acad., 65(1989), 126.

[10] T.Furuta, Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log-majorization, Linear Algebra and Appl., 219(1995), 139-155.

[11] T.Furuta, Simple proof of the concavity of operator entropy $f(A) = -A \log A$, Math. Inequal. Appl., 3(2000), 305-306.

[12] T.Furuta, Results under $\log A \geq \log B$ can be derived from ones under $A \geq B \geq 0$ by Uchiyama's method, Math. Inequal. Appl., 3(2000), 423-436.

[13] T.Furuta and E.Kamei, An extension of Uchiyama's result associated with an order preserving operator inequality, preprint.

[14] E.Kamei, A satellite to Furuta's inequality, Math. Japon., 33(1988), 883-886.

[15] E.Kamei, Parametrization of the Furuta inequality, Math. Japon., 49(1999), 65-71.

[16] E.Kamei, Parametrization of the Furuta inequality, II, Math. Japon., 50(1999), 179-182.

[17] E.Kamei, Chaotic order and Furuta inequality, Sci. Math. Japon., to appear.

[18] E.Kamei and M.Nakamura, Remark on chaotic Furuta inequality, SCMJ, to appear.

[19] F.Kubo and T.Ando, Means of positive linear operators, Math. Ann., 246(1980), 205-224.

[20] M.Nakamura and H.Umegaki, A note on the entropy for operator algebras, Proc. Japan Acad., 37(1961), 149-154.

[21] J.v.Neumann, 量子力学の数学的基礎, みすず書房, (1957).

[22] K.Tanahashi, Best possibility of the Furuta inequality, Proc. Amer. Math. Soc., 124(1996), 141-146.

[23] M.Uchiyama, Some exponential operator inequalities, Math. Inequal. Appl., 2(1999), 469-471.

[24] M.Uchiyama, An operator inequality related to Jensen's inequality, preprint.

[25] H.Uhlmann, Relative entropy and the Wigner-Yanase-Dyson-Lieb concavity in interpolation theory, Commun. Math. Phys., 54(1977), 21-32.

[26] H.Umegaki, Conditional expectation in an operator algebra,III, Kodai Math. Sem. Rep., 11(1959), 51-64.

[27] H.Umegaki and M.Oya, 量子論的エントロピー, 共立出版, (1984).