数理解析研究所講究録
1189 巻 2001 年 31-37

バナッハ空間の直和と一様凸性について

新潟大学理学部　斎藤吉助 (Kichi-Suke Saito)
九州工業大学工学部　加藤幹雄　(Mikio Kato)

1. $\|\cdot\|$ を $\mathbb{C}^2$ 上の absolute normalized norm とする. すなわち,

(1) $$\|(x_1,x_2)\|=\|(|x_1|,|x_2|)\| \quad \forall(x_1,x_n)\in\mathbb{C}^2,$$

(2) $$\|(1,0)\|=\|(0,1)\|=1.$$

このとき

(3) $$\psi(t)=\|(1-t,t)\| \quad (0\leq t\leq 1)$$

とおくと, ψ は $[0,1]$ 上の連続な凸関数で

(4) $$\psi(0)=\psi(1)=1, \quad \max\{1-t,\, t\}\leq\psi(t)\leq 1$$

をみたす. 逆に (4) をみたす $[0,1]$ 上の任意の連続凸関数 ψ に対して

(5) $$\|(z,w)\|_\psi=\begin{cases}(|z|+|w|)\psi\left(\frac{|w|}{|z|+|w|}\right) & \text{if } (z,w)\neq(0,0),\\ 0 & \text{if } (z,w)=(0,0)\end{cases}$$

とすると, $\|\cdot\|_\psi$ は $\mathbb{C}^2$ 上の absolute normalized norm で (3) をみたす. すなわち対応 (3) によって $\mathbb{C}^2$ 上の absolute normalized norm 全体の集合 N_a と, (4) をみたす $[0,1]$ 上の連続な凸関数全体の集合 Ψ は 1 対 1 に対応する (Bonsall-Duncan [1]).

ℓ_p-norm $\|\cdot\|_p$ はその典型的な例であり, 次の凸関数がこれに対応する:

(6) $$\psi_p(t):=\|(1-t,t)\|_p=\begin{cases}\{(1-t)^p+t^p\}^{1/p} & \text{if } 1\leq p<\infty,\\ \max\{1-t,\, t\} & \text{if } p=\infty.\end{cases}$$

また, 一般に

$$\|\cdot\|_\infty\leq\|\cdot\|\leq\|\cdot\|_1 \qquad \forall\|\cdot\|\in N_a$$

が成り立つ ([1]).

$\psi\in\Psi$ とする. Banach 空間 X, Y に対して

(7) $$\|(x,y)\|_\psi=\|(\|x\|,\|y\|)\|_\psi \text{ for } (x,y)\in X\oplus Y$$

とすると $X \oplus Y$ は $\|\cdot\|_\psi$ に関して Banach 空間になる. これを $X \oplus_\psi Y$ と書き X, Y の ψ **直和**という. 最近, [7] において $X \oplus_\psi Y$ の strictly convexity が特徴づけられた. ここでは $X \oplus_\psi Y$ の uniform convexity を考察する ([4]).

2. X を Banach 空間とする.

$$\|x\| = \|y\| = 1,\ x \neq y \Longrightarrow \|\frac{x+y}{2}\| < 1$$

であるとき X は *strictly convex* であるという. 任意の $\epsilon > 0$ に対して δ $(0 < \delta < 1)$ が存在して

$$\|x - y\| \geq \epsilon, \|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1 \Longrightarrow \|\frac{x+y}{2}\| < 1 - \delta$$

であるとき, X は *uniformly convex* であるという. $[0,1]$ 上の関数 ψ が

$$s,\ t \in [0,1],\ \ s \neq t,\ \ 0 < c < 1 \Longrightarrow \psi((1-c)s + ct) < (1-c)\psi(s) + c\psi(t)$$

をみたすとき, ψ は *strictly convex* であるという.

Absolute norm $\|\cdot\| \in N_a$ の単調性に関して

$$|z| \leq |u| \ and \ |w| \leq |v| \Rightarrow \|(z,w)\| \leq \|(u,v)\|$$

および

$$|z| < |u| \ and \ |w| < |v| \Rightarrow \|(z,w)\| < \|(u,v)\|$$

はつねに成り立つ ([1]). 次の結果は以下の議論で本質的である.

3. 命題 ([7]) $\psi \in \Psi$ とする. 以下同値.

(i) $|z| \leq |u|$ and $|w| < |v|$, または $|z| < |u|$ and $|w| \leq |v|$ $\Rightarrow$ $\|(z,w)\|_\psi < \|(u,v)\|_\psi$.

(ii) $\psi(t) > \psi_\infty(t) = \max\{1-t,\ t\}$ for $\forall\, t \in (0,1)$.

(iii) $\psi(t)/t$ は $(0,1]$ で strictly decreasing, かつ $\psi(t)/(1-t)$ は $[0,1)$ で strictly increasing.

とくに, ψ が strictly convex ならば (i)-(iii) は成り立つ.

4. 定理 ([7]) X, Y を Banach 空間, $\psi \in \Psi$ とする. 以下同値.

(i) $X \oplus_\psi Y$ は strictly convex.

(ii) X, Y は strictly convex, かつ ψ は strictly convex.

5. 定理 ([4]) X, Y を Banach 空間, $\psi \in \Psi$ とする. 以下同値.
(i) $X \oplus_\psi Y$ は uniformly convex.
(ii) X, Y は uniformly convex かつ ψ は strictly convex.

証明の概略. (i) $\Rightarrow$ (ii). $X \oplus_\psi Y$ が uniformly convex であるとする. X, Y はそれぞれ $X \oplus_\psi Y$ に等距離的に埋め込まれるから, uniformly convex. また定理 4 より ψ は strictly convex.

(ii) $\Rightarrow$ (i). X, Y は uniformly convex, ψ は strictly convex であるとする. 任意の $\epsilon > 0$ をとると

$$\|x_1 - x_2\| \geq \frac{\epsilon}{2},\ \|x_1\| \leq 1,\ \|x_2\| \leq 1 \ \Rightarrow\ \|x_1 + x_2\| \leq 2(1 - \delta_X), \tag{8}$$

$$\|y_1 - y_2\| \geq \frac{\epsilon}{2},\ \|y_1\| \leq 1,\ \|y_2\| \leq 1 \ \Rightarrow\ \|y_1 + y_2\| \leq 2(1 - \delta_Y) \tag{9}$$

となる δ_X, δ_Y $(0 < \delta_X,\ \delta_Y < 1)$ が存在する. 今,

$$\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_\psi \geq \epsilon, \quad \|(x_1, y_1)\|_\psi = \|(x_2, y_2)\|_\psi = 1 \tag{10}$$

をみたす (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in X \oplus_\psi Y$ を任意にとる.

$$t := \frac{\|y_1 - y_2\|}{\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|} \tag{11}$$

とおくと

$$\|y_1 - y_2\| = \frac{t}{1-t}\|x_1 - x_2\|.$$

したがって

$$\begin{aligned}
\epsilon &\leq \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_\psi = (\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|)\psi(t) \\
&= \left(\|x_1 - x_2\| + \frac{t}{1-t}\|x_1 - x_2\|\right)\psi(t) \\
&= \frac{\psi(t)}{1-t}\|x_1 - x_2\|.
\end{aligned}$$

これより

$$\|x_1 - x_2\| \geq \frac{1-t}{\psi(t)}\epsilon, \tag{12}$$

$$\|y_1 - y_2\| \geq \frac{t}{\psi(t)}\epsilon.$$

次に

$$s_1 = \frac{\|y_1\|}{\|x_1\| + \|y_1\|}, \qquad s_2 = \frac{\|y_2\|}{\|x_2\| + \|y_2\|} \tag{13}$$

とおくと, $\|(x_1, y_1)\|_\psi = \|(x_2, y_2)\|_\psi = 1$ だから

$$\|x_1\| = \frac{1-s_1}{\psi(s_1)},\ \|x_2\| = \frac{1-s_2}{\psi(s_2)}, \tag{14}$$

$$\|y_1\| = \frac{s_1}{\psi(s_1)},\ \|y_2\| = \frac{s_2}{\psi(s_2)}.$$

ここで $s_1 \le s_2$ と仮定する (一般性を失わない). ψ は strictly convex だから, $\psi(s)/(1-s)$ は strictly increasing, また $\psi(s)/s$ は strictly decreasing (命題 3). したがって

$$\|x_1\| \ge \|x_2\|,\ \|y_1\| \le \|y_2\|. \tag{15}$$

Case 1: $0 \le t \le 1/2$ の場合. (12) から

$$\|x_1 - x_2\| \ge \frac{1-t}{\psi(t)}\epsilon \ge \frac{1-1/2}{\psi(1/2)}\epsilon > \frac{\epsilon}{2} \tag{16}$$

($\psi(1/2) < 1$ に注意). これより

$$(1-s_1)/\psi(s_1) = \|x_1\| > \frac{\epsilon}{4}$$

となる. (実際, $\|x_1\| \le \epsilon/4$ とすると, $\|x_2\| \le \|x_1\|$ だから $\epsilon/2 < \|x_1 - x_2\| \le \|x_1\| + \|x_2\| \le \epsilon/2$ となり矛盾が生じる.) 関数 $(1-s)/\psi(s)$ は strictly decreasing で $t = 1$ で 0 となるから, ある a $(0 < a < 1)$ に対して

$$\frac{1-a}{\psi(a)} = \frac{\epsilon}{4}$$

となる ($s_1 \le a$ に注意). $(1-s)/\psi(s)$ は $[0, \frac{a+1}{2}]$ で一様連続だから, ある ρ $(0 < \rho < \frac{1-a}{2})$ が存在して

$$s_2 - s_1 \le \rho,\ s_1 \in [0, a],\ s_2 \in [0, \frac{a+1}{2}]$$

ならば

$$\frac{1-s_1}{\psi(s_1)} - \frac{1-s_2}{\psi(s_2)} \le \frac{\delta_X}{2(1-\delta_X)} \cdot \frac{1-\frac{a+1}{2}}{\psi(\frac{a+1}{2})}$$

が成り立つ. このとき, とくに

$$\frac{1-s_1}{\psi(s_1)} - \frac{1-s_2}{\psi(s_2)} \le \frac{\delta_X}{2(1-\delta_X)} \cdot \frac{1-s_2}{\psi(s_2)}.$$

したがって

$$\frac{1-s_1}{\psi(s_1)} \le \frac{2-\delta_X}{2(1-\delta_X)} \cdot \frac{1-s_2}{\psi(s_2)},$$

すなわち

$$\|x_1\| \leq \frac{2-\delta_X}{2(1-\delta_X)}\|x_2\| \tag{17}$$

となる.

(a) $0 \leq s_2 - s_1 \leq \rho$の場合. (16) より, $\|x_1 - x_2\| > \epsilon/2$, また, $\|x_1\| = \|(x_1, 0)\|_\psi \leq \|(x_1, y_1)\|_\psi = 1$ だから

$$\left\|\frac{x_1}{\|x_1\|} - \frac{x_2}{\|x_1\|}\right\| = \frac{\|x_1 - x_2\|}{\|x_1\|} \geq \frac{\epsilon}{2}.$$

したがって (8) より

$$\left\|\frac{x_1}{\|x_1\|} + \frac{x_2}{\|x_1\|}\right\| < 2(1-\delta_X),$$

すなわち

$$\|x_1 + x_2\| \leq 2(1-\delta_X)\|x_1\|. \tag{18}$$

$s_2 \in [0, \frac{a+1}{2}]$ ($s_1 \in [0, a]$ に注意) であるから (18), (17), 命題 3 より

$$\begin{aligned}
\|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\|_\psi &= \|(\|x_1 + x_2\|,\ \|y_1 + y_2\|)\|_\psi \\
&\leq \|(2(1-\delta_X)\|x_1\|,\ \|y_1\| + \|y_2\|)\|_\psi \\
&\leq \|((2-\delta_X)\|x_2\|,\ 2\|y_2\|)\|_\psi \\
&< 2\|(\|x_2\|,\ \|y_2\|)\|_\psi = 2.
\end{aligned}$$

ここで

$$f(s_2) = \|((2-\delta_X)\|x_2\|,\ 2\|y_2\|)\|_\psi = \left\|\left((2-\delta_X)\frac{1-s_2}{\psi(s_2)},\ \frac{2s_2}{\psi(s_2)}\right)\right\|_\psi$$

とする. f は $[0, \frac{a+1}{2}]$ で連続で $0 < f(s_2) < 2$ だから,

$$M_1 := \max\{f(s_2) :\ 0 \leq s_2 \leq (a+1)/2\}$$

とおいて

$$\|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\|_\psi \leq M_1 < 2 \tag{19}$$

を得る.

(b) $s_2 - s_1 \geq \rho$ の場合.

$$\begin{aligned}
& \|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\|_\psi \\
= \ & \|(\|x_1 + x_2\|,\ \|y_1 + y_2\|)\|_\psi \\
\leq \ & \|(\|x_1\| + \|x_2\|,\ \|y_1\| + \|y_2\|)\|_\psi \\
= \ & \left\| \left(\frac{1 - s_1}{\psi(s_1)} + \frac{1 - s_2}{\psi(s_2)},\ \frac{s_1}{\psi(s_1)} + \frac{s_2}{\psi(s_2)} \right) \right\|_\psi \\
= \ & \frac{1}{\psi(s_1)\psi(s_2)} \|((1 - s_1)\psi(s_2) + (1 - s_2)\psi(s_1),\ s_1\psi(s_2) + s_2\psi(s_1))\|_\psi \\
= \ & \frac{1}{\psi(s_1)\psi(s_2)} (\psi(s_1) + \psi(s_2))\psi\left(\frac{s_1\psi(s_2) + s_2\psi(s_1)}{\psi(s_1) + \psi(s_2)} \right) \\
< \ & \frac{\psi(s_1) + \psi(s_2)}{\psi(s_1)\psi(s_2)} \left(\frac{\psi(s_2)}{\psi(s_1) + \psi(s_2)}\psi(s_1) + \frac{\psi(s_1)}{\psi(s_1) + \psi(s_2)}\psi(s_2) \right) = 2.
\end{aligned}$$

関数

$$g(s_1, s_2) := \frac{\psi(s_1) + \psi(s_2)}{\psi(s_1)\psi(s_2)} \psi\left(\frac{s_1\psi(s_2) + s_2\psi(s_1)}{\psi(s_1) + \psi(s_2)} \right)$$

は $\Omega = \{(s_1, s_2) :\ 0 \leq s_1 \leq a,\ 0 \leq s_2 \leq 1,\ \rho \leq s_2 - s_1 \leq 1\}$ で連続, ゆえに Ω で最大値 $M_2 < 2$ をもつ. したがって

$$\|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\|_\psi \leq M_2 < 2. \tag{20}$$

Case 2: $1/2 \leq t \leq 1$ の場合. Case 1 と同様の議論により, ある $M_3 < 2$ に対して

$$\|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\|_\psi \leq M_3 < 2 \tag{21}$$

となる (詳細は [4] 参照).

(19),(20),(21) から, $M := \max\{M_1, M_2, M_3\}$ ($(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ に関係しない) に対して

$$\|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\|_\psi \leq M < 2 \tag{22}$$

となり, 結論を得る.

6. 例 (i) $1 \leq q \leq p \leq \infty$. $\|\cdot\|_{p,q}$ を (Lorentz) $\ell_{p,q}$-norm とする:

$$\|(z,\ w)\|_{p,q} = \left\{ |z|^{*q} + 2^{(q/p)-1}|w|^{*q} \right\}^{1/q},$$

ここで, $\{|z|^*,\ |w|^*\}$ は $\{|z|,\ |w|\}$ の non-increasing rearrangement を表す ([8]). すなわち $|z|^* \geq |w|^*$. (注. $1 \leq p < q \leq \infty$ の場合, $\|\cdot\|_{p,q}$ は quasi-norm であるが

normにならない; cf. [2].) 明らかに $\|\cdot\|_{p,q} \in N_a$ で, 凸関数

$$\psi_{p,q}(t) = \begin{cases} \{(1-t)^q + 2^{q/p-1}t^q\}^{1/q} & \text{if } 0 \le t \le 1/2, \\ \{t^q + 2^{q/p-1}(1-t)^q\}^{1/q} & \text{if } 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

がこれに対応する. $X \oplus Y$ に norm

$$\|(x,y)\|_{p,q} = \|(\|x\|, \|y\|)\|_{p,q}$$

を入れる. これを X, Y の $\ell_{p,q}$ **直和**といい, $X \oplus_{p,q} Y$ で表す. $X \oplus_{p,q} Y$ は ℓ_p 直和 $X \oplus_p Y$ の概念の自然な拡張である. $X \oplus_{p,q} Y = X \oplus_{\psi_{p,q}} Y$ だから定理5より $p = q = 1, \infty$ でないとき,

$$X \oplus_{p,q} Y;\ \text{uniformly convex} \iff X,\ Y;\ \text{uniformly convex.}$$

(ii) (i) で $p = q$ とおいて次の良く知られた結果が得られる: $1 < p < \infty$ のとき

$$X \oplus_p Y;\ \text{uniformly convex} \iff X,\ Y;\ \text{uniformly convex.}$$

(iii) $1 \le p < q \le \infty$, $1 < \lambda < 2^{1/p-1/q}$ ($p \ne 1$ and $q \ne \infty$) とする.

$$\|\cdot\|_\lambda = \max\{\|\cdot\|_2,\ \lambda\|\cdot\|_1\} \quad (1/\sqrt{2} \le \lambda \le 1)$$

とすると, $\|\cdot\|_\lambda \in N_a$ で対応する凸関数は $\psi_\lambda = \max\{\psi_2,\ \lambda\psi_1\}$. このとき

$$X \oplus_{\psi_{p,q,\lambda}} Y;\ \text{uniformly convex} \iff X,\ Y \text{ are uniformly convex.}$$

参考文献

[1] F. F. Bonsall and J. Duncan, *Numerical Ranges II*, London Math. Soc. LNS No. 10, 1973.

[2] M. Kato, On Lorentz spaces $\ell_{p,q}(E)$, *Hiroshima Math. J.* **6** (1976), 73-93.

[3] M. Kato, K.-S. Saito and Y. Takahashi, *On absolute norms on* $\mathbb{C}^2$—the geometric aspect, RIMS Kokyuroku **1136** (2000), 133-138.

[4] K.-S. Saito and M. Kato, *Uniform Convexity of ψ-Direct Sums of Banach Spaces*, preprint.

[5] K.-S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, *Von Neumann-Jordan constant of absolute normalized norms on* $\mathbb{C}^2$, J. Math. Anal. Appl. **244** (2000), 515-532.

[6] K.-S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, *Absolute norms on* $\mathbb{C}^n$, to appear in J. Math. Anal. Appl.

[7] Y. Takahashi, M. Kato and K.-S. Saito, *Strict convexity of absolute norms on* $\mathbb{C}^2$ *and direct sums of Banach spaces*, to appear in J. Inequal. Appl.

[8] H. Triebel, *Intepolation Theory, Function spaces, Differential Operators*, North-Holland, 1978.