数理解析研究所講究録
1189 巻 2001 年 10-16

AN APPROACH TO KANTOROVICH INEQUALITY VIA SPECTRAL ORDER

大阪府立東豊中高等学校 松本明美 (Akemi Matsumoto)
大阪教育大学附属高等学校天王寺校舎 瀬尾祐貴 (Yuki Seo)
大阪教育大学 藤井正俊 (Masatoshi Fujii)

1. 第一の方法

ここでは、作用素はヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素を表す。ヒルベルト空間上の作用素に、いくつかの順序関係が導入されており、その順序関係や，不等式について多くの研究がなされてきている。まず，最もよく知られている通常の順序について述べる。作用素 A が 正であるとは、$(Ax,x)\geq 0$ $(A\geq 0)$ がすべての $x\in H$ について成り立つことである。自己共役作用素 A と B について通常の順序は $A-B\geq 0$ で定義されている。さてとても良く知られている不等式に Löwner-Heinz 不等式がある :

$$A\geq B\geq 0 \text{ ならば、全ての } 1\geq p\geq 0 \text{ について } A^p\geq B^p$$

この不等式は次の意味で best possible である。

<事実>

任意の $p>1$ について $A\geq B$ ではあるが、$A^p\not\geq B^p$ となる、正作用素 A,B が存在する。

ところで、これをカバーする最も有力な方法として古田不等式 [3] がある :

Theorem F (Furuta inequality)
If $A\geq B\geq 0$, then for each $r\geq 0$,

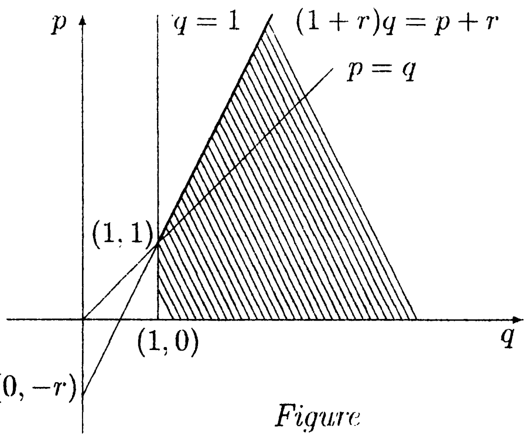
(i) $\left(B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{q}}\geq\left(B^{\frac{r}{2}}B^pB^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{q}}$

and

(ii) $\left(A^{\frac{r}{2}}A^pA^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{q}}\geq\left(A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{q}}$

hold for $p\geq 0$ and $q\geq 1$ with

$$(1+r)q\geq p+r.$$



Figure

この領域は棚橋 [9] によって best possible であることが示されている。

2. 第二の方法

また、<**事実**> をカバーするもう一つの方法として、これも古田 [6] によるのだが、次に挙げる Kantorovich 型定理がある：

Theorem A. *If $A \geq B > 0$ and $M \geq A \geq m > 0$ for $M > m$, then*

$$K_+(m, M, p)A^p \geq B^p$$

holds for $p \geq 1$ where $K_+(m, M, p)$ is called the Ky Fan-Furuta constant:

$$K_+(m, M, p) = \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p} \frac{(M^p - m^p)^p}{(M-m)(mM^p - m^pM)^{p-1}}.$$

Löwner-Heinz の与えた順序関係を指数 p が、1 より大きいときに、どのように工夫すれば <**事実**> がカバーできるかについて 2 つの方法を紹介した。さらに、通常の順序より弱い chaotic order で、まず最初にこれら 2 つの融合型によるカバーの方法が考られた。ただし、chaotic order とは、正作用素 A, B が、$\log A \geq \log B$ を満たすとき A, B に chaotic order がつくといい、 $A \gg B$ と表す。この融合型が次の定理 B で、橋本-山崎 [7] によって示された。

Theorem B. *Let A and B be positive invertible operators satisfying $M \geq A \geq m > 0$. Then the following statements are equivalent:*

(i) $A \gg B$

(ii) *For each $n \in N$, $\alpha \in [0, 1]$, $p \geq 0$ and $u \geq 0$*

$$K_+(m^{\frac{(p+\alpha u)s-\alpha u}{n}}, M^{\frac{(p+\alpha u)s-\alpha u}{n}}, n+1)A^{(p+\alpha u)s} \geq (A^{\frac{\alpha u}{2}} B^p A^{\frac{\alpha u}{2}})^s$$

holds for $s \geq 1$ and $(p + \alpha u)s \geq (n + \alpha)u$.

続いて、定理 B の通常の順序に関するものが、 藤井-亀井-瀬尾 [2] により次の形で示された：

Theorem C. *Let A and B be positive invertible operators satisfying $M \geq A \geq m > 0$. Then the following statements are equivalent:*

(i) $A \geq B$

(ii) *For each $n \in N$, $\alpha \in [0, 1]$, $p \geq 1$ and $u \geq 0$*

$$K_+(m^{\frac{(p-1+(u+1)\alpha)s-(u+1)\alpha}{n}}, M^{\frac{(p-1+(u+1)\alpha)s-(u+1)\alpha}{n}}, n+1)A^{(p-1+(u+1)\alpha)s}$$
$$\geq (A^{\frac{(u+1)\alpha-1}{2}} B^p A^{\frac{(u+1)\alpha-1}{2}})^s$$

holds for $s \geq 1$ and $(p - 1 + (u + 1)\alpha)s \geq (u + 1)(n + \alpha)$.

定理 B と C では、<**事実**> をカバーするために、A^p と B^p の両側から A の累乗をかけていることと、実係数として K_+ がかかっていることから、それらを融合型と呼んだ。

3. 第三の方法

そこで、今回の我々は、<**事実**>をカバーするために、スペクトル型順序を用いることにした。正作用素 A, B について、スペクトル分解したときのスペクトル射影をそれぞれ E_λ, F_λ とする、即ち、

$$A = \int \lambda\, dE_\lambda \qquad \text{and} \qquad B = \int \lambda\, dF_\lambda$$

とするときに、すべての λ について $E_\lambda \leq F_\lambda$ を満たすなら、A と B はスペクトル型順序を持つといい、$A \succ B$ と表す。

スペクトル型順序の特徴づけとして Olson[8] が示しているのだが <**事実**> を極めて簡単にカバーする同値関係が成立している：

Theorem D. *Let A and B be positive operators. Then the following statements are equivalent:*

(i) $A \succ B$

(ii) $A^p \geq B^p$ *for all* $p > 0$.

そこで，我々は、$A \succ B$ の下で，定理BとCを見直してみたい：

Theorem . *Let A and B be positive invertible operators satisfying $M \geq A \geq m > 0$. Then the following statements are equivalent:*

(i) $A \succeq B$

(ii) *For each* $n \in N$, $\alpha \in [0,1]$, $p \geq v \geq 0$ *and* $u \geq 0$

$$K_+(m^{\frac{(p-v+(u+v)\alpha)s-(u+v)\alpha}{n}}, M^{\frac{(p-v+(u+v)\alpha)s-(u+v)\alpha}{n}}, n+1)A^{(p-v+(u+v)\alpha)s}$$
$$\geq (A^{\frac{(u+v)\alpha-v}{2}} B^p A^{\frac{(u+v)\alpha-v}{2}})^s$$

holds for $s \geq 1$ *and* $(p-v+(u+v)\alpha)s \geq (u+v)(n+\alpha)$.

次の補題は、古田不等式の形そのものであるが、Olson によるスペクトル型順序の特徴付け (定理D) のみによって示される。

Lemma . *Let A and B be positive operators. Then the following statements are equivalent:*

(i) $A \succeq B$

(ii) *For each* $v \geq 0$, $A^{u+v} \geq (A^{\frac{u}{2}} B^p A^{\frac{u}{2}})^{\frac{u+v}{p+u}}$ *for* $u \geq 0$ *and* $p \geq v$.

Remark . 先の定理は、次の意味で定理 B,C を含んでいると考えられる。定理の (ii) に $v = 0$ と、$v = 1$ をそれぞれ代入すると、定理 B 及び C の (ii) が得られる。それらに対応して補題の (ii) にも $v = 0, 1$ を代入すると、$v = 0$ のとき、(ii) の式は $A \gg B$ と同値 ([1],[4]) となり，$v = 1$ のとき、(ii) の式は $A \geq B$ と同値 (定理F) となる。

Proof of Lemma . (i) $\Longrightarrow$ (ii). *For each $v \geq 0$, it follows from Theorem D that $A^{p+u} \geq A^{\frac{u}{2}}B^pA^{\frac{u}{2}}$ for $p \geq v$ and $u \geq 0$.*
By raising each sides to the power $\frac{u+v}{p+u} \in [0,1]$, we have

$$A^{u+v} \geq (A^{\frac{u}{2}}B^pA^{\frac{u}{2}})^{\frac{u+v}{p+u}} \qquad \text{for } u \geq 0 \text{ and } p \geq v.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i). *For each $p \geq 0$, put $v = p$ and $u = 0$.*

定理の証明には、この補題、グランド古田不等式 [5] 及び、定理Aを用いる。そこでグランド古田不等式を紹介しておく。

Theorem G (Grand Furuta inequality) . *If $A \geq B \geq 0$ and A is invertible, then for each $t \in [0,1]$,*

$$A^{\frac{(p-t)s+r}{q}} \geq (A^{\frac{r}{2}}(A^{-\frac{t}{2}}B^pA^{-\frac{t}{2}})^sA^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

holds for any $s \geq 0$, $p \geq 0$, $q \geq 1$ and $r \geq t$ with $(s-1)(p-1) \geq 0$ and $(1-t+r)q \geq (p-t)s+r$.

では定理の証明にはいるが、特に後半は、定理Cと同様である。

Proof of Theorem . (i) $\Longrightarrow$ (ii). *For each $u > 0$ and $p \geq v \geq 0$, put $A_1 = A^{u+v}$ and $B_1 = (A^{\frac{u}{2}}B^pA^{\frac{u}{2}})^{\frac{u+v}{p+u}}$. Then we have $A_1 \geq B_1 \geq 0$ by Lemma. Thus Theorem G implies that for each $t \in [0,1]$,*

$$A_1^{\frac{(p_1-t)s+r}{q}} \geq (A_1^{\frac{r}{2}}(A_1^{-\frac{t}{2}}B_1^{p_1}A_1^{-\frac{t}{2}})^sA_1^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \tag{1}$$

holds for any $s \geq 1$, $p_1 \geq 1$, $q \geq 1$ and $r \geq 0$ satisfying the following conditions;

$$r \geq t, \tag{2}$$

$$(1-t+r)q \geq (p_1-t)s+r. \tag{3}$$

Put $p_1 = \frac{p+u}{u+v} \geq 1$, $q = n+1$, $\alpha = 1-t$ and also $r = \frac{(p-v+(u+v)\alpha)s}{n(u+v)} - \frac{n+1}{n}\alpha$.
Then (3) is satisfied and (2) is equivalent to the following

$$(p-v+(u+v)\alpha)s \geq (u+v)(n+\alpha). \tag{4}$$

Therefore (1) implies that for each $\alpha \in [0,1]$, $u > 0$ and $p \geq v \geq 0$

$$A^{\frac{(p-v+(u+v)\alpha)s-(u+v)\alpha}{n}}$$
$$\geq \ (A^{\frac{(p-v+(u+v)\alpha)s-(n+1)(u+v)\alpha}{2n}}(A^{\frac{(u+v)\alpha-v}{2}}B^pA^{\frac{(u+v)\alpha-v}{2}})^sA^{\frac{(p-v+(u+v)\alpha)s-(n+1)(u+v)\alpha}{2n}})^{\frac{1}{n+1}}$$

holds for $s \geq 1$, $p \geq v$ *with* (4). *By raising each side to the power* $n+1$, *it follows from Theorem* A *that*

$$\begin{aligned} &K_+(m^{\frac{(p-v+(u+v)\alpha)s-(u+v)\alpha}{n}}, M^{\frac{(p-v+(u+v)\alpha)s-(u+v)\alpha}{n}}, n+1)(A^{\frac{(p-v+(u+v)\alpha)s-(u+v)\alpha}{n}})^{n+1} \\ \geq\ & A^{\frac{(p-v+(u+v)\alpha)s-(n+1)(u+v)\alpha}{2n}}(A^{\frac{(u+v)\alpha-v}{2}}B^pA^{\frac{(u+v)\alpha-v}{2}})^sA^{\frac{(p-v+(u+v)\alpha)s-(n+1)(u+v)\alpha}{2n}}. \end{aligned}$$

By rearranging it, we have

$$\begin{aligned} &K_+(m^{\frac{(p-v+(u+v)\alpha)s-(u+v)\alpha}{n}}, M^{\frac{(p-v+(u+v)\alpha)s-(u+v)\alpha}{n}}, n+1)A^{(p-v+(u+v)\alpha)s} \\ \geq\ & (A^{\frac{(u+v)\alpha-v}{2}}B^pA^{\frac{(u+v)\alpha-v}{2}})^s. \end{aligned}$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i). *Let* $v > 0$. *Put* $\alpha = 0$ *in* (ii) *and by raising each sides to the power* $\frac{1}{s}$, *it follows that*

$$K_+(m^{\frac{(p-v)s}{n}}, M^{\frac{(p-v)s}{n}}, n+1)^{\frac{1}{s}}A^{p-v} \geq A^{-\frac{v}{2}}B^pA^{-\frac{v}{2}}. \tag{5}$$

Moreover, since

$$K_+(m^{\frac{(p-v)s}{n}}, M^{\frac{(p-v)s}{n}}, n+1)^{\frac{1}{s}} \longrightarrow (\frac{M}{m})^{p-v} \qquad \textit{as } s \to \infty,$$

it follows from (5) *that*

$$(\frac{M}{m})^{p-v}A^p \geq B^p \qquad \textit{for } p \geq v. \tag{6}$$

Put $p = v$ *in* (6) *and then we have* $A^v \geq B^v$ *for all* $v > 0$, *i.e.*, $A \succ B$ *by Theorem* D.

4. 奈落

最後に定理の証明で使った補題について再考する。補題は、v に 0, 1 を代入するという意味で，通常の順序、chaotic order 及び、スペクトル型順序を包含していると考えられる。そこで、この古田不等式の形を利用してもう少しこの方向の話を拡張してみよう。

正作用素 A と B 及び、非負の実数 α, β に対して

$$A^{\alpha r+\beta} \geq (A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{\alpha r+\beta}{p+r}} \tag{7}$$

ただし、$p, r \geq 0$ で次の条件を満たす。

$\alpha \geq 1$ のとき、 $p \geq \beta + (\alpha - 1)r$

$1 \geq \alpha \geq 0$ のとき、 $p \geq \beta$

このことを便宜的に 次の式で表す。

$$A \geq_{(\alpha,\beta)} B$$

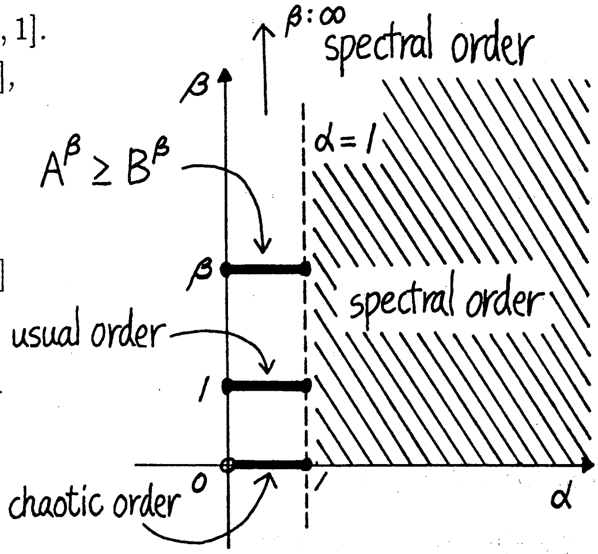
すると、$A \geq_{(1,0)} B$ は、まさに chaotic order $A \gg B$ となり ([1],[4])、$A \geq_{(1,1)} B$ は、通常の順序 $A \geq B$ となる (定理 F)。また補題は任意の $\beta > 0$ に対して $A \geq_{(1,\beta)} B$ であることは、スペクトル型順序 $A \succ B$ と同値であることを示しているに他ならない。

この事についてもう少し考察してみよう。

Proposition . *For A, $B > 0$, the following statements hold:*
(i) *If $A \gg B$, then $A \geq_{(\alpha,0)} B$ for all $\alpha \in (0, 1]$.*
Conversely, if $A \geq_{(\alpha,0)} B$ for some $\alpha \in (0, 1]$, then $A \gg B$.

(ii) *If $A^\beta \geq B^\beta$ for a fixed $\beta > 0$, then $A \geq_{(\alpha,\beta)} B$ for all $\alpha \in [0, 1]$.*
Conversely, if $A \geq_{(\alpha,\beta)} B$ for some $\alpha \in [0, 1]$ and $\beta > 0$, then $A^\beta \geq B^\beta$.

(iii) *If $A \succ B$, then $A \geq_{(\alpha,\beta)} B$ for all $\alpha > 1$ and $\beta \geq 0$.*
Conversely, if $A \geq_{(\alpha,\beta)} B$ for some $\alpha > 1$ and $\beta \geq 0$, then $A \succ B$.



Proof . (i) *If $A \gg B$ for A, $B > 0$, it follows from [1] and [4] that*

$$A^r \geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}} \qquad \text{for all } p \geq 0 \text{ and } r \geq 0.$$

Since $\alpha \in (0, 1]$, it follows from Löwner-Heinz theorem that

$$A^{\alpha r} \geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{\alpha r}{p+r}}.$$

Therefore we have $A \geq_{(\alpha,0)} B$.

Conversely, suppose that $A \geq_{(\alpha,0)} B$ for each $\alpha \in (0, 1]$. Taking the logalithm in both sides, we have

$$\alpha r \log A \geq \alpha r \log (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{p+r}} \qquad \text{for all } p > 0 \text{ and } r > 0.$$

That is,

$$\log A \geq \log (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{p+r}} \qquad \text{for all } p > 0 \text{ and } r > 0.$$

Moreover, we have

$$\log A \geq \log (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{p+r}} \to \log (B^p)^{\frac{1}{p}} = \log B \qquad \text{as } r \to 0,$$

which implies that $A \gg B$.

(ii) *If $A^\beta \geq B^\beta$ for a given $\beta > 0$, then Theorem* F *says that for each $r_1 \geq 0$*

$$(A^{\beta\frac{r_1}{2}} A^{\beta p_1} A^{\beta\frac{r_1}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (A^{\beta\frac{r_1}{2}} B^{\beta p_1} A^{\beta\frac{r_1}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

holds for $p_1 \geq 0$ and $q \geq 1$ with $(1 + r_1)q \geq p_1 + r_1$. For each $\alpha \in [0, 1]$, $p \geq \beta$ and $r \geq 0$, put $p_1 = \dfrac{p}{\beta}$, $r_1 = \dfrac{r}{\beta}$ and $q = \dfrac{p+r}{\alpha r + \beta}$. Since they satisfy $r_1 \geq 0$, $p_1 \geq 0$, $q \geq 1$ with

$(1+r_1)q \geq p_1 + r_1$, *we have*

$$A^{\alpha r+\beta} \geq (A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{\alpha r+\beta}{p+r}}.$$

The converse is shown by putting $r=0$ *in* (7).

(iii) *Suppose that* $A \succ B$. *Then Theorem* D *ensures that*

$$A^{p+r} \geq A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}} \ for\, p,\ r \geq 0.$$

For each $\alpha > 1$, $\beta \geq 0$ *and* $r > 0$, *if* $p \geq \beta + (\alpha-1)r$, *then* $\dfrac{\alpha r+\beta}{p+r} \in [0,1]$ *and so we have* (7), *i.e.*, $A \geq_{(\alpha,\beta)} B$.

Conversely, suppose that $A \geq_{(\alpha,\beta)} B$ *for some* $\alpha > 1$ *and* $\beta \geq 0$. *For a fixed* $p > 0$, *we put* $r = \dfrac{p-\beta}{\alpha-1}$. *Then* $\dfrac{\alpha r+\beta}{p+r} = 1$ *and so*

$$A^{\alpha r+\beta} \geq A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}}.$$

Since $\alpha r + \beta = p + r$, *it means that* $A^p \geq B^p$, *i.e.*, $A \succ B$.

この命題の $\alpha\beta$ 平面を眺めてみる。$\beta = 0$ $(1 \geq \alpha > 0)$ の線分上にのって β 軸正方向を眺めるとなだらかに、通常の順序を通り、スペクトル型順序へ向かって登っているように見える。一方、α 軸正方向を眺めると、直線 $\alpha = 1$ の天を突く高い崖が、立ちはだかり、崖の上にスペクトル型順序の高原があるように思える。

これを逆の方向から眺めると、スペクトル型順序の湖から水は、$A^\beta \geq B^\beta$ 型順序の 水路へ β 無限遠から緩やかに流れ込む一方、$\alpha = 1$ の崖から、一挙に、$A^\beta \geq B^\beta$ 型順序の水路に流れ落ちている。その水は、湖から見ると $\beta = 0$ $(1 \geq \alpha > 0)$ の chaotic order の奈落に沈んでゆくように思われる。

REFERENCES

[1] M.Fujii, T.Furuta and E.Kamei, *Furuta's inequality and its application to Ando's theorem*, Linear Alg. and Its Appl., **179**(1993), 161–169.

[2] M.Fujii, E.Kamei and Y.Seo, *Kantorovich type operator inequalities via grand Furuta inequality*, Sci. Math., **3**(2000), 263–272.

[3] T.Furuta, $A \geq B \geq 0$ *assures* $(B^rA^pB^r)^{\frac{1}{q}} \geq B^{\frac{(p+2r)}{q}}$ *for* $r \geq 0$, $p \geq 0$, $q \geq 1$ *with* $(1+2r)q \geq p+2r$, Proc. Amer. Math. Soc., **101**(1987), 85–88.

[4] T.Furuta, *Applications of order prserving operator inequalities*, Operator Theorey: Advances and Applications., **59**(1992), 180–190.

[5] T.Furuta, *Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log-majorization*, Linear Alg. and Its Appl., **219**(1995), 139–155.

[6] T.Furuta, *Operator inequalities associated with Holder-McCarthy and Kantorovich inequality*, J.Inequality Appl., **2**(1998), 137–148.

[7] M.Hashimoto and T.Yamazaki, *Further extensions of characterizations of chaotic order associated with Kantorovich type inequalities*, Sci. Math., **3**(2000),127–136.

[8] M.P.Olson, *The selfadjoint operators of a von Neumann algebra from a conditionally complete lattice*, Proc. Amer. Math. Soc., **28**(1971), 537–544.

[9] K.Tanahashi, *Best possibility of the Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **124**(1996), 141–146.