数理解析研究所講究録
1190 巻 2001 年 153-181

一般バーマ加群上のカペリ恒等式の類似物

和地輝仁 (WACHI, Akihito)
北海道大学理学研究科数学専攻 (Department of Mathematics, Hokkaido University)

Abstract.
これまでに Hermite 対称型の設定で, Capelli 恒等式の類似物をスカラー型一般バーマ加群の上で構成することができている. 元の Capelli 恒等式には小行列式が現れる一般化があるが, この論説では一般バーマ加群上の類似物を小行列式があらわれるような恒等式へ一般化する. 得られた類似物には元の Capelli 恒等式の一般化とは異なり, 首座ではない小行列式も現れる.

1. Introduction

19 世紀から知られる Capelli 恒等式 ([2]):

$$\det[x_{ij}]_{1\le i,j\le n}\det\left[\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right]_{1\le i,j\le n}=\det\left[\sum_{k=1}^{n}x_{ki}\frac{\partial}{\partial x_{kj}}+(n-j)\delta_{ij}\right]_{1\le i,j\le n},$$

はもちろんであるが, その小行列版といえる一般化: $1\le d\le n$ に対して,

$$\sum_{I,J}\det[x_{ij}]_{i\in I,j\in J}\det\left[\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right]_{i\in I,j\in J}=\sum_{I}\det\left[\sum_{k=1}^{n}x_{ki}\frac{\partial}{\partial x_{kj}}+(d-j)\delta_{ij}\right]_{i,j\in I},$$

(ここで I, J は $I,J\subset\{1,\ldots,n\}$, $\sharp I=\sharp J=d$ を動く.) も有名である. このような一般化を含めた Capelli 恒等式は [3] で扱われており, そこでは multiplicity-free action という枠組みで議論されている. 上の例では群 $L=GL(n,\mathbf{C})\times GL(n,\mathbf{C})$ がベクトル空間 $V=\mathrm{Mat}(n,\mathbf{C})$ に $(g,h).X=gXh^{-1}$ によって作用し, L の $\mathbf{C}[V]$ への作用が multiplicity-free である. このような組 (L,V) 全てに対して [3] では Capelli 恒等式を議論している. この論説の目的はこのような Capelli 恒等式 (以下では non-twisted と形容する) のスカラー型一般バーマ加群の上での類似物 (以下では twisted と形容するが, [9] では Ψ_λ-analogue と呼んでいる) を構成することである.

Twisted な Capelli 恒等式を説明する前に, non-twisted な Capelli 恒等式のもつ意味について触れたい. 最も単純には可換環における行列式の積公式 $\det {}^tA\det B=\det {}^tAB$ の非可換版と見ることができる. 上の例では $(n-j)\delta_{ij}$ の部分が可換の場合との違いである. また, より表現論的には V 上の L-不変微分作用素 (上の例では左辺) を $\mathfrak{l}=\mathrm{Lie}(L)$ の包絡環の中心 $Z(\mathfrak{l})$ から来る微分作用素 (上の例では右辺) で書き表わす等式であると見ることが出来る. Capelli 恒等式 (non-twisted な小行列版) を考えるということは, 抽象的には $Z(\mathfrak{l})$ が V 上の L-不変多項式係数微分作用素のなす空間 D_V^L へ全射でうつっているかどうか考えることとも言える.

さて twisted な Capelli 恒等式の説明に移りたい. 単純リー群 G とその放物型部分群 P があったとき, P のレビ部分群 L が, P の巾単根基 N^+ のリー環 $\mathfrak{n}^+$ に Ad で作用するが,

これが上で見たような (L, V) になっている場合がある．つまり，L の $\mathfrak{n}^+$ 上の多項式環への作用が multiplicity-free となっている場合である．上の例では $G = GL(2n, \mathbf{C})$, P は G を $n \times n$ のブロックに縦横とも 2 分割したときのブロック上三角行列からなる G の放物型部分群, L はブロック対角行列からなる部分群, $V = \mathfrak{n}^+$ は G のリー環の右上ブロックの $\mathrm{Mat}(n, \mathbf{C})$ である．

ではどんな (G, P) の組に対して，$(L, \mathrm{Ad}, \mathfrak{n}^+)$ から導かれる $(L, \mathrm{Ad}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^+])$ が multiplicity-free になるかを考えてみる．一般に表現 (L', V) があったとき，多項式環への作用 $(L', \mathbf{C}[V])$ が multiplicity-free ならばもとの表現 (L', V) は概均質ベクトル空間であることが知られている．また (G, P) があったとき，P のレビ部分群 L の巾零根基 $\mathfrak{n}^+$ への作用 $(L, \mathrm{Ad}, \mathfrak{n}^+)$ が概均質ベクトル空間になるための必要十分条件は，$\mathfrak{n}^+$ が nonzero な可換リー代数となることである（このことを，組 (G, P) あるいは $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ が Hermite 対称型であると呼ぶ）．逆に，(G, P) が Hermite 対称型の時は $(L, \mathrm{Ad}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^+])$ が multiplicity-free であることも知られており，従って (G, P) に対して，$(L, \mathrm{Ad}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^+])$ が multiplicity-free になるための必要十分条件は，(G, P) が Hermite 対称型であることである．一般バーマ加群を考える以上 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ の組を扱うわけであるが，この論説ではこのような理由により Hermite 対称型の組 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ のみを扱う．

組 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ が Hermite 対称型のとき包含関係 $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{l}$ があるから，multiplicity-free action $(\mathfrak{l}, \mathrm{ad}, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^+])$ を $\mathfrak{g}$ の作用に拡げてみようと考えるのは自然である（群のレベルでも考えることができるが，この論説では一般バーマ加群を扱うのでリー環で考える）．まず元の non-twisted な状況での $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ への作用は，$\mathfrak{l}$ は ad で作用し，$\mathfrak{n}^- (\simeq (\mathfrak{n}^+)^*)$ は 1 次式の掛け算作用素として作用し，$\mathfrak{n}^+$ は，対称代数 $S(\mathfrak{n}^+)$ が $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ 上の定数係数微分作用素環と同型であるから，1 階の定数係数偏微分作用素として作用する．ところがこれらの作用をまとめても実は $\mathfrak{g}$ の作用にはなっていない．しかし $\mathfrak{l}$ 上と $\mathfrak{n}^-$ 上の作用を上のようにとると，$\mathfrak{g}$ が $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ に作用するための $\mathfrak{n}^+$ 上の作用も一意に決定されてしまう．実はこうして決定された $\mathfrak{g}$ の $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ 上の作用は一般バーマ加群と同型である．より詳しく言うと，$\mathfrak{l}$ には 1 次元の中心があるので $\mathfrak{l}$ の指標（それは $\mathfrak{p}$ の指標と $\mathfrak{p}$ から $\mathfrak{l}$ への制限で 1 対 1 に対応する）λ を用いて $\mathfrak{l}$ 上の作用を $\mathrm{ad} + \lambda$ととり，$\mathfrak{n}^-$ 上では掛け算作用素をとり，これを $\mathfrak{g}$ へ拡張した作用が，$\mathfrak{p}$ の指標 λ から誘導されるスカラー型一般バーマ加群 $(U(\mathfrak{g}), \Psi_\lambda, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^+])$ と同型である．このとき $\mathfrak{n}^+$ の作用は多項式係数の 2 階の微分作用素となっている．

この論説で構成したい twisted な Capelli 恒等式とは，$S(\mathfrak{n}^-)S(\mathfrak{n}^+)$ $(= U(\mathfrak{n}^-)U(\mathfrak{n}^+) \subset U(\mathfrak{g})$) の $\mathrm{Ad}(L)$-不変元を Ψ_λ でうつして得られる $D^L_{\mathfrak{n}^+}$ の元を，$\Psi_\lambda(Z(\mathfrak{l}))$ の元として表すような等式である．Non-twisted な Capelli 恒等式では $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+] \otimes S(\mathfrak{n}^+)$ $(\simeq S(\mathfrak{n}^-) \otimes S(\mathfrak{n}^+)$) の $\mathrm{Ad}(L)$-不変元を $\mathrm{ad}(Z(\mathfrak{l}))$ の元として表しているから，これに相当する類似物になっている．

2. Scalar generalized Verma module

この節ではスカラー型一般バーマ加群の実現を，ある多項式環上の表現として与える．$\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Delta, \Delta^+$ をそれぞれ，単純リー代数，そのカルタン部分代数，ルートシステム，正ルートの集合とする．$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ を単純ルート，$\varpi_1, \ldots, \varpi_n$ を基本ウェイトとする．$\mathfrak{p}, \mathfrak{l}, \mathfrak{n}^+$ をそれぞれ，$\mathfrak{g}$ の放物型部分代数で正のルート空間全てと $\mathfrak{h}$ を含むもの，$\mathfrak{p}$ のレビ部分代数で $\mathfrak{h}$ を含むもの，$\mathfrak{n}^+$ を巾零根基とする．Δ_L, Δ_N^+ をそれぞれ $\mathfrak{l}, \mathfrak{n}^+$ に現れるルートの集合とする．$\alpha \in \Delta$ に対して $\mathfrak{g}^\alpha$ を α-ルート空間とし，$\mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha \in \Delta_N^+} \mathfrak{g}^{-\alpha}$ とおく．この論説を通して，断わりのない限り $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ は Hermite 対称型とする．つまり $\mathfrak{n}^+$ は可換とする．

この設定では $\mathfrak{p}$ は極大放物型部分代数となり，従って Δ_L に属さないただひとつの単純ルート α_{i_0} が存在する．組 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ をしばしば $(\mathfrak{g}, i_0)$ とも書く．単純ルートの番号は常にブルバキに従う ([1])．$\mathfrak{g}$ 上の不変双 1 次形式 $\langle , \rangle$ を適当に固定する．

さて, Hermite 対称型の $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ と $\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{p}, \mathbf{C})$ に対して,

$$M(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} \mathbf{C}_\lambda,$$

と定める (λ から誘導されたスカラー型一般バーマ加群). ここで $\mathbf{C}_\lambda$ は λ の表現空間を表す. $\mathfrak{n}^-$ も $\mathfrak{n}^+$ も可換なので, ベクトル空間の同型 $M(\lambda) \simeq U(\mathfrak{n}^-) = S(\mathfrak{n}^-) \simeq \mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ がある (最後の同型は $\langle , \rangle$ で $\mathfrak{n}^-$ と $(\mathfrak{n}^+)^*$ を同一視することによる). この同型により表現 $(U(\mathfrak{g}), \Psi_\lambda, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^+])$ が得られる. 容易に次の補題が確認できる.

Lemma 2.1 (cf. [8]) $\{F_k\}$ を $\mathfrak{n}^-$ の基底とすると,

$$\begin{array}{llcll}
(1) & \Psi_\lambda(X) & = & X & (X \in \mathfrak{n}^-), \\
(2) & \Psi_\lambda(X) & = & \mathrm{ad}(X) + \lambda(X) & \\
 & & = & \displaystyle\sum_k [X, F_k] \frac{\partial}{\partial F_k} + \lambda(X) & (X \in \mathfrak{l}), \\
(3) & \Psi_\lambda(X) & = & \displaystyle\frac{1}{2} \sum_{k,l} [[X, F_k], F_l] \frac{\partial}{\partial F_k} \frac{\partial}{\partial F_l} + \sum_k \lambda([X, F_k]) \frac{\partial}{\partial F_k} & (X \in \mathfrak{n}^+).
\end{array}$$

(1) は掛け算作用素という意味である. □

次に $\{X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha | \alpha \in \Delta\} \cup \{H_i | i = 1, \ldots, n\}$ を $\mathfrak{g}$ の Chevalley basis とし固定する. ただし H_i は α_i の coroot である.

また, $P \in S(\mathfrak{n}^+)$ に対して

$$P(\partial) \exp\langle x, y \rangle = P(y) \exp\langle x, y \rangle \quad (x \in \mathfrak{n}^+, y \in \mathfrak{n}^-),$$

によって, $\mathfrak{n}^+$ 上の定数係数微分作用素 $P(\partial)$ を定める.

Definition 2.2 $D_{\mathfrak{n}^+}$ を $\mathfrak{n}^+$ 上の多項式係数微分作用素環とする.

(1) $U(\mathfrak{g})$ 上の anti-involution ${}^t\cdot$ を次で定める.

$$\begin{array}{ll}
{}^tX_\alpha = X_{-\alpha} & (\alpha \in \Delta), \\
{}^tH_i = H_i & (i \in \{1, \ldots, n\}).
\end{array}$$

ここで X_α や H_i は固定している Chevalley basis の元である.

(2) $D_{\mathfrak{n}^+}$ 上の anti-involution σ を次で定める.

$$\begin{array}{rcl}
\sigma(F_j) & = & F_j, \\
\sigma\left(\dfrac{\partial}{\partial F_j}\right) & = & -\dfrac{\partial}{\partial F_j}.
\end{array}$$

ここで, $\{F_j\}$ は $\mathfrak{n}^-$ の基底であり, また明らかに σ は基底の取り方によらない.

(3) $D_{\mathfrak{n}^+}$ 上の anti-involution τ を次で定める.

$$\begin{array}{rcll}
\tau(X_{-\alpha}) & = & X_\alpha(\partial), & \\
\tau(X_\alpha(\partial)) & = & X_{-\alpha} & (\alpha \in \Delta_N^+),
\end{array}$$

ここで $\{X_\alpha\}$ は Chevalley basis の一部分であり,

$$X_\alpha(\partial) = \langle X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle \frac{\partial}{\partial X_{-\alpha}} = \frac{2}{(\alpha, \alpha)} \frac{\partial}{\partial X_{-\alpha}},$$

にも注意する.

このとき次の補題が成立する.

Lemma 2.3 (cf. [9]) (1) $U(\mathfrak{g})$ 上の *anti-involution* ^{t} は $U(\mathfrak{l})$ の中心 $Z(\mathfrak{l})$ 上で恒等写像である.

(2) $D_{\mathfrak{n}^+}$ 上の *anti-involution* σ は次を満たす.

$$\sigma(\Psi_\lambda(u)) = \Psi_{-\lambda-2\rho}(s(u)) \quad (u \in U(\mathfrak{g})).$$

ここで s は $U(\mathfrak{g})$ 上の次で定める *anti-involution* である.

$$s(X) = \begin{cases} -X & (X \in \mathfrak{l}), \\ X & (X \in \mathfrak{n}^+ + \mathfrak{n}^-). \end{cases}$$

また $\rho \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{p}, \mathbf{C})$ は Δ_N^+ のルートの和の半分である.

(3) $D_{\mathfrak{n}^+}$ 上の *anti-involution* τ は次を満たす.

$$\tau(\Psi_\lambda(u)) = \Psi_\lambda({}^t u) \quad (u \in U(\mathfrak{l})).$$

(4) $D_{\mathfrak{n}^+}$ 上の *anti-involution* τ は $D_{\mathfrak{n}^+}$ の $\mathrm{Ad}(L)$-不変部分空間 $D_{\mathfrak{n}^+}^L$ 上で恒等写像である. □

3. Main theorems

この節では (A_{p+q-1}, p), $(\mathrm{B}_n, 1)$, (C_n, n), $(\mathrm{D}_n, 1)$, (D_n, n), あるいは [3] の記号ではそれぞれ $GL_p \otimes GL_q$, $O_{2n} \otimes GL_1$, S^2GL_n, $O_{2n-1} \otimes GL_1$, $\Lambda^2 GL_n$ の各場合に対して, $\mathfrak{g}$ の実現を一つ与え, Capelli 恒等式の $M(\lambda)$ 上での類似物 (Ψ_λ-analogue と呼ぶ) で小行列式 (あるいは低次の項) も現れるものを述べる. ただし (D_n, n) あるいは $\Lambda^2 GL_n$ では, 本来パフィアンを用いた恒等式となるはずであるが複雑となってしまうため, この論説ではパーマネントを用いた Turnbull 恒等式 ([6] において初めて言及された. この論説では [7] で明示的に与えられたものを指す.) に対応する Ψ_λ-analogue のみを与える. しかし, Turnbull 恒等式はカペリ恒等式とは異なり $D_{\mathfrak{n}^+}^L$ の生成系すべてを $Z(\mathfrak{l})$ の像で書き表しているわけではないため, Capelli 恒等式の完全な代替とはならないことに注意しておく. オイラー作用素に対応する Capelli 恒等式は Turnbull 恒等式に含まれている.

このほかに Hermitian 対称型の設定では $(\mathrm{E}_6, 1)$ あるいは $Spin_{10} \otimes GL_1$ において, [3] が Capelli 恒等式を与えているが, この論説ではその Ψ_λ-analogue は扱わない. $(\mathrm{E}_7, 7)$ あるいは $\mathrm{E}_6 \otimes GL_1$ では Capelli 恒等式がない ([3]), つまりある $\mathrm{Ad}(L)$-不変微分作用素を $\mathrm{ad}(U(\mathfrak{l}))$ の元として表すことはできないが, どの $\mathrm{Ad}(L)$-不変微分作用素も $\Psi_\lambda(U(\mathfrak{l}))$ の元として表すことができないというわけではないので, Capelli 恒等式の Ψ_λ-analogue があるかも知れない. しかしこれもこの論説では扱わない.

証明についてひとつ注意する. 概均質ベクトル空間 $(L, \mathrm{Ad}, \mathfrak{n}^+)$ が正則である場合, その既約相対不変式に対応する Capelli 恒等式の Ψ_λ-analogue （つまり真の小行列が現われないもの）は [9] でタイプによらない証明が与えられている. しかし [9] の結果を拡張したこの論説では, 証明は [5] のアイデアによるものでタイプに依存している.

3.1 (A_{p+q-1}, p) or $GL_p \otimes GL_q$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(p+q, \mathbf{C})$ とおく. $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の対角行列からなる集合とする. E_{ij} を行列単位とする. $\varepsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ $(i \in \{1, \dots, p+q\})$ を $\varepsilon_i(E_{jj}) = \delta_{ij}$ で定める. ルートシステムや Chevalley basis

(C. B.) などの情報を以下にまとめる. Π, Π_L はそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{l}$ の単純ルートの集合を表す.

$$
\begin{array}{lcl}
\Pi & = & \{\varepsilon_1-\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_{p+q-1}-\varepsilon_{p+q}\}, \\
\Delta^+ & = & \{\varepsilon_i-\varepsilon_j \mid 1\le i<j\le p+q\}, \\
E_{ij} & : & (\varepsilon_i-\varepsilon_j)\text{-root vector for } i\neq j, \\
\Pi_L & = & \Pi\setminus\{\varepsilon_p-\varepsilon_{p+1}\}, \\
\Delta_L^+ & = & \{\varepsilon_i-\varepsilon_j \mid 1\le i<j\le p\}\cup\{\varepsilon_i-\varepsilon_j \mid p+1\le i<j\le p+q\}, \\
\varpi_{i_0} & = & (q(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_r)-p(\varepsilon_{r+1}-\cdots-\varepsilon_{2r}))/(p+q), \\
2\rho & = & (p+q)\varpi_{i_0}, \\
\langle X,Y\rangle & = & \mathrm{Tr}(XY) \quad (X,Y\in\mathfrak{g}), \\
\text{C. B.} & : & \{E_{ij} \mid i\neq j\}\cup\{E_{ii}-E_{i+1,i+1} \mid 1\le i<p+q\}.
\end{array}
$$

部分代数 $\mathfrak{p}, \mathfrak{n}^+, \mathfrak{l}$ は次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{p} &= \left\{\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D\end{pmatrix}\in\mathfrak{g} \;\middle|\; A\in\mathfrak{gl}(p,\mathbf{C}), B\in\mathrm{Mat}(p,q;\mathbf{C}), D\in\mathfrak{gl}(q,\mathbf{C})\right\}, \\
\mathfrak{n}^+ &= \left\{\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0\end{pmatrix}\in\mathfrak{g} \;\middle|\; B\in\mathrm{Mat}(p,q;\mathbf{C})\right\}, \\
\mathfrak{l} &= \left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D\end{pmatrix}\in\mathfrak{g} \;\middle|\; A\in\mathfrak{gl}(p,\mathbf{C}), D\in\mathfrak{gl}(q,\mathbf{C})\right\}.
\end{aligned}
$$

Definition 2.2 における ^{t} により, ${}^tE_{ij}=E_{ji}$ である. $i\in\{1,\ldots,p\}, j\in\{1,\ldots,q\}$ に対して $x_{ij}=E_{p+j,i}$, $\partial_{ij}=\partial/\partial x_{ij}$ と定めると $\{x_{ij}\}$ は $\mathfrak{n}^+$ の座標系を与える. Lemma 2.1 を用いると容易に次の補題が得られる.

Lemma 3.1 (1) $\Psi_\lambda(E_{ij})=-\sum_{k=1}^{q}x_{jk}\partial_{ik}+\lambda(E_{ij}) \quad (1\le i,j\le p)$,

(2) $\Psi_\lambda(E_{p+i,p+j})=\sum_{k=1}^{p}x_{ki}\partial_{kj}+\lambda(E_{p+i,p+j}) \quad (1\le i,j\le q)$,

(3) $\Psi_\lambda(E_{i,p+j})=-\sum_{1\le k\le q,\ 1\le l\le p}x_{lk}\partial_{ik}\partial_{lj}+\lambda^0\partial_{ij} \quad (1\le i\le p,\ 1\le j\le q)$. □

$1\le d\le\min(p,q)$ の時, $I\subset\{1,\ldots,p\}$, $J\subset\{1,\ldots,q\}$, $\sharp I=\sharp J=d$ に対して,

$$f_{IJ}=\det[x_{I(s)J(t)}]_{1\le s,t\le d},$$

と定めると,

$${}^tf_{IJ}(\partial)=\det[\partial_{I(s)J(t)}]_{1\le s,t\le d},$$

である. ここで, $I(1),I(2),\ldots,I(d)$ は I の元を小さい順に並べたものである. 特に $p=q$ の場合は

$$f=\det[x_{ij}]_{1\le i,j\le p},$$

はウェイト $-2\varpi_{i_0}$ をもつ相対不変式となる.

Theorem 3.2 $1\le d\le\min(p,q)$, $H,I\subset\{1,\ldots,p\}$, $\sharp H=\sharp I=d$ に対し,

$$
\begin{array}{lcl}
u_{HI}^L & = & \det[-E_{H(s)I(t)}+(t-1)\delta_{H(s)I(t)}]_{1\le s,t\le d}, \\
u_{HI}^{LT} & = & \det[-E_{H(t)I(s)}+(d-t)\delta_{H(t)I(s)}]_{1\le s,t\le d}, \\
v_{HI}^L & = & \det[-E_{H(s)I(t)}+(q-d+t)\delta_{H(s)I(t)}]_{1\le s,t\le d}, \\
v_{HI}^{LT} & = & \det[-E_{H(t)I(s)}+(q-t+1)\delta_{H(t)I(s)}]_{1\le s,t\le d},
\end{array}
$$

とおくと

$$\sum_{IJ} f_{IJ}\,{}^t f_{IJ}(\partial) = \sum_{I} \mathrm{ad}(u^L_{II}), \tag{3.1}$$

$$\sum_{IJ} f_{IJ}\,{}^t f_{IJ}(\partial) = \sum_{I} \mathrm{ad}(u^{LT}_{II}), \tag{3.2}$$

$$\sum_{IJ} {}^t f_{IJ}(\partial) f_{IJ} = \sum_{I} \mathrm{ad}(v^L_{II}), \tag{3.3}$$

$$\sum_{IJ} {}^t f_{IJ}(\partial) f_{IJ} = \sum_{I} \mathrm{ad}(v^{LT}_{II}), \tag{3.4}$$

であり，さらに

$$\sum_{IJ} \Psi_\lambda(f_{IJ}\,{}^t f_{IJ}) = (-1)^d \sum_{HI} \Psi_{\frac{p+q}{q}\lambda+\frac{2p}{q}\rho}(u^L_{HI})\Psi_0(u^L_{IH}), \tag{3.5}$$

$$\sum_{IJ} \Psi_\lambda(f_{IJ}\,{}^t f_{IJ}) = (-1)^d \sum_{HI} \Psi_0(u^{LT}_{HI})\Psi_{\frac{p+q}{q}\lambda+\frac{2p}{q}\rho}(u^{LT}_{IH}), \tag{3.6}$$

$$\sum_{IJ} \Psi_\lambda({}^t f_{IJ} f_{IJ}) = (-1)^d \sum_{HI} \Psi_0(v^L_{HI})\Psi_{\frac{p+q}{q}\lambda+2\rho}(v^L_{IH}), \tag{3.7}$$

$$\sum_{IJ} \Psi_\lambda({}^t f_{IJ} f_{IJ}) = (-1)^d \sum_{HI} \Psi_{\frac{p+q}{q}\lambda+2\rho}(v^{LT}_{HI})\Psi_0(v^{LT}_{IH}). \tag{3.8}$$

上の等式の和において，H, I, J は $H, I \subset \{1,\dots,p\}$, $J \subset \{1,\dots,q\}$, $\sharp H = \sharp I = \sharp J = d$ の範囲を動く．また，(3.1) から (3.4) までは $f_{IJ} \in \mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ と考え，(3.5) から (3.8) までは $f_{IJ} \in S(\mathfrak{n}^-)$ と考える．

Remark 3.3 (1) Theorem 3.2 の例えば (3.5) において，$\Psi_{\frac{p+q}{q}\lambda+\frac{2p}{q}\rho}(u^L_{HI})$ と $\Psi_0(u^L_{IH})$ は交換すると等式は成立しない．(3.6), (3.7), (3.8) においても同様である．

(2) Non-twisted な Capelli 恒等式 (3.1) から (3.4) においては首座小行列式しか現れないが，Ψ_λ-analogue の (3.5) から (3.8) ではすべての $d\times d$ 小行列式が現れている．

まず行列式を外積代数を用いて表す方法を復習する．$\mathbf{C}^n$ の外積代数 $\bigwedge(\mathbf{C}^n)$ を作り，テンソル積 $\bigwedge(\mathbf{C}^n)\otimes_{\mathbf{C}} D^+_{\mathfrak{n}^+}$ に $(x\otimes u)\cdot(y\otimes v) = xy\otimes uv$ で環構造を入れる．$\bigwedge(\mathbf{C}^n)$ の元を書くときに $\wedge$ は省略する．$\mathbf{C}^n$ の基底 $a_1,\dots,a_n$ をとり，行列 $[A_{ij}] \in \mathrm{Mat}(n,m;D_{\mathfrak{n}^+})$ に対して，$\eta_j \in \bigwedge(\mathbf{C}^n)\otimes_{\mathbf{C}} D_{\mathfrak{n}^+}$ を

$$(\eta_1,\dots,\eta_m) = (a_1,\dots,a_n)[A_{ij}]_{1\le i\le n, 1\le j\le m},$$

で定めたとする．特に各 a_j は $D_{\mathfrak{n}^+}$ と可換であり，$a_j a_k = -a_k a_j$ を満たすから，$\eta_i\eta_j = -\eta_j\eta_i$ であることに注意する．このとき，$J \subset \{1,\dots,m\}$, $\sharp J = d$ に対して，

$$\begin{aligned}
\eta_{J(1)}\cdots\eta_{J(d)} &= a_{i_1}A_{i_1 J(1)}\cdots a_{i_d}A_{i_d J(d)} \\
&= \sum_{1\le i_1,\dots,i_d\le n} a_{i_1}\cdots a_{i_d}A_{i_1 J(1)}\cdots A_{i_d J(d)} \\
&= \sum_{I\subset\{1,\dots,n\},\sharp I=d,\sigma\in\mathfrak{S}_d} a_{I(\sigma(1))}\cdots a_{I(\sigma(d))}A_{I(\sigma(1))J(1)}\cdots A_{I(\sigma(d))J(d)} \\
&= \sum_I a_{I(1)}\cdots a_{I(d)}\sum_\sigma \varepsilon(\sigma)A_{I(\sigma(1))J(1)}\cdots A_{I(\sigma(d))J(d)} \\
&= \sum_I a_{I(1)}\cdots a_{I(d)}\det[A_{I(s)J(t)}]_{1\le s,t\le d},
\end{aligned} \tag{3.9}$$

と行列式が計算できる.

定理の証明の前に補題をふたつ証明する.

Lemma 3.4 $H, I \subset \{1,\ldots,p\}$, $\sharp H = \sharp I = d$ の時,

$$\begin{aligned}(1)\ \sum_J f_{IJ}\,{}^t f_{HJ}(\partial) &= \mathrm{ad}(\det[-E_{H(t)I(s)} + (d-t)\delta_{H(t)I(s)}]_{1\le s,t\le d})\\ (2)\ \sum_J {}^t f_{HJ}(\partial) f_{IJ} &= \mathrm{ad}(\det[-E_{H(t)I(s)} + (q-t+1)\delta_{H(t)I(s)}]_{1\le s,t\le d}).\end{aligned}$$

ただし上の和において J は $J \subset \{1,\ldots,q\}$, $\sharp J = d$ を動く. $H = I$ として I で和をとったものが *non-twisted* な *Capelli* 恒等式である.

Proof. [(1) の証明]
まず,

$$(\eta_1,\ldots,\eta_q) = (a_1,\ldots,a_p)[x_{ij}]_{1\le i\le p, 1\le j\le q},$$

とおくと $J \subset \{1,\ldots,q\}$, $\sharp J = d$ に対して (3.9) により

$$\begin{aligned}\eta_{J(1)}\cdots\eta_{J(d)} &= \sum_{I\subset\{1,\ldots,p\},\sharp I=d} a_{I(1)}\cdots a_{I(d)}\det[x_{I(s)J(t)}]_{1\le s,t\le d}\\ &= \sum_{I\subset\{1,\ldots,p\},\sharp I=d} a_{I(1)}\cdots a_{I(d)} f_{IJ},\end{aligned}$$

である. 次に,

$$\begin{aligned}(\zeta_1,\ldots,\zeta_p) &= (\eta_1,\ldots,\eta_q)[\partial_{ij}]_{1\le j\le q,1\le i\le p}\\ &= (a_1,\ldots,a_p)[x_{ij}]_{1\le i\le p,1\le j\le q}[\partial_{ij}]_{1\le j\le q,1\le i\le p}\\ &= (a_1,\ldots,a_p)\left[\sum_{k=1}^q x_{ik}\partial_{hk}\right]_{1\le i,h\le p}\\ &= (a_1,\ldots,a_p)[\mathrm{ad}(-E_{hi})]_{1\le i,h\le p},\end{aligned}$$

と置くと ζ_h と η_j の交換関係:

$$\begin{aligned}\zeta_h\eta_j &= \sum_{k=1}^q \eta_k\partial_{hk}\eta_j\\ &= \sum_{k=1}^q \eta_k(\eta_j\partial_{hk} + \delta_{kj}a_h)\\ &= -\sum_{k=1}^q \eta_j\eta_k\partial_{hk} + \eta_j a_h \qquad = -\eta_j\zeta_h + \eta_j a_h,\end{aligned}$$

を得る. 上のふたつ目の等号では,

$$[\partial_{hk},\eta_j] = [\partial_{hk}, \sum_{i=1}^p a_i x_{ij}] = \sum_{i=1}^p a_i\delta_{hi}\delta_{kj} = \delta_{kj}a_h, \tag{3.10}$$

を用いている. 次に

$$(\zeta_1(u),\ldots,\zeta_p(u)) \;=\; (a_1,\ldots,a_p)[\mathrm{ad}(-E_{hi})-u\delta_{hi}]_{1\le i,h\le p},$$

とおくと, $\zeta_h(u)=\sum_{i=1}^p a_i(\mathrm{ad}(-E_{hi})-u\delta_{hi})=\zeta_h-ua_h$ であり, $\zeta_h(u)$ と η_j の交換関係:

$$\begin{aligned}
\zeta_h(u)\eta_j &= (\zeta_h-ua_h)\eta_j\\
&= -\eta_j\zeta_h+\eta_j a_h-ua_h\eta_j\\
&= \eta_j(-\zeta_h+a_h+ua_h) \quad = -\eta_j\zeta_h(u+1),
\end{aligned}\tag{3.11}$$

を得る.

さて $H\subset\{1,\ldots,p\}$, $\sharp H=d$ に対して, $\zeta_{H(1)}(-d+1)\cdots\zeta_{H(d-1)}(-1)\zeta_{H(d)}(0)$ を 2 通りに計算する. 第一に,

$$\zeta_{H(1)}(-d+1)\cdots\zeta_{H(d-1)}(-1)\zeta_{H(d)}(0)=\zeta_{H(1)}(-d+1)\cdots\zeta_{H(d-1)}(-1)\sum_{j_d=1}^{q}\eta_{j_d}\partial_{H(d)j_d}.$$

ここで (3.11) を繰り返し用いると, この式は次のように計算できる.

$$\begin{aligned}
&(-1)^{d-1}\sum_{j_d}\eta_{j_d}\zeta_{H(1)}(-d+2)\cdots\zeta_{H(d-1)}(0)\partial_{H(d)j_d}\\
&=\\
&\vdots\\
&= ((-1)^{d-1})^d\sum_{1\le j_1,\ldots,j_d\le q}\eta_{j_1}\cdots\eta_{j_d}\partial_{H(1)j_1}\cdots\partial_{H(d)j_d}\\
&= \sum_{J\subset\{1,\ldots,q\},\sharp J=d,\sigma\in\mathfrak{S}_d}\varepsilon(\sigma)\eta_{J(1)}\cdots\eta_{J(d)}\partial_{H(1)J(\sigma(1))}\cdots\partial_{H(d)J(\sigma(d))}\\
&= \sum_{J\subset\{1,\ldots,q\},\sharp J=d}\left(\sum_{I\subset\{1,\ldots,p\},\sharp I=d}a_{I(1)}\cdots a_{I(d)}\det[x_{I(s)J(t)}]_{1\le s,t\le d}\right)\det[\partial_{H(t)J(s)}]_{1\le s,t\le d}\\
&= \sum_{I\subset\{1,\ldots,p\},\sharp I=d}a_{I(1)}\cdots a_{I(d)}\sum_{J\subset\{1,\ldots,q\},\sharp J=d}f_{IJ}\,{}^t f_{HJ}(\partial).
\end{aligned}$$

上の最後からふたつ目の等号は (3.9) を用いている.

第二に

$$\begin{aligned}
&\zeta_{H(1)}(-d+1)\cdots\zeta_{H(d-1)}(-1)\zeta_{H(d)}(0)\\
&= \left\{\sum_{i_1=1}^{p}a_{i_1}(\mathrm{ad}(-E_{H(1)i_1})-(-d+1)\delta_{H(1)i_1})\right\}\times\cdots\times\left\{\sum_{i_d=1}^{p}a_{i_d}(\mathrm{ad}(-E_{H(d)i_d})-0\delta_{H(d)i_d})\right\}\\
&= \sum_{1\le i_1,\ldots,i_d\le p}a_{i_1}\cdots a_{i_d}\left\{\mathrm{ad}(-E_{H(1)i_1})-(-d+1)\delta_{H(1)i_1}\right\}\times\cdots\times\left\{\mathrm{ad}(-E_{H(d)i_d})-0\delta_{H(d)i_d}\right\}\\
&= \sum_{I\subset\{1,\ldots,p\},\sharp I=d,\sigma\in\mathfrak{S}_d}\varepsilon(\sigma)a_{I(1)}\cdots a_{I(d)}\\
&\qquad\times\left\{\mathrm{ad}(-E_{H(1)I(\sigma(1))})-(-d+1)\delta_{H(1)I(\sigma(1))}\right\}\times\cdots\times\left\{\mathrm{ad}(-E_{H(d)I(\sigma(d))})-0\delta_{H(d)I(\sigma(d))}\right\}\\
&= \sum_{I\subset\{1,\ldots,p\},\sharp I=d}a_{I(1)}\cdots a_{I(d)}\,\mathrm{ad}\left(\det[-E_{H(t)I(s)}-(-d+t)\delta_{H(t)I(s)}]_{1\le s,t\le d}\right),
\end{aligned}$$

となる. ここでも (3.9) のような計算をしている. これら二つの計算結果において, 同じ I に対応する summandsどうしが一致しているはずだから, それより (1)が従う.

[(2) の証明]

まず, (3.10) より, $\sum_{j=1}^{q} \partial_{ij}\eta_j = \sum_j(\eta_j\partial_{ij} + \delta_{jj}a_i) = \zeta_i + qa_i = \zeta_j(-q)$ である. 今度は $H \subset \{1,\ldots,p\}$, $\sharp H = d$ に対して, $\zeta_{H(1)}(-q)\zeta_{H(2)}(-q+1)\cdots\zeta_{H(d)}(-q+d-1)$ を 2 通りに計算する. 第一に (1) と同様にして,

$$\begin{aligned}\zeta_{H(1)}(-q)\cdots\zeta_{H(d)}(-q+d-1) &= \sum_{1\le j_1,\ldots,j_d\le q} \partial_{H(1)j_1}\cdots\partial_{H(d)j_d}\eta_{j_1}\cdots\eta_{j_d} \\ &= \sum_{I\subset\{1,\ldots,p\},\sharp I=d} a_{I(1)}\cdots a_{I(d)} \sum_{J\subset\{1,\ldots,q\},\sharp J=d} f_{IJ}\,{}^tf_{HJ}(\partial),\end{aligned}$$

が得られ, 第二にも (1) と同様にして

$$\begin{aligned}&\zeta_{H(1)}(-q)\cdots\zeta_{H(d)}(-q+d-1) \\ &= \sum_{I\subset\{1,\ldots,p\},\sharp I=d} a_{I(1)}\cdots a_{I(d)}\,\mathrm{ad}\left(\det[-E_{H(t)I(s)} - (-q+t-1)\delta_{H(t)I(s)}]_{1\le s,t\le d}\right),\end{aligned}$$

が得られる. これら 2 式で I を止めて比較すると (2) を得る. □

Lemma 3.5 $I \subset \{1,\ldots,p\}$, $J \subset \{1,\ldots,q\}$, $\sharp I = \sharp J = d$ の時,

$$\begin{aligned}(1)\ \Psi_\lambda({}^tf_{IJ}) &= \sum_H {}^tf_{HJ}(\partial)\,\mathrm{ad}\left(\det[E_{I(t)H(s)} + (\lambda^0+p-d+t)\delta_{I(t)H(s)}]_{1\le s,t\le d}\right), \\ (2)\ \Psi_\lambda({}^tf_{IJ}) &= \sum_H \mathrm{ad}\left(\det[E_{I(t)H(s)} + (\lambda^0+t-1)\delta_{I(t)H(s)}]_{1\le s,t\le d}\right)\,{}^tf_{HJ}(\partial),\end{aligned}$$

ただし上の和で H は $H \subset \{1,\ldots,p\}$, $\sharp H = d$ を動く.

Proof. 先の補題では $\bigwedge(\mathbf{C}^p)\otimes_{\mathbf{C}} D_{\mathfrak{n}^+}$ の中で議論したが, ここでは $\bigwedge(\mathbf{C}^q)\otimes_{\mathbf{C}} D_{\mathfrak{n}^+}$ の中で議論する. まず $(\mu_1,\ldots,\mu_p) = (a_1,\ldots,a_q)[\partial_{ij}]_{1\le j\le q,1\le i\le p}$ とおくと, $I \subset \{1,\ldots,p\}$, $\sharp I = d$ のとき, (3.9) より

$$\begin{aligned}\mu_{I(1)}\cdots\mu_{I(d)} &= \sum_{J\subset\{1,\ldots,q\},\sharp J=d} a_{J(1)}\cdots a_{J(d)}\det[\partial_{I(t)J(s)}]_{1\le j\le q,1\le p\le p} \\ &= \sum_{J\subset\{1,\ldots,q\},\sharp J=d} a_{J(1)}\cdots a_{J(d)}\,{}^tf_{IJ}(\partial),\end{aligned}$$

である. 同様に $(\xi_1,\ldots,\xi_p) = (a_1,\ldots,a_q)[\Psi_\lambda(E_{i,p+j})]_{1\le j\le q,1\le i\le p}$ とおくと, $I \subset \{1,\ldots,p\}$, $\sharp I = d$ のとき,

$$\xi_{I(1)}\cdots\xi_{I(d)} = \sum_{J\subset\{1,\ldots,q\},\sharp J=d} a_{J(1)}\cdots a_{J(d)}\Psi_\lambda({}^tf_{IJ}), \tag{3.12}$$

である. ここで ξ_h $(1\le h\le p)$ の 2 通りの表示を与える. まず

$$\xi_h = \sum_{j=1}^{q} a_j\Psi_\lambda(E_{h,p+j})$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{q} a_j \left(- \sum_{1\le k\le q, 1\le i\le p} x_{ik}\partial_{hk}\partial_{ij} + \lambda^0 \partial_{hj} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{q} a_j \sum_{1\le i\le p} \left(- \sum_{1\le k\le q} x_{ik}\partial_{hk} + \lambda^0 \delta_{hi} \right) \partial_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{p} (\mathrm{ad}(E_{hi}) + \lambda^0 \delta_{hi}) \mu_i,
\end{aligned}
$$

となる. ここで $1 \le g, h, i \le p$ に対して,

$$
\begin{aligned}
[\mathrm{ad}(E_{hi}), \mu_g] &= [-\sum_{k=1}^{q} x_{ik}\partial_{hk}, \sum_{j=1}^{q} a_j \partial_{gj}] \\
&= \sum_{1\le k,j\le q} \delta_{ig}\delta_{kj}\partial_{hk} a_j \\
&= \sum_{j=1}^{q} \delta_{ig} a_j \partial_{hj} \qquad = \delta_{ig}\mu_h,
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

だから, これを用いると次の ξ_h のふたつ目の表示

$$
\begin{aligned}
\xi_h &= \sum_{i=1}^{p} \left\{ \mu_i (\mathrm{ad}(E_{hi}) + \lambda^0 \delta_{hi}) + \delta_{ii}\mu_h \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{p} \mu_i \left\{ \mathrm{ad}(E_{hi}) + \lambda^0 \delta_{hi} + p\delta_{hi} \right\},
\end{aligned}
$$

が得られる. また (3.13) を用いると ξ_h と μ_g の交換関係も次のようにわかる.

$$
\begin{aligned}
\xi_h \mu_g &= \sum_{i=1}^{p} (\mathrm{ad}(E_{hi}) + \lambda^0 \delta_{hi}) \mu_i \mu_g \\
&= -\sum_{i=1}^{p} \left\{ \mu_g (\mathrm{ad}(E_{hi}) + \lambda^0 \delta_{hi}) + \delta_{ig}\mu_h \right\} \mu_i \\
&= -\mu_g \xi_h - \mu_h \mu_g.
\end{aligned}
$$

次に $(\xi_1(u), \ldots, \xi_p(u)) = (\mu_1, \ldots, \mu_p)[\mathrm{ad}(E_{hi}) + (\lambda^0 + p + u)\delta_{hi}]_{1\le i,h\le p}$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\xi_h(u) &= \sum_{i=1}^{p} \mu_i (\mathrm{ad}(E_{hi}) + (\lambda^0 + p + u)\delta_{hi}) \\
&= \xi_h + u\mu_h,
\end{aligned}
$$

だから, $\xi_h(u)$ と μ_i の交換関係が次のようにわかる:

$$
\begin{aligned}
\xi_h(u)\mu_i &= (\xi_h + u\mu_h)\mu_i \\
&= -\mu_i\xi_h - \mu_h\mu_i + u\mu_h\mu_i \qquad = -\mu_i \xi_h(u-1).
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

さて, $I \subset \{1,\dots,p\}$, $\sharp I = d$ に対して, $\xi_{I(1)}\cdots\xi_{I(d)}$ を (3.12) とは別の方法で計算してみる.

$$\begin{aligned}\xi_{I(1)}\cdots\xi_{I(d)} &= \xi_{I(1)}(0)\cdots\xi_{I(d)}(0)\\ &= \xi_{I(1)}(0)\cdots\xi_{I(d-1)}(0)\sum_{h=1}^{p}\mu_h(\mathrm{ad}(E_{I(d)h})+(\lambda^0+p)\delta_{I(d)h}),\end{aligned}$$

ここで (3.14) を繰り返し用いると上の式は次のように計算できる.

$$\begin{aligned}&(-1)^{d-1}\sum_{h_d=1}^{p}\mu_{h_d}\xi_{I(1)}(-1)\cdots\xi_{I(d-1)}(-1)\left\{\mathrm{ad}(E_{I(d)h_d})+(\lambda^0+p)\delta_{I(d)h_d}\right\}\\ &=\\ &\vdots\\ &= ((-1)^{d-1})^d\sum_{1\le h_1,\dots,h_d\le p}\mu_{h_1}\cdots\mu_{h_d}\left\{\mathrm{ad}(E_{I(1)h_1})+(\lambda^0+p-(d-1))\delta_{I(1)h_1}\right\}\times\cdots\\ &\qquad\cdots\times\left\{\mathrm{ad}(E_{I(d)h_d})+(\lambda^0+p-0)\delta_{I(d)h_d}\right\}\\ &= \sum_{\substack{H\subset\{1,\dots,p\},\,J\subset\{1,\dots,q\},\\ \sharp H=\sharp J=d,\,\sigma\in\mathfrak{S}_d}} a_{J(1)}\cdots a_{J(d)}\varepsilon(\sigma)\,{}^tf_{HJ}(\partial)\\ &\qquad\times\left\{\mathrm{ad}(E_{I(1)H(\sigma(1))})+(\lambda^0+p-(d-1))\delta_{I(1)H(\sigma(1))}\right\}\times\cdots\\ &\qquad\cdots\times\left\{\mathrm{ad}(E_{I(d)H(\sigma(d))})+(\lambda^0+p-0)\delta_{I(d)H(\sigma(d))}\right\}\\ &= \sum_{J\subset\{1,\dots,q\},\sharp J=d} a_{J(1)}\cdots a_{J(d)}\sum_{H\subset\{1,\dots,p\},\sharp H=d}{}^tf_{HJ}(\partial)\\ &\qquad\times\mathrm{ad}\left(\det[E_{I(t)H(s)}+(\lambda^0+p-d+t)\delta_{I(t)H(s)}]_{1\le s,t\le d}\right).\end{aligned}$$

この式と (3.12) を J を止めて比較すれば (1) が得られる.

[(2) の証明]

さらに別の方法で $\xi_{I(1)}\cdots\xi_{I(d)}$ を計算してみる.

$$\begin{aligned}&\xi_{I(1)}\cdots\xi_{I(d)}\\ &= \sum_{h=1}^{p}(\mathrm{ad}(E_{I(1)h})+\lambda^0\delta_{I(1)h})\mu_h\xi_{I(2)}(0)\cdots\xi_{I(d)}(0)\\ &= (-1)^{d-1}\sum_{h=1}^{p}(\mathrm{ad}(E_{I(1)h})+\lambda^0\delta_{I(1)h})\xi_{I(2)}(1)\cdots\xi_{I(d)}(1)\mu_h\\ &=\\ &\vdots\\ &= ((-1)^{d-1})^d\sum_{1\le h_1,\dots,h_d\le p}(\mathrm{ad}(E_{I(1)h_1})+(\lambda^0+0)\delta_{I(1)h_1})\times\cdots\\ &\qquad\cdots\times(\mathrm{ad}(E_{I(d)h_d})+(\lambda^0+d-1)\delta_{I(d)h_d})\mu_{h_1}\cdots\mu_{h_d}\\ &= \sum_{H\subset\{1,\dots,p\},\sharp H=d,\sigma\in\mathfrak{S}_d}(\mathrm{ad}(E_{I(1)H(\sigma(1))})+(\lambda^0+0)\delta_{I(1)H(\sigma(1))})\times\cdots\\ &\qquad\cdots\times(\mathrm{ad}(E_{I(d)H(\sigma(d))})+(\lambda^0+d-1)\delta_{I(d)H(\sigma(d))})\cdot\sum_{J\subset\{1,\dots,q\},\sharp J=d}\varepsilon(\sigma)a_{J(1)}\cdots a_{J(d)}\,{}^tf_{HJ}(\partial)\\ &= \sum_{J\subset\{1,\dots,q\},\sharp J=d}a_{J(1)}\cdots a_{J(d)}\sum_{H\subset\{1,\dots,p\},\sharp H=d}\mathrm{ad}\left(\det[E_{I(t)J(s)}+(\lambda^0+t-1)\delta_{I(t)J(s)}]_{1\le s,t\le d}\right){}^tf_{HJ}(\partial).\end{aligned}$$

この式と (3.12) を J を止めて比較すれば (2) が得られる. □

Proof of Theorem 3.2. まず, (3.2), (3.4) は Lemma 3.4 において $H=I$ として和をとればよい. 次に (3.6) を証明する. まず $\mathfrak{p}$ の指標 $\mu=\mu^0\varpi_{i_0}$ に対して, $1\leq i\leq p$ の時, $\mu(E_{ii})=\mu^0 q/(p+q)$ であることに注意すると, Lemma 3.5 (1) は

$$\Psi_\lambda({}^t f_{IJ})=(-1)^d\sum_H {}^t f_{HJ}(\partial)\Psi_{\frac{p+q}{q}\lambda+\frac{2p}{q}\rho}(u_{IH}^{LT}),$$

と書き直せ, Lemma 3.4 (1) は

$$\sum_J f_{IJ}\,{}^t f_{HJ}(\partial)=\mathrm{ad}(u_{IH}^{LT})=\Psi_0(u_{HI}^{LT}),$$

と書き直せる. これらを用いると,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{I\subset\{1,\ldots,p\},J\subset\{1,\ldots,q\},\\ \sharp I=\sharp J=d}}\Psi_\lambda(f_{IJ}\,{}^t f_{IJ}) &= (-1)^d\sum_{IJ} f_{IJ}\sum_{H\subset\{1,\ldots,p\},\sharp H=d}{}^t f_{HJ}(\partial)\Psi_{\frac{p+q}{q}\lambda+\frac{2p}{q}\rho}(u_{IH}^{LT})\\ &= (-1)^d\sum_{HI}\Psi_0(u_{HI}^{LT})\Psi_{\frac{p+q}{q}\lambda+\frac{2p}{q}\rho}(u_{IH}^{LT}),\end{aligned}$$

となり, (3.6) が証明された. (3.8) も Lemma 3.5 (2) と Lemma 3.4 (2) から同様に証明される.

さて残りの等式を証明するために, Definition 2.2 で定めた anti-involutions σ,s,τ を用いる. 合成写像 $\sigma\tau$ は, Chevalley basis（の部分集合）$\{X_{\pm\alpha}|\alpha\in\Delta_N^+\}$ に対して

$$\begin{aligned}\sigma\tau(X_{-\alpha}) &= -X_\alpha(\partial),\\ \sigma\tau(X_\alpha(\partial)) &= X_{-\alpha},\end{aligned}$$

を満たす代数同型であることに注意すると, $H,I\subset\{1,\ldots,p\},\sharp H=\sharp I=d$ の時,

$$\begin{aligned}\sigma\tau(\Psi_\mu(u_{HI}^{LT})) &= \Psi_{-\mu-2\rho}(s({}^t(u_{HI}^{LT})))\\ &= \Psi_{-\mu-2\rho}\left(\det[E_{I(s)H(t)}+(d-t)\delta_{I(s)H(t)}]_{1\leq s,t\leq d}\right)\\ &= \Psi_{-\mu}\left(\det[E_{I(s)H(t)}+(d-t-q)\delta_{I(s)H(t)}]_{1\leq s,t\leq d}\right)\\ &= (-1)^d\Psi_{-\mu}(v_{IH}^L),\end{aligned}$$

が得られる.

では (3.3) を証明する. まず $u\in U(\mathfrak{l})$ のとき $\mathrm{ad}(u)=\Psi_0(u)$ に注意すると上のことから,

$$\begin{aligned}\sigma\tau((3.2)\,\text{右辺}) &= \sigma\tau(\sum_I \mathrm{ad}(u_{II}^{LT}))\\ &= (-1)^d\sum_I \mathrm{ad}(v_{II}^L) \qquad =(-1)^d((3.3)\,\text{右辺}),\end{aligned}$$

が得られ, 次に (3.2) 左辺は $D_{\mathfrak{n}+}^L$ に属するから τ-不変であるので,

$$\begin{aligned}\sigma\tau((3.2)\,\text{左辺}) &= \sigma((3.2)\,\text{左辺})\\ &= \sigma\left(\sum_{IJ} f_{IJ}\,{}^t f_{IJ}(\partial)\right)\\ &= (-1)^d\sum_{IJ}{}^t f_{IJ}(\partial)f_{IJ} \qquad =(-1)^d((3.3)\,\text{左辺}),\end{aligned}$$

が得られる．これらを比較して (3.3) が得られる．同様にして (3.1) も (3.4) に $\sigma\tau$ を施して得られる．

次に (3.7) を証明する．上と同様にして，

$$\begin{aligned}\sigma\tau((3.6)\,\text{右辺}) &= \sigma\tau\left((-1)^d\sum_{HI}\Psi_0(u^{LT}_{HI})\Psi_{\frac{p+q}{q}\lambda+\frac{2p}{q}\rho}(u^{LT}_{IH})\right)\\ &= (-1)^d\sum_{HI}(-1)^d\Psi_0(v^L_{IH})\cdot(-1)^d\Psi_{-\frac{p+q}{q}\lambda-\frac{2p}{q}\rho}(v^L_{HI}).\end{aligned}$$

そして，

$$\begin{aligned}\sigma\tau((3.6)\,\text{左辺}) &= \sigma((3.6)\,\text{左辺})\\ &= \sigma(\sum_{IJ}\Psi_\lambda(f_{IJ}\,{}^tf_{IJ}))\\ &= \sum_{IJ}\Psi_{-\lambda-2\rho}({}^tf_{IJ}f_{IJ}),\end{aligned}$$

と計算できるので，λ を $-\lambda-2\rho$ に取り替えて上の 2 式を比較すれば (3.7) が証明できる．(3.5) も同様である． □

3.2 (C_n, n) or S^2GL_n

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}(n,\mathbf{C})=\left\{\begin{pmatrix} A & B\\ C & -{}^tA\end{pmatrix}\in\mathfrak{gl}(2n,\mathbf{C})\;\middle|\;\begin{array}{l}A\in\mathfrak{gl}(n,\mathbf{C}),\\ B,C\in\mathrm{Sym}(n,\mathbf{C})\end{array}\right\},$$

とおく．$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の対角行列からなる集合とする．$i,j\in\{1,\ldots,n\}$ に対して

$$\begin{aligned}H_{ij} &= E_{ij}-E_{n+j,n+i},\\ G_{ij} &= E_{i,n+j}+E_{j,n+i},\\ F_{ij} &= E_{n+i,j}+E_{n+j,i},\end{aligned}$$

とおくと以下の関係がある．

$$\begin{aligned}[H_{ij},H_{kl}] &= \delta_{jk}H_{il}-\delta_{il}H_{kj},\\ [H_{ij},G_{kl}] &= \delta_{jk}G_{il}+\delta_{jl}G_{ik},\\ [H_{ij},F_{kl}] &= -\delta_{ik}F_{jl}-\delta_{il}F_{jk},\\ [G_{ij},F_{kl}] &= \delta_{jk}H_{il}+\delta_{il}H_{jk}+\delta_{jl}H_{ik}+\delta_{ik}H_{jl}.\end{aligned}$$

$\varepsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$ を $\varepsilon_i(H_{jj}) = \delta_{ij}$ で定める．ルートシステムなどの情報を以下にまとめる．

$$\begin{array}{lcl}
\Pi & = & \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, 2\varepsilon_n\}, \\
\Delta^+ & = & \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le n\} \cup \{2\varepsilon_i\}, \\
H_{ij} & : & (\varepsilon_i - \varepsilon_j)\text{-root vector for } i \ne j, \\
G_{ij} & : & (\varepsilon_i + \varepsilon_j)\text{-root vector}, \\
F_{ij} & : & -(\varepsilon_i + \varepsilon_j)\text{-root vector}, \\
\Pi_L & = & \Pi \setminus \{2\varepsilon_n\}, \\
\Delta_L^+ & = & \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le n\}, \\
\varpi_{i_0} & = & \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n, \\
2\rho & = & (n+1)\varpi_{i_0}, \\
\langle X, Y \rangle & = & \mathrm{Tr}(XY)/2 \quad (X, Y \in \mathfrak{g}), \\
\text{C. B.} & : & \{H_{ij}\} \cup \{G_{ij} \mid i < j\} \cup \{(1/2)G_{ii}\} \cup \{F_{ij} \mid i < j\} \cup \{(1/2)F_{ii}\}.
\end{array}$$

部分代数 $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{n}^+$, $\mathfrak{l}$ は次のようになる．

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p} &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -{}^tA \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \;\middle|\; A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C}), B \in \mathrm{Sym}(n, \mathbf{C}) \right\}, \\
\mathfrak{n}^+ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \;\middle|\; B \in \mathrm{Sym}(n, \mathbf{C}) \right\}, \\
\mathfrak{l} &= \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -{}^tA \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \;\middle|\; A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C}) \right\}.
\end{aligned}$$

Definition 2.2 における ^{t} により，

$${}^tH_{ij} = H_{ji}, \quad {}^tG_{ij} = F_{ij}, \quad {}^tF_{ij} = G_{ij},$$

である．$i, j \in \{1, \ldots, n\}$ に対して $x_{ij} = F_{ij}$, $\partial_{ij} = \partial/\partial x_{ij}$ と定めると $\{x_{ij} \mid i \le j\}$ は $\mathfrak{n}^+$ の座標系を与える．$i \ne j$ に対しては ${}^tF_{ij}(\partial) = G_{ij}(\partial) = \langle G_{ij}, F_{ij} \rangle \partial_{ij} = \partial_{ij}$ だが，${}^tF_{ii}(\partial) = \langle G_{ii}, F_{ii} \rangle \partial_{ii} = 2\partial_{ii}$ である．この理由から $\tilde{\partial}_{ij} = (1 + \delta_{ij})\partial_{ij}$ と定める．Lemma 2.1 を用いると容易に次の補題が得られる．

Lemma 3.6 $1 \le i, j \le n$ に対して，

(1) $\Psi_\lambda(H_{ij}) = -\sum_{k=1}^{n} x_{jk}\tilde{\partial}_{ik} + \lambda^0 \delta_{ij}$,

(2) $\Psi_\lambda(G_{ij}) = -\sum_{k,l=1}^{n} x_{kl}\tilde{\partial}_{il}\tilde{\partial}_{jk} + 2\lambda^0 \tilde{\partial}_{ij}$. □

$1 \le d \le n$ の時，$I, J \subset \{1, \ldots, n\}$, $\sharp I = \sharp J = d$ に対して，

$$f_{IJ} = \det[x_{I(s)J(t)}]_{1 \le s,t \le d},$$

と定める．特に

$$f = \det[x_{ij}]_{1 \le s,t \le n},$$

はウェイト $-2\varpi_{i_0}$ をもつ相対不変式となる．また

$${}^tf_{IJ}(\partial) = \det[\partial_{I(s)J(t)}]_{1 \le s,t \le d},$$

である．

Theorem 3.7 $1 \leq d \leq n$, $J, K \subset \{1, \ldots, n\}$, $\sharp J = \sharp K = d$ に対し,

$$\begin{aligned}
u_{KJ} &= \det[-H_{K(s)J(t)} + (t-1)\delta_{K(s)J(t)}]_{1\leq s,t\leq d}, \\
u^T_{KJ} &= \det[-H_{K(t)J(s)} + (d-t)\delta_{K(t)J(s)}]_{1\leq s,t\leq d}, \\
v_{KJ} &= \det[-H_{K(s)J(t)} + (n+t-d+1)\delta_{K(s)J(t)}]_{1\leq s,t\leq d}, \\
v^T_{KJ} &= \det[-H_{K(t)J(s)} + (n-t+2)\delta_{K(t)J(s)}]_{1\leq s,t\leq d},
\end{aligned}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}
\sum_{IJ} f_{IJ}\,{}^t f_{IJ}(\partial) &= \sum_J \mathrm{ad}(u_{JJ}), \\
\sum_{IJ} f_{IJ}\,{}^t f_{IJ}(\partial) &= \sum_J \mathrm{ad}(u^T_{JJ}), \\
\sum_{IJ} {}^t f_{IJ}(\partial) f_{IJ} &= \sum_J \mathrm{ad}(v_{JJ}), \\
\sum_{IJ} {}^t f_{IJ}(\partial) f_{IJ} &= \sum_J \mathrm{ad}(v^T_{JJ}).
\end{aligned}$$

であり, さらに,

$$\begin{aligned}
\sum_{IJ} \Psi_\lambda(f_{IJ}\,{}^t f_{IJ}) &= (-1)^d \sum_{JK} \Psi_{2\lambda+2\rho}(u_{KJ})\Psi_0(u_{JK}), \\
\sum_{IJ} \Psi_\lambda(f_{IJ}\,{}^t f_{IJ}) &= (-1)^d \sum_{JK} \Psi_0(u^T_{KJ})\Psi_{2\lambda+2\rho}(u^T_{JK}), \\
\sum_{IJ} \Psi_\lambda({}^t f_{IJ} f_{IJ}) &= (-1)^d \sum_{JK} \Psi_0(v_{KJ})\Psi_{2\lambda+2\rho}(v_{JK}), \\
\sum_{IJ} \Psi_\lambda({}^t f_{IJ} f_{IJ}) &= (-1)^d \sum_{JK} \Psi_{2\lambda+2\rho}(v^T_{KJ})\Psi_0(v^T_{JK}).
\end{aligned}$$

上の等式の和において, I, J, K は $I, J, K \subset \{1, \ldots, n\}$, $\sharp I = \sharp J = \sharp K = d$ の範囲を動く.

Proof. (A_{p+q-1}, p) 型と同じく外積代数を用いて証明できる. □

3.3 (D_n, n) or $\Lambda^2 GL_n$

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^t A \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbf{C}) \;\middle|\; \begin{array}{l} A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C}), \\ B, C \in \mathrm{Alt}(n, \mathbf{C}) \end{array} \right\},$$

とおき, $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の対角行列からなる集合とする. $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ に対して

$$\begin{aligned}
H_{ij} &= E_{ij} - E_{n+j,n+i}, \\
G_{ij} &= E_{i,n+j} - E_{j,n+i}, \\
F_{ij} &= E_{n+j,i} - E_{n+i,j},
\end{aligned}$$

とおくと以下の関係がある.

$$\begin{aligned}
[H_{ij}, H_{kl}] &= \delta_{jk}H_{il} - \delta_{il}H_{kj}, \\
[H_{ij}, G_{kl}] &= \delta_{jk}G_{il} + \delta_{jl}G_{ki}, \\
[H_{ij}, F_{kl}] &= \delta_{ik}F_{lj} + \delta_{il}F_{jk}, \\
[G_{ij}, F_{kl}] &= \delta_{jl}H_{ik} + \delta_{ik}H_{jl} - \delta_{jk}H_{il} - \delta_{il}H_{jk}.
\end{aligned}$$

$\varepsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ $(i \in \{1,\dots,n\})$ を $\varepsilon_i(H_{jj}) = \delta_{ij}$ で定める．ルートシステムなどの情報を以下にまとめる．

$$
\begin{array}{lcl}
\Pi & = & \{\varepsilon_1-\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n,\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n\},\\
\Delta^+ & = & \{\varepsilon_i\pm\varepsilon_j \mid 1\le i<j\le n\},\\
H_{ij} & : & (\varepsilon_i-\varepsilon_j)\text{-root vector for } i\ne j,\\
G_{ij} & : & (\varepsilon_i+\varepsilon_j)\text{-root vector for } i\ne j,\\
F_{ij} & : & -(\varepsilon_i+\varepsilon_j)\text{-root vector for } i\ne j,\\
\Pi_L & = & \Pi\setminus\{\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n\},\\
\Delta_L^+ & = & \{\varepsilon_i-\varepsilon_j \mid 1\le i<j\le n\},\\
\varpi_{i_0} & = & (\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n)/2,\\
2\rho & = & 2(n-1)\varpi_{i_0},\\
\langle X,Y\rangle & = & \mathrm{Tr}(XY)/2 \quad (X,Y\in\mathfrak{g}),\\
\text{C. B.} & : & \{H_{ij}\}\cup\{G_{ij}\mid i<j\}\cup\{F_{ij}\mid i<j\}.
\end{array}
$$

部分代数 $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{n}^+$, $\mathfrak{l}$ は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{p} &= \left\{\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -{}^tA\end{pmatrix}\in\mathfrak{g} \;\middle|\; A\in\mathfrak{gl}(n,\mathbf{C}), B\in\mathrm{Alt}(n,\mathbf{C})\right\},\\
\mathfrak{n}^+ &= \left\{\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0\end{pmatrix}\in\mathfrak{g} \;\middle|\; B\in\mathrm{Alt}(n,\mathbf{C})\right\},\\
\mathfrak{l} &= \left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -{}^tA\end{pmatrix}\in\mathfrak{g} \;\middle|\; A\in\mathfrak{gl}(n,\mathbf{C})\right\}.
\end{aligned}
$$

Definition 2.2 における ^{t} により，

$$
{}^tH_{ij} = H_{ji}, \quad {}^tG_{ij} = F_{ij}, \quad {}^tF_{ij} = G_{ij},
$$

である．$i,j\in\{1,\dots,n\}$ に対して $x_{ij} = F_{ij}$, $\partial_{ij} = \partial/\partial x_{ij}$ と定めると $\{x_{ij}\mid i<j\}$ は $\mathfrak{n}^+$ の座標系を与える．Lemma 2.1 を用いると容易に次の補題が得られる．

Lemma 3.8 $1\le i,j\le n$ に対して，

(1) $\Psi_\lambda(H_{ij}) = -\displaystyle\sum_{1\le k\le n, k\ne i} x_{kj}\partial_{ki} + \frac{1}{2}\lambda^0\delta_{ij}$,

(2) $\Psi_\lambda(G_{ij}) = -\displaystyle\sum_{k\ne j, l\ne i} x_{kl}\partial_{il}\partial_{kj} + \lambda^0\partial_{ij}$. □

(D_n, n) 型では Capelli 恒等式は複雑な形をしており，また Ψ_λ-analogue の証明に (A_{p+q-1}, p) や (C_n, n) と同様の方法が使えない．そこでここでは Turnbull 恒等式の Ψ_λ-analogue を与える．まず，要素が非可換な行列のパーマネントを次で定める (column permanent).

$$
\mathrm{Per}[A_{ij}]_{1\le i,j\le d} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d} A_{\sigma(1)1}\cdots A_{\sigma(d)d}.
$$

要素が可換の場合は column permanent と row permanent は一致する．パーマネントの積公式は要素が可換であっても行列式の場合より複雑であり，R を可換環, $A,B,C\in\mathrm{Mat}(n,R)$, $C=AB$, $1\le d\le n$ とした時，

$$
\mathrm{Per}(C_{IK}) = \sum_{\sharp J=d} \frac{1}{J!}\,\mathrm{Per}(A_{IJ})\,\mathrm{Per}(B_{JK}),
$$

である．ここで，I, J, K は $1 \leq I(1) \leq \cdots \leq I(d) \leq n$ なる index で (このことを $\sharp I = d$ と書くことにする.) C_{IK} などはそれに対応して得られる $d \times d$ 行列（一般には小行列ではない），$J! = (1$ の個数$)! \times \cdots \times (n$ の個数$)!$ である．

$1 \leq d \leq n$ の時, $\sharp I = \sharp J = d$ なる index に対して,

$$f_{IJ} = \mathrm{Per}[x_{I(s)J(t)}]_{1 \leq s,t \leq d},$$

とおくと

$${}^t f_{IJ} = \mathrm{Per}[G_{I(s)J(t)}]_{1 \leq s,t \leq d}, \qquad {}^t f_{IJ}(\partial) = \mathrm{Per}[\partial_{I(s)J(t)}]_{1 \leq s,t \leq d},$$

である．

Theorem 3.9 $1 \leq d \leq n$ の時, $1 \leq I(1) \leq \cdots \leq I(d) \leq n$ なる *index* I *(*このことを $\sharp I = d$ と書く*)*と $\sharp J = d$ なる J に対して,

$$\begin{aligned}
u_{IJ} &= \mathrm{Per}[-H_{I(s)J(t)} - (t-1)\delta_{I(s)J(t)}]_{1 \leq s,t \leq d}, \\
u^T_{IJ} &= \mathrm{Per}[-H_{I(t)J(s)} - (d-t)\delta_{I(t)J(s)}]_{1 \leq s,t \leq d}, \\
v_{IJ} &= \mathrm{Per}[-H_{I(s)J(t)} + (d+n-1-t)\delta_{I(s)J(t)}]_{1 \leq s,t \leq d}, \\
v^T_{IJ} &= \mathrm{Per}[-H_{I(t)J(s)} + (n-2+t)\delta_{I(t)J(s)}]_{1 \leq s,t \leq d},
\end{aligned}$$

とおくと

$$\sum_{\sharp I = \sharp J = d} \frac{f_{IJ}\,{}^t f_{IJ}(\partial)}{I!J!} = \sum_{\sharp I = d} \frac{\mathrm{ad}(u_{II})}{I!}, \tag{3.15}$$

$$\sum_{\sharp I = \sharp J = d} \frac{f_{IJ}\,{}^t f_{IJ}(\partial)}{I!J!} = \sum_{\sharp I = d} \frac{\mathrm{ad}(u^T_{II})}{I!}, \tag{3.16}$$

$$\sum_{\sharp I = \sharp J = d} \frac{{}^t f_{IJ}(\partial) f_{IJ}}{I!J!} = \sum_{\sharp I = d} \frac{\mathrm{ad}(v_{II})}{I!}, \tag{3.17}$$

$$\sum_{\sharp I = \sharp J = d} \frac{{}^t f_{IJ}(\partial) f_{IJ}}{I!J!} = \sum_{\sharp I = d} \frac{\mathrm{ad}(v^T_{II})}{I!}, \tag{3.18}$$

であり，さらに

$$\sum_{\sharp I = \sharp J = d} \Psi_\lambda \left(\frac{f_{IJ}\,{}^t f_{IJ}}{I!J!} \right) = (-1)^d \sum_{\sharp I = \sharp J = d} \frac{1}{I!J!} \Psi_{2\lambda+2\rho}(u_{IJ}) \Psi_0(u_{JI}), \tag{3.19}$$

$$\sum_{\sharp I = \sharp J = d} \Psi_\lambda \left(\frac{f_{IJ}\,{}^t f_{IJ}}{I!J!} \right) = (-1)^d \sum_{\sharp I = \sharp J = d} \frac{1}{I!J!} \Psi_0(u^T_{IJ}) \Psi_{2\lambda+2\rho}(u^T_{JI}), \tag{3.20}$$

$$\sum_{\sharp I = \sharp J = d} \Psi_\lambda \left(\frac{{}^t f_{IJ} f_{IJ}}{I!J!} \right) = (-1)^d \sum_{\sharp I = \sharp J = d} \frac{1}{I!J!} \Psi_0(v_{IJ}) \Psi_{2\lambda+2\rho}(v_{JI}), \tag{3.21}$$

$$\sum_{\sharp I = \sharp J = d} \Psi_\lambda \left(\frac{{}^t f_{IJ} f_{IJ}}{I!J!} \right) = (-1)^d \sum_{\sharp I = \sharp J = d} \frac{1}{I!J!} \Psi_{2\lambda+2\rho}(v^T_{IJ}) \Psi_0(v^T_{JI}). \tag{3.22}$$

Remark 3.10 (1) 定理中の式 (3.15), (3.16) はそれぞれ, [7, Theorem 3.1] において D_N として [7, 式 (2.8)] と [7, 式 (2.7)] を用いたものである．従って証明も [7] にある通りだが self-contained を目指すため証明を（本質的には Lemma 3.11 において）与える．

(2) [7, Theorem 2.3] により $\sum_I u_{II}/I!, \sum_I u^T_{II}/I! \in Z(\mathfrak{l})$ であり，以下の証明により，$\sum_I v_{II}/I!, \sum_I v^T_{II}/I!$ もそうである．

定理の証明の前に補題をふたつ証明する．行列式の時に外積代数を用いて $\bigwedge(\mathbf{C}^n)\otimes_{\mathbf{C}} D_{\mathfrak{n}^+}$ の中で議論をしたように，パーマネントの場合は b_j を不定元として，$\mathbf{C}[b_1,\ldots,b_n]\otimes_{\mathbf{C}} D_{\mathfrak{n}^+}$ の中で議論をする．

$$(\eta_1,\ldots,\eta_n)=(b_1,\ldots,b_n)[A_{ij}]_{1\le i,j\le n}\quad(A_{ij}\in D_{\mathfrak{n}^+}),$$

の時，$\sharp I=d$ に対して

$$\begin{aligned}
\eta_{I(1)}\cdots\eta_{I(d)} &= \sum_{1\le i_t\le n} b_{i_1}\cdots b_{i_d}A_{i_1I(1)}\cdots A_{i_dI(d)}\\
&= \sum_{\sharp J=d,\sigma\in\mathfrak{S}_d}\frac{1}{J!}b_{J(\sigma(1))}\cdots b_{J(\sigma(d))}A_{J(\sigma(1))I(1)}\cdots A_{J(\sigma(d))I(d)}\\
&= \sum_{\sharp J=d}\frac{1}{J!}b_{J(1)}\cdots b_{J(d)}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d}A_{J(\sigma(1))I(1)}\cdots A_{J(\sigma(d))I(d)}\\
&= \sum_{\sharp J=d}\frac{1}{J!}b_{J(1)}\cdots b_{J(d)}\operatorname{Per}A_{JI}, \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

という等式が成り立つ．

Lemma 3.11 $\sharp I=\sharp J=d$ のとき，

$$\begin{aligned}
(1)\ \sum_{\sharp K=d}\frac{1}{K!}f_{KJ}\,{}^tf_{KI}(\partial) &= (-1)^d\operatorname{ad}\left(\operatorname{Per}[H_{I(t)J(s)}+(d-t)\delta_{I(t)J(s)}]_{1\le s,t\le d}\right),\\
(2)\ \sum_{\sharp K=d}\frac{1}{K!}{}^tf_{KI}(\partial)f_{KJ} &= (-1)^d\operatorname{ad}\left(\operatorname{Per}[H_{I(t)J(s)}+(2-n-t)\delta_{I(t)J(s)}]_{1\le s,t\le d}\right),
\end{aligned}$$

である．（上の式で $I=J$ とし，$I!$ で割り $\sharp I=d$ で和を取ったものが *Turnbull* 恒等式である．）

Proof. [(1) の証明]
要素が互いに可換な正方行列 A に対しては $\operatorname{Per}A=\operatorname{Per}{}^tA$ であることと，$x_{ij}=-x_{ij}$ に注意すると，

$$(\eta_1,\ldots,\eta_n)=(b_1,\ldots,b_n)[x_{ij}]_{1\le i,j\le n},$$

と置けば $\sharp I=d$ に対して (3.23) より

$$\begin{aligned}
\eta_{I(1)}\cdots\eta_{I(d)} &= \sum_{\sharp J=d}\frac{1}{J!}b_{J(1)}\cdots b_{J(d)}f_{JI}\\
&= (-1)^d\sum_{\sharp J=d}\frac{1}{J!}b_{J(1)}\cdots b_{J(d)}f_{IJ},
\end{aligned}$$

である．次に，

$$\begin{aligned}
(\zeta_1,\ldots,\zeta_n) &= (\eta_1,\ldots,\eta_n)[\partial_{ij}]_{1\le i,j\le n}\\
&= (b_1,\ldots,b_n)\left[\sum_k x_{ik}\partial_{kj}\right]_{1\le i,j\le n} = (b_1,\ldots,b_n)[\operatorname{ad}(H_{ji})]_{1\le i,j\le n},
\end{aligned}$$

と置くと, ζ_j と η_i の交換関係:

$$
\begin{aligned}
\zeta_j \eta_i &= \sum_k \eta_k \partial_{kj} \eta_i \\
&= \sum_k \eta_k \eta_i \partial_{kj} + \sum_k \eta_k (b_k \delta_{ji} - b_j \delta_{ki}) \\
&= \eta_i \zeta_j + \delta_{ji} \sum_{km} b_m x_{mk} b_k - \eta_i b_j \qquad = \eta_i \zeta_j - \eta_i b_j,
\end{aligned}
$$

を得る. 上のふたつ目の等号では

$$
\begin{aligned}
[\partial_{kj}, \eta_i] &= [\partial_{kj}, \sum_m b_m x_{mi}] \\
&= \sum_m b_m (\delta_{km} \delta_{ji} - \delta_{ki} \delta_{jm}) \qquad = b_k \delta_{ji} - b_j \delta_{ki},
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

を用いており, 最後の等号では $\sum_{km} b_m x_{mk} b_k$ が交代行列の要素の総和だからゼロであることを用いた. 次に,

$$
(\zeta_1(u), \dots \zeta_n(u)) = (b_1, \dots, b_n)[\mathrm{ad}(H_{ji}) + u\delta_{ji}]_{1 \le i,j \le n},
$$

と置くと $\zeta_j(u) = \sum_i b_i(\mathrm{ad}(H_{ji}) + u\delta_{ji}) = \zeta_j + ub_j$ であり, $\zeta_j(u)$ と η_i の交換関係:

$$
\begin{aligned}
\zeta_j(u)\eta_i &= (\zeta_j + ub_j)\eta_i \\
&= \eta_i \zeta_j - \eta_i b_j + u\eta_i b_j \qquad = \eta_i \zeta_j (u-1),
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

を得る.

さて, $\sharp I = d$ に対して, $\zeta_{I(1)}(d-1)\zeta_{I(2)}(d-2)\cdots\zeta_{I(d)}(0)$ を 2 通りに計算する. 第一に,

$$
\zeta_{I(1)}(d-1)\zeta_{I(2)}(d-2)\cdots\zeta_{I(d)}(0) = \zeta_{I(1)}(d-1)\cdots\zeta_{I(d)}(1)\sum_i \eta_i \partial_{iI(d)}.
$$

ここで (3.25) を繰り返し用いると, この式は次のように計算できる.

$$
\begin{aligned}
&\sum_i \eta_i \zeta_{I(1)}(d-2)\cdots\zeta_{I(d-1)}(0)\partial_{iI(d)} \\
&= \\
&\vdots \\
&= \sum_{1 \le i_1, \dots, i_d \le n} \eta_{i_1} \cdots \eta_{i_d} \partial_{i_1 I(1)} \cdots \partial_{i_d I(d)} \\
&= \sum_{\sharp K = d, \sigma \in \mathfrak{S}_d} \frac{1}{K!} \eta_{K(1)} \cdots \eta_{K(d)} \partial_{K(\sigma(1))I(1)} \cdots \partial_{K(\sigma(d))I(d)} \\
&= (-1)^d \sum_{\sharp K = d} \frac{1}{K!} \sum_{\sharp J = d} \frac{1}{J!} b_{J(1)} \cdots b_{J(d)} f_{KJ} \, {}^t f_{KI}(\partial).
\end{aligned}
$$

上式の後半では (3.23) と同様の計算をしている.

第二に,

$$\begin{aligned}
&\zeta_{I(1)}(d-1)\cdots\zeta_{I(d)}(0)\\
&= \left\{\sum_{i_1} b_{i_1}(\mathrm{ad}(H_{I(1)i_1}) + (d-1)\delta_{I(1)i_1})\right\} \times\cdots\times \left\{\sum_{i_d} b_{i_d}(\mathrm{ad}(H_{I(d)i_d}) + 0\delta_{I(d)i_d})\right\}\\
&= \sum_{\sharp J=d, \sigma\in\mathfrak{S}_d} \frac{1}{J!} b_{J(\sigma(1))}\cdots b_{J(\sigma(d))}\\
&\qquad \times \left\{\mathrm{ad}(H_{I(1)J(\sigma(1))}) + (d-1)\delta_{I(1)J(\sigma(1))}\right\} \times\cdots\times \left\{\mathrm{ad}(H_{I(d)J(\sigma(d))}) + 0\delta_{I(d)J(\sigma(d))}\right\}\\
&= \sum_{\sharp J=d} \frac{1}{J!} b_{J(1)}\cdots b_{J(d)}\, \mathrm{ad}(\mathrm{Per}[H_{I(t)J(s)} + (d-t)\delta_{I(t)J(s)}]_{1\le s,t\le d}).
\end{aligned}$$

これら二つは同じ J に対する summandsが一致しているはずだから, それより (1) が得られる.

[(2) の証明]

まず (3.24) より

$$\begin{aligned}
\sum_i \partial_{ij}\eta_i &= \sum_i \eta_i\partial_{ij} + \sum_i (b_i\delta_{ji} - b_j\delta_{ii})\\
&= \zeta_j + (1-n)b_j \qquad = \zeta_j(1-n),
\end{aligned}$$

である. 今度は $\zeta_{I(1)}(1-n-0)\zeta_{I(2)}(1-n-1)\cdots\zeta_{I(d)}(1-n-(d-1))$ を 2 通りに計算する. 第一に (1) と同様の計算で,

$$\begin{aligned}
\zeta_{I(1)}(1-n)\cdots\zeta_{I(d)}(1-n-(d-1)) &= \sum_{1\le i_1,\dots,i_d\le n} \partial_{i_1I(1)}\cdots\partial_{i_dI(d)}\eta_{i_1}\cdots\eta_{i_d}\\
&= (-1)^d \sum_{\sharp K=d}\frac{1}{K!}\sum_{\sharp J=d}\frac{1}{J!} b_{J(1)}\cdots b_{J(d)}\, {}^t f_{KI}(\partial) f_{KJ},
\end{aligned}$$

が得られ, 第二にも (1) と同様にして

$$\begin{aligned}
&\zeta_{I(1)}(1-n)\cdots\zeta_{I(d)}(1-n-(d-1))\\
&= \sum_{\sharp J=d}\frac{1}{J!} b_{J(1)}\cdots b_{J(d)}\, \mathrm{ad}(\mathrm{Per}[H_{I(t)J(s)} + (2-n-t)\delta_{I(t)J(s)}]_{1\le s,t\le d})
\end{aligned}$$

が得られる. これら 2 式で J を止めて summands を比べると (2) を得る. □

Lemma 3.12 $\sharp I = \sharp J = d$ のとき,

$$\text{(1)}\ \Psi_\lambda({}^t f_{IJ}) = (-1)^d \sum_{\sharp K=d}\frac{1}{K!}\, {}^t f_{KI}(\partial)\, \mathrm{ad}\left(\mathrm{Per}[H_{J(t)K(s)} + (\lambda^0 + n - 1 + d - t)\delta_{J(t)K(s)}]_{st}\right),$$

$$\text{(2)}\ \Psi_\lambda({}^t f_{IJ}) = (-1)^d \sum_{\sharp K=d}\frac{1}{K!}\, \mathrm{ad}\left(\mathrm{Per}[H_{J(t)K(s)} + (\lambda^0 - t + 1)\delta_{J(t)K(s)}]_{st}\right)\, {}^t f_{KI}(\partial).$$

Proof. [(1) の証明]

まず $(\mu_1,\dots\mu_n) = (b_1,\dots,b_n)[\partial_{ij}]_{1\le i,j\le n}$ とおくと, (3.23) より

$$\mu_{I(1)}\cdots\mu_{I(d)} = (-1)^d \sum_{\sharp J=d}\frac{1}{J!} b_{J(1)}\cdots b_{J(d)}\, {}^t f_{IJ}(\partial),$$

である．次に，$(\xi_1,\dots,\xi_n)=(b_1,\dots,b_n)[\Psi_\lambda(G_{ij})]_{1\le i,j\le n}$ とおくと，

$$\xi_{I(1)}\cdots\xi_{I(d)} = \sum_{\sharp J=d}\frac{1}{J!}b_{J(1))}\cdots b_{J(d)}\Psi_\lambda({}^tf_{JI}), \tag{3.26}$$

である．ここで ξ_j の表示をふた通り与える．まず，

$$\begin{aligned}
\xi_j &= \sum_i b_i\Psi_\lambda(G_{ij})\\
&= \sum_i b_i(-\sum_{kl}x_{kl}\partial_{il}\partial_{kj}+\lambda^0\partial_{ij})\\
&= \sum_i b_i\left(\sum_l \mathrm{ad}(H_{jl})\partial_{il}+\lambda^0\partial_{ij}\right)\\
&= \sum_{il} b_i(\mathrm{ad}(H_{jl})+\lambda^0\delta_{jl})\partial_{il}\\
&= \sum_l(\mathrm{ad}(H_{jl})+\lambda^0\delta_{jl})\mu_l,
\end{aligned}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned}
[\mathrm{ad}(H_{jl}),\mu_i] &= [-\sum_k x_{kl}\partial_{kj},\sum_m b_m\partial_{mi}]\\
&= \sum_{km} b_m(\delta_{km}\delta_{li}-\delta_{ki}\delta_{lm})\partial_{kj} \qquad =\delta_{li}\mu_j-b_l\partial_{ij},
\end{aligned}\tag{3.27}$$

だから，これを用いると ξ_j と μ_i の交換関係が得られ

$$\begin{aligned}
\xi_j\mu_i &= \sum_l(\mathrm{ad}(H_{jl})+\lambda^0\delta_{jl})\mu_l\mu_i\\
&= \sum_l \mu_i(\mathrm{ad}(H_{jl})+\lambda^0\delta_{jl})\mu_l+\sum_l(\delta_{li}\mu_j-b_l\partial_{ij})\mu_l\\
&= \mu_i\xi_j+\mu_i\mu_j-\sum_{lm}b_lb_m\partial_{ml}\cdot\partial_{ij} \qquad =\mu_i(\xi_j+\mu_j),
\end{aligned}$$

となる．さらに ξ_j のふたつ目の表示が (3.27) を用いて次のように得られる．

$$\begin{aligned}
\xi_j &= \sum_l\mu_l(\mathrm{ad}(H_{jl})+\lambda^0\delta_{jl})+\sum_l(\delta_{ll}\mu_j-b_l\partial_{lj})\\
&= \sum_l\mu_l(\mathrm{ad}(H_{jl})+\lambda^0\delta_{jl})+(n-1)\mu_j\\
&= \sum_l\mu_l(\mathrm{ad}(H_{jl})+(\lambda^0+n-1)\delta_{jl}),
\end{aligned}$$

次に $(\xi_1(u),\dots,\xi_n(u))=(\mu_1,\dots,\mu_n)[\mathrm{ad}(H_{ji})+(\lambda^0+n-1+u)\delta_{ji}]_{1\le i,j\le n}$ と置くと，

$$\begin{aligned}
\xi_j(u) &= \sum_i\mu_i(\mathrm{ad}(H_{ji})+(\lambda^0+n-1+u)\delta_{ij})\\
&= \xi_j+\sum_i\mu_iu\delta_{ij} \qquad =\xi_j+u\mu_j,
\end{aligned}$$

であるから, $\xi_j(u)$ と μ_i の交換関係:

$$\begin{aligned}\xi_j(u)\mu_i &= (\xi_j + u\mu_j)\mu_i \\ &= \mu_i\xi_j + \mu_i\mu_j + u\mu_i\mu_j = \mu_i\xi_j(u+1),\end{aligned} \tag{3.28}$$

が得られる.

さて $\sharp I = d$ に対して $\xi_{I(1)}\cdots\xi_{I(d)}$ を (3.26) とは別の方法で計算する.

$$\begin{aligned}\xi_{I(1)}\cdots\xi_{I(d)} &= \xi_{I(1)}(0)\cdots\xi_{I(d)}(0) \\ &= \xi_{I(1)}(0)\cdots\xi_{I(d-1)}(0)\sum_i \mu_i(\mathrm{ad}(H_{I(d)i}) + (\lambda^0+n-1)\delta_{I(d)i}).\end{aligned}$$

ここで (3.28) を繰り返し用いると上の式は次のように計算できる.

$$\begin{aligned}
&\sum_i \mu_i\xi_{I(1)}(1)\cdots\xi_{I(d-1)}(1)\left\{\mathrm{ad}(H_{I(d)i}) + (\lambda^0+n-1+0)\delta_{I(d)i}\right\} \\
&= \\
&\vdots \\
&= \sum_{1\le i_1,\dots,i_d\le n} \mu_{i_1}\cdots\mu_{i_d}\left\{\mathrm{ad}(H_{I(1)i_1}) + (\lambda^0+n-1+(d-1))\delta_{I(1)i_1}\right\}\times\cdots \\
&\qquad \cdots\times\left\{\mathrm{ad}(H_{I(d)i_d}) + (\lambda^0+n-1+0)\delta_{I(d)i_d}\right\} \\
&= \sum_{\sharp K=d,\sigma\in\mathfrak{S}_d} \frac{1}{K!}\mu_{K(\sigma(1))}\cdots\mu_{K(\sigma(d))} \\
&\qquad \times\left\{\mathrm{ad}(H_{I(1)K(\sigma(1))}) + (\lambda^0+n-1+(d-1))\delta_{I(1)K(\sigma(1))}\right\}\times\cdots \\
&\qquad \cdots\times\left\{\mathrm{ad}(H_{I(d)K(\sigma(d))}) + (\lambda^0+n-1+0)\delta_{I(d)K(\sigma(d))}\right\} \\
&= \sum_{\sharp K=d}\frac{1}{K!}\mu_{K(1)}\cdots\mu_{K(d)}\,\mathrm{ad}\left(\mathrm{Per}[H_{I(t)K(s)} + (\lambda^0+n-1+d-t)\delta_{I(t)K(s)}]_{1\le s,t\le d}\right) \\
&= (-1)^d\sum_{\sharp K=d}\frac{1}{K!}\left(\sum_{\sharp J=d}\frac{1}{J!}b_{J(1)}\cdots b_{J(d)}\,{}^t f_{KJ}(\partial)\right) \\
&\qquad \times\mathrm{ad}\left(\mathrm{Per}[H_{I(t)K(s)} + (\lambda^0+n-1+d-t)\delta_{I(t)K(s)}]_{1\le s,t\le d}\right).
\end{aligned}$$

この式と (3.26) を J を止めて比較して, I と J を交換すると (1) を得る.

[(2) の証明]

また別の方法で $\xi_{I(1)}\cdots\xi_{I(d)}$ を計算する.

$$\begin{aligned}
&\xi_{I(1)}\cdots\xi_{I(d)} \\
&= \sum_i(\mathrm{ad}(H_{I(1)i}) + (\lambda^0-0)\delta_{I(1)i})\mu_i\xi_{I(2)}(0)\cdots\xi_{I(d)}(0) \\
&= \sum_i\left\{\mathrm{ad}(H_{I(1)i}) + (\lambda^0-0)\delta_{I(1)i}\right\}\xi_{I(2)}(-1)\cdots\xi_{I(d)}(-1)\mu_i \\
&= \\
&\vdots \\
&= \sum_{1\le i_1,\dots,i_d\le n}\left\{\mathrm{ad}(H_{I(1)i_1}) + (\lambda^0-0)\delta_{I(1)i_1}\right\}\times\cdots\times\left\{\mathrm{ad}(H_{I(d)i_d}) + (\lambda^0-(d-1))\delta_{I(d)i_d}\right\} \\
&\qquad \times\mu_{i_1}\cdots\mu_{i_d}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\sharp K=d, \sigma\in\mathfrak{S}_d} \left\{\mathrm{ad}(H_{I(1)K(\sigma(1))}) + (\lambda^0 - 0)\delta_{I(1)K(\sigma(1))}\right\} \times \cdots$$

$$\cdots \times \left\{\mathrm{ad}(H_{I(d)K(\sigma(d))}) + (\lambda^0 - (d-1))\delta_{I(d)K(\sigma(d))}\right\} \cdot \frac{1}{K!}\mu_{K(1)}\cdots\mu_{K(d)}$$

$$= \sum_{\sharp K=d} \frac{1}{K!}\,\mathrm{ad}\left(\mathrm{Per}[H_{I(t)K(s)} + (\lambda^0 - t + 1)\delta_{I(t)K(s)}]_{1\le s,t\le d}\right)$$

$$\times(-1)^d \sum_{\sharp J=d} \frac{1}{J!} b_{J(1)}\cdots b_{J(d)}\, {}^t f_{KJ}(\partial).$$

この式と (3.26) を J を止めて比較して, I と J を交換すると (2) を得る. □

Proof of Theorem 3.9. (3.16) は Lemma 3.11 (1) において $I = J$ として $I!$ で割って I で和をとれば得られる. (3.18) も同様に証明できる. また (3.20) については, Lemma 3.12 (1) と Lemma 3.11 (1) より

$$\begin{aligned}
\sum_{\sharp I=\sharp J=d} \Psi_\lambda\left(\frac{f_{IJ}\,{}^t f_{IJ}}{I!J!}\right) &= \sum_{\sharp I=\sharp J=d} \frac{f_{IJ}}{I!J!}\cdot(-1)^d \sum_{\sharp K=d} \frac{1}{K!}\,{}^t f_{KI}(\partial)\cdot(-1)^d \Psi_{2\lambda+2\rho}(u^T_{JK}) \\
&= (-1)^d \sum_{\sharp J=\sharp K=d} \frac{1}{J!K!}\left\{\sum_{\sharp I=d}\frac{1}{I!} f_{IJ}\,{}^t f_{IK}(\partial)\right\}\Psi_{2\lambda+2\rho}(u^T_{JK}) \\
&= (-1)^d \sum_{\sharp J=\sharp K=d} \frac{1}{J!K!}\,\mathrm{ad}(u^T_{KJ})\Psi_{2\lambda+2\rho}(u^T_{JK}),
\end{aligned}$$

と証明できる. (3.22) も, Lemma 3.12 (2) と Lemma 3.11 (2) より同様に示される.

残りの等式を証明するために (A_{p+q-1}, p) 型の場合の証明と同じく Definition 2.2 で定めた anti-involutions σ, s, τ を用いる. では (3.17) を証明する. 式 (3.16) の左辺は $D^L_{\mathfrak{n}^+}$ に属しているから τ-不変であり,

$$\begin{aligned}
\sigma\tau((3.16)\,\text{左辺}) &= \sigma((3.16)\,\text{左辺}) \\
&= \sigma\left(\sum_{IJ} \frac{f_{IJ}\,{}^t f_{IJ}(\partial)}{I!J!}\right) \\
&= (-1)^d \sum_{IJ} \frac{{}^t f_{IJ}(\partial) f_{IJ}}{I!J!} \qquad = (-1)^d((3.17)\,\text{左辺}),
\end{aligned}$$

となる. 次に $\sigma\tau$ が automorphism であることに注意すると,

$$\begin{aligned}
\sigma\tau(\Psi_\mu(u^T_{IJ})) &= \sigma\tau(\Psi_\mu(\mathrm{Per}[-H_{I(t)J(s)} - (d-t)\delta_{I(t)J(s)}]_{1\le s,t\le n})) \\
&= \Psi_{-\mu-2\rho}(\mathrm{Per}[s({}^t(-H_{I(t)J(s)} - (d-t)\delta_{I(t)J(s)}))]_{1\le s,t\le n}) \\
&= \Psi_{-\mu-2\rho}(\mathrm{Per}[H_{J(s)I(t)} - (d-t)\delta_{J(s)I(t)}]_{1\le s,t\le n}) \\
&= \Psi_{-\mu}(\mathrm{Per}[H_{J(s)I(t)} - (d-t+n-1)\delta_{J(s)I(t)}]_{1\le s,t\le n}) \\
&= (-1)^d \Psi_{-\mu}(v_{JI}),
\end{aligned} \tag{3.29}$$

だから, $u \in U(\mathfrak{l})$ の時, $\mathrm{ad}(u) = \Psi_0(u)$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned}
\sigma\tau((3.16)\,\text{右辺}) &= \sigma\tau(\sum_{\sharp I=d} \frac{\mathrm{ad}(u^T_{II})}{I!}) \\
&= (-1)^d \sum_{\sharp I=d} \frac{\mathrm{ad}(v_{II})}{I!} \qquad = (-1)^d((3.17)\,\text{右辺}),
\end{aligned}$$

これらをまとめて (3.17) が示された. 同様にして, (3.15) も (3.18) から証明できる.

最後に (3.21) を証明する. (3.19) も同様に証明できる. 式 (3.20) の左辺は $D^L_{\mathfrak{n}+}$ に属しているから τ-不変であり,

$$\begin{aligned}\sigma\tau((3.20)\text{左辺}) &= \sigma((3.20)\text{左辺}) \\ &= \sigma(\sum_{\sharp I=\sharp J=d}\Psi_\lambda\left(\frac{f_{IJ}\,{}^tf_{IJ}}{I!J!}\right)) \\ &= \sum_{\sharp I=\sharp J=d}\Psi_{-\lambda-2\rho}\left(\frac{{}^tf_{IJ}f_{IJ}}{I!J!}\right).\end{aligned}$$

一方 $\sigma\tau$ が同型であることと, (3.29) より,

$$\begin{aligned}\sigma\tau((3.20)\text{右辺}) &= \sigma\tau((-1)^d\sum_{\sharp I=\sharp J=d}\frac{1}{I!J!}\operatorname{ad}(u^T_{IJ})\Psi_{2\lambda+2\rho}(u^T_{JI})) \\ &= (-1)^d\sum_{\sharp I=\sharp J=d}\frac{1}{I!J!}(-1)^d\operatorname{ad}(v_{JI})\cdot(-1)^d\Psi_{-2\lambda-2\rho}(v_{IJ}),\end{aligned}$$

が得られる. 上の 2 式を比較し, λ を $-\lambda-2\rho$ にとりかえると (3.21) が証明される. □

3.4 $(\mathrm{D}_n, 1)$ or $O_{2n-1}\otimes GL_1$

$$\mathfrak{g}=\left\{\begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^tA\end{pmatrix}\in\mathfrak{gl}(2n,\mathbf{C})\;\middle|\;\begin{array}{l}A\in\mathfrak{gl}(n,\mathbf{C}),\\ B,C\in\mathrm{Alt}(n,\mathbf{C})\end{array}\right\},$$

と定める. $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の対角行列からなる集合とする. $\mathfrak{g}$ の基底を §§3.3 とは異なる方法で定める.

$$H_{ij}=E_{\bar{i}\bar{j}}-E_{\overline{n+j},\overline{n+i}}\quad(i,j\in\mathbf{Z}_{>0}),$$

ここで $\bar{i}$ は $1\le\bar{i}\le 2n$ かつ $i\equiv\bar{i}\pmod{2n}$ を満たす整数を表す. すると全ての H_{ij} は $\mathfrak{g}$ に属し,

$$\begin{aligned}H_{n+i,n+j} &= -H_{ji}, \\ H_{i,n+i} &= 0, \\ [H_{ij},H_{kl}] &= \delta_{\bar{j}\bar{k}}H_{il}-\delta_{\bar{l}\bar{i}}H_{kj}-\delta_{\bar{j}\,\overline{n+l}}H_{i,n+k}+\delta_{\bar{i}\,\overline{n+k}}H_{n+l,j},\end{aligned}$$

を満たす.

$\varepsilon_i\in\mathfrak{h}^*$ $(i\in\{1,\ldots,n\})$ を $\varepsilon_i(H_{jj})=\delta_{ij}$ $(j\in\{1,\ldots,n\})$ で定める. ルートシステムな

どの情報を以下にまとめる.

$$
\begin{array}{lcl}
\Pi & = & \{\varepsilon_1-\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n,\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n\}, \\
\Delta^+ & = & \{\varepsilon_i\pm\varepsilon_j \mid 1\le i<j\le n\}, \\
H_{ij} & : & (\varepsilon_i-\varepsilon_j)\text{-root vector } (1\le i,j\le n,\ i\ne j), \\
H_{i,n+j} & : & (\varepsilon_i+\varepsilon_j)\text{-root vector } (1\le i,j\le n,\ i\ne j), \\
H_{n+j,i} & : & -(\varepsilon_i+\varepsilon_j)\text{-root vector } (1\le i,j\le n,\ i\ne j), \\
\Pi_L & = & \Pi\setminus\{\varepsilon_1-\varepsilon_2\}, \\
\Delta_L^+ & = & \{\varepsilon_i\pm\varepsilon_j \mid 1<i<j\le n\}, \\
\varpi_{i_0} & = & \varepsilon_1, \\
\rho & = & (n-1)\varpi_{i_0}, \\
\langle X,Y\rangle & = & \mathrm{Tr}(XY)/2 \quad (X,Y\in\mathfrak{g}), \\
\text{C. B.} & : & \{H_{ij}\mid 1\le i,j\le n\}\cup\{H_{i,n+j}\mid 1\le i<j\le n\} \\
 & & \cup\{H_{n+j,i}\mid 1\le i<j\le n\}.
\end{array}
$$

$M=\{1,\ldots,2n\}\setminus\{1,n+1\}$ とおく. 部分代数 $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{n}^+$, $\mathfrak{l}$ は次のようになる.

$$
\begin{array}{rcl}
\mathfrak{l} & = & \mathrm{span}_{\mathbf{C}}\{H_{11},H_{ij}(1<i,j\le n),H_{i,n+j}(1<i<j\le n),H_{n+j,i}(1<i<j\le n)\}, \\
\mathfrak{n}^+ & = & \mathrm{span}_{\mathbf{C}}\{H_{1j}(j\in M)\}, \\
\mathfrak{p} & = & \mathfrak{l}+\mathfrak{n}^+.
\end{array}
$$

Definition 2.2 における ^{t} により,

$$ {}^tH_{ij}=H_{ji}, $$

である. $i\in M$ に対して, $x_i=H_{i1}$, $\partial_i=\partial/\partial x_i$ と定めると, $\{x_i\}$ は $\mathfrak{n}^+$ の座標系を与える. また $x_{\bar{i}}$ なども x_i と表すことにする. Lemma 2.1 により次の補題が得られる.

Lemma 3.13 (1) $\Psi_\lambda(H_{11})=-\sum_{k\in M}x_k\partial_k+\lambda^0$,

(2) $\Psi_\lambda(H_{ij})=x_i\partial_j-x_{n+j}\partial_{n+i}\quad(i,j\in M)$,

(3) $\Psi_\lambda(H_{1j})=-\sum_{k\in M}x_k\partial_k\partial_j+\dfrac{1}{2}\sum_{k\in M}x_{n+j}\partial_k\partial_{n+k}+\lambda^0\partial_j\quad(j\in M)$. □

ウェイト $-2\varpi_{i_0}$ を持つ相対不変式 $f\in\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ は

$$ f=x_2x_{n+2}+x_3x_{n+3}+\cdots+x_nx_{2n}, $$

で与えられ,

$$ {}^tf(\partial)=\partial_2\partial_{n+2}+\cdots+\partial_n\partial_{2n}, $$

である.

Theorem 3.14

$$
\begin{array}{rcl}
u_1 & = & -H_{11}, \\
v_1 & = & -H_{11}+2n-2, \\
u_2 & = & \dfrac{1}{4}H_{11}(H_{11}-2n+4)-\dfrac{1}{4}c, \\
v_2 & = & \dfrac{1}{4}(H_{11}-2)(H_{11}-2n+2)-\dfrac{1}{4}c,
\end{array}
$$

と定める．ただし，$c \in U(\mathfrak{l})$ は $\langle , \rangle$ に関する $[\mathfrak{l},\mathfrak{l}]$ の *Casimir element* である．すると

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in M} x_j\partial_j &= \mathrm{ad}(u_1),\\
\sum_{j\in M} \partial_j x_j &= \mathrm{ad}(v_1),\\
f\,{}^tf(\partial) &= \mathrm{ad}(u_2),\\
{}^tf(\partial)f &= \mathrm{ad}(v_2),
\end{aligned}$$

であり，さらに，

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in M} \Psi_\lambda(H_{j1}H_{1j}) &= -\frac{1}{2}\Psi_0(u_1)\Psi_{2\lambda+2\rho}(u_1) - \frac{1}{2}\,\mathrm{ad}(c),\\
\sum_{j\in M} \Psi_\lambda(H_{1j}H_{j1}) &= -\frac{1}{2}\Psi_0(v_1)\Psi_{2\lambda+2\rho}(v_1) - \frac{1}{2}\,\mathrm{ad}(c),\\
\Psi_\lambda(f\,{}^tf) &= \Psi_0(u_2)\Psi_{2\lambda+2\rho}(u_2),\\
\Psi_\lambda({}^tff) &= \Psi_0(v_2)\Psi_{2\lambda+2\rho}(v_2).
\end{aligned}$$

Proof. 相対不変式 f に関する証明は [9] でなされている．オイラー作用素に対応する Ψ_λ-analogue の証明も直接計算してできる． □

3.5 $(\mathrm{B}_n, 1)$ or $O_{2n} \otimes GL_1$

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -{}^tb & A & B \\ -{}^ta & C & -{}^tA \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(2n+1, \mathbf{C}) \;\middle|\; \begin{array}{l} A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbf{C}), \\ B, C \in \mathrm{Alt}(n,\mathbf{C}), \\ a, b \in \mathbf{C}^n \end{array} \right\}$$

とおき，$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の対角行列からなる集合とする．次のように $\mathfrak{g}$ の行・列の番号付けを 0 から始めて，$\mathfrak{g}$ の基底を §§3.4 のものを拡張して定める．

$$\begin{aligned}
H_{ij} &= E_{\bar{i}\bar{j}} - E_{\overline{n+j},\overline{n+i}} \quad (i,j \in \mathbf{Z}_{>0}),\\
g_i &= E_{0\bar{i}} - E_{\overline{n+i}0} \quad (i \in \mathbf{Z}_{>0}),
\end{aligned}$$

とおく．$\bar{i}$ は §§3.4 と同じである．すべての H_{ij} と g_i は $\mathfrak{g}$ に属し，

$$\begin{aligned}
H_{n+i,n+j} &= -H_{ji},\\
H_{i,n+i} &= 0,\\
g_{n+i} &= -{}^tg_i,\\
[H_{ij}, H_{kl}] &= \delta_{\bar{j}\bar{k}}H_{il} - \delta_{\bar{l}\bar{i}}H_{kj} - \delta_{\bar{j}\,\overline{n+l}}H_{i,n+k} + \delta_{\bar{i}\,\overline{n+k}}H_{n+l,j},\\
[H_{ij}, g_k] &= -\delta_{\bar{i}\bar{k}}g_j + \delta_{\bar{k}\,\overline{n+j}}g_{n+i},\\
[g_i, g_j] &= H_{n+j,i},
\end{aligned}$$

を満たす．

$\varepsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ $(i \in \{1,\dots,n\})$ を $\varepsilon_i(H_{jj}) = \delta_{ij}$ $(j \in \{1,\dots,n\})$ で定める．ルートシステムなどの情報を以下に記す．

$$
\begin{array}{lcl}
\Pi & = & \{\varepsilon_1-\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n,\varepsilon_n\},\\
\Delta^+ & = & \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le n\} \cup \{\varepsilon_i \mid 1 \le i \le n\},\\
H_{ij} & : & (\varepsilon_i - \varepsilon_j)\text{-root vector } (1 \le i,j \le n,\ i \ne j),\\
H_{i,n+j} & : & (\varepsilon_i + \varepsilon_j)\text{-root vector } (1 \le i < j \le n),\\
H_{n+j,i} & : & -(\varepsilon_i + \varepsilon_j)\text{-root vector } (1 \le i < j \le n),\\
g_{n+i} & : & \varepsilon_i\text{-root vector } (1 \le i \le n),\\
g_i & : & -\varepsilon_i\text{-root vector } (1 \le i \le n),\\
\Pi_L & = & \Pi \setminus \{\varepsilon_1-\varepsilon_2\},\\
\Delta_L^+ & = & \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 < i < j \le n\} \cup \{\varepsilon_i \mid 1 < i \le n\},\\
\varpi_{i_0} & = & \varepsilon_1,\\
2\rho & = & (2n-1)\varpi_{i_0},\\
\langle X,Y\rangle & = & \mathrm{Tr}(XY)/2 \quad (X,Y \in \mathfrak{g}),\\
\text{C. B.} & : & \{H_{ij} \mid 1 \le i,j \le n\} \cup \{H_{i,n+j} \mid 1 \le i < j \le n\}\\
 & & \quad \cup \{H_{n+j,i} \mid 1 \le i < j \le n\} \cup \{\sqrt{-2}g_i \mid 1 \le i \le 2n\}.
\end{array}
$$

部分代数 $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{n}^+$, $\mathfrak{l}$ は次のようになる．ただし $M = \{1,\dots,2n\} \setminus \{1,n+1\}$ は §§3.4 に同じである．

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{l} &= \mathrm{span}_{\mathbf{C}}\{H_{11}, H_{ij}(1<i,j\le n), H_{i,n+j}(1<i<j\le n), H_{n+j,i}(1<i<j\le n),\\
&\qquad g_i(i \in M)\},\\
\mathfrak{n}^+ &= \mathrm{span}_{\mathbf{C}}\{H_{1j}(j \in M), g_{n+1}\},\\
\mathfrak{p} &= \mathfrak{l} + \mathfrak{n}^+.
\end{aligned}
$$

Definition 2.2 における ^{t} により，

$$
{}^tH_{ij} = H_{ji}, \qquad {}^tg_i = -g_{n+i},
$$

である．$i \in M$ に対して，$x_i = H_{i1}$, $x_0 = g_1$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $\partial_0 = \partial/\partial x_0$ と定めると，$\{x_i | i \in M_0\}$ は $\mathfrak{n}^+$ の座標系を与える．ただし，$M_0 = M \cup \{0\}$ である．Lemma 2.1 により次の補題を得る．

Lemma 3.15 (1) $\Psi_\lambda(H_{11}) = -\sum_{j \in M_0} x_j\partial_j + \lambda^0$,

(2) $\Psi_\lambda(H_{ij}) = x_i\partial_j - x_{n+j}\partial_{n+i} \quad (i,j \in M)$,

(3) $\Psi_\lambda(g_i) = x_0\partial_i - x_i\partial_0 \quad (i \in M)$,

(4) $\Psi_\lambda(H_{1j}) = -\sum_{k \in M_0} x_k\partial_k\partial_j + \frac{1}{2}x_{n+j}\left(\sum_{k \in M}\partial_k\partial_{n+k} + \partial_0\partial_0\right) + \lambda^0\partial_j$,

(5) $\Psi_\lambda(g_{n+1}) = \sum_{k \in M_0} x_k\partial_k\partial_0 - \frac{1}{2}x_0\left(\sum_{k \in M}\partial_k\partial_{n+k} + \partial_0\partial_0\right) - \lambda^0\partial_0$. □

ウェイト $-2\varpi_{i_0}$ を持つ相対不変式 $f \in \mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ は

$$
f = x_2x_{n+2} + x_3x_{n+3} + \cdots + x_nx_{2n} + \frac{1}{2}x_0^2,
$$

で与えられ，

$$
{}^tf(\partial) = \partial_2\partial_{n+2} + \cdots + \partial_n\partial_{2n} + \frac{1}{2}\partial_0\partial_0,
$$

である．

Theorem 3.16

$$
\begin{aligned}
u_1 &= -H_{11},\\
v_1 &= -H_{11}+2n-1,\\
u_2 &= \frac{1}{4}H_{11}(H_{11}-2n+3)-\frac{1}{4}c,\\
v_2 &= \frac{1}{4}(H_{11}-2)(H_{11}-2n+1)-\frac{1}{4}c,
\end{aligned}
$$

と定める．ただし，$c\in U(\mathfrak{l})$ は $\langle,\rangle$ に関する $[\mathfrak{l},\mathfrak{l}]$ の *Casimir element* である．すると

$$
\begin{aligned}
\sum_{j\in M_0} x_j\partial_j &= \mathrm{ad}(u_1),\\
\sum_{j\in M_0} \partial_j x_j &= \mathrm{ad}(v_1),\\
f\,{}^t f(\partial) &= \mathrm{ad}(u_2),\\
{}^t f(\partial) f &= \mathrm{ad}(v_2),
\end{aligned}
$$

であり，さらに，

$$
\begin{aligned}
\Psi_\lambda(\sum_{j\in M} H_{j1}H_{1j}-g_1g_{n+1}) &= -\frac{1}{2}\Psi_0(u_1)\Psi_{2\lambda+2\rho}(u_1)-\frac{1}{2}\mathrm{ad}(c),\\
\Psi_\lambda(\sum_{j\in M} H_{1j}H_{j1}-g_{n+1}g_1) &= -\frac{1}{2}\Psi_0(v_1)\Psi_{2\lambda+2\rho}(v_1)-\frac{1}{2}\mathrm{ad}(c),\\
\Psi_\lambda(f\,{}^t f) &= \Psi_0(u_2)\Psi_{2\lambda+2\rho}(u_2),\\
\Psi_\lambda({}^t f f) &= \Psi_0(v_2)\Psi_{2\lambda+2\rho}(v_2).
\end{aligned}
$$

Proof. 相対不変式 f に関する証明は [9] でなされている．オイラー作用素に対応する Ψ_λ-analogue の証明も直接計算してできる． □

References

[1] Bourbaki, N., *Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5, et 6*, Hermann, Paris (1968).

[2] Capelli, A., *Sur les opérations dans la théorie des formes algébriques*, Math. Ann. **37** (1890), 1–37.

[3] Howe, R. and Umeda, T., *The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions*, Math. Ann. **290** (1991), 565–619.

[4] Humphreys, J. E., *Finite and infinite dimensional modules for semisimple Lie algebra*, Lie theories and their applications, Queen's papers in Pure and Appl. Math. No. 48, Queen's Univ., Kingston, Ont., (1978), 1–64.

[5] Noumi, M., Umeda, T. and Wakayama, M., *A quantum analogue of the Capelli identity and an elementary differential calculas on $GL_q(n)$*, Duke Math. J. **76** (1994), 567–594.

[6] Turnbull, H. W., *Symmetric determinants and the Cayley and Capelli operators*, Proc. Edinb. Math. Soc. **8** (1948), 76–86.

[7] Umeda, T., *On Turnbull identity for skew-symmetric matrices*, Proc. Edinb. Math. Soc. **43** (2000), 379–393.

[8] Wachi, A., *Contravariant forms on generalized Verma modules and b-functions*, Hiroshima Math. J. **29** (1999), 193–225.

[9] Wachi, A., *Capelli type identities on certain scalar generalized Verma modules*, J. Math. Kyoto **40** (2000).