数理解析研究所講究録
1190 巻 2001 年 107-125

複素鏡映群に付随した Green 関数
— D_n-型を中心にして —

東京理科大 理工　庄司俊明 (Toshiaki Shoji)
Science University of Tokyo

1. はじめに

Green 関数は, $GL_n(\mathbf{F}_q)$ の既約指標を記述するために, 1955 年, Green [G] によって導入された. Green 関数は本質的には Kostka 多項式であり, 2種類の対称関数, Schur 関数と Hall-Littlewood 関数の間の遷移行列として得られる. Green 関数の一般化である, 有限簡約群に付随した Green 関数が, 1976 年 Deligne と Lusztig [DL] により定義された. この Green 関数は, 交差 cohomology による幾何的な表示を持ち, それを利用して, Green 関数を計算するアルゴリズムが得られる. 例外型の有限簡約群に対しては, Green 関数が計算されている.

しかし, 特に古典群の場合などアルゴリズムだけでは, 定性的な性質を導くのは難しい. $GL_n(\mathbf{F}_q)$ の場合は, Green 関数の記述に対称関数を中心とする組合せ論的な手法が有効に働いた. GL_n の手法を Sp_{2n} や SO_n などの古典群の場合に拡張することができれば, 見通しがよくなるだろう. ところで, 古典群の場合, Green 関数を決定するアルゴリズムは, Weyl 群の既約指標に関するデータと, 巾単 symbol と呼ばれる, 組合せ論的な対象によって記述される. 古典群の本体は必要ではないのである. 一方, B_n 型 Weyl 群の拡張として, 複素鏡映群 $G(e,1,n) = \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^n$ が考えられる. $e=1$ の場合が対称群 $\mathfrak{S}_n$, $e=2$ の場合が B_n 型 Weyl 群に一致する. 巾単 symbol の概念は $G(e,1,n)$ にまで拡張され, Green 関数を求めるアルゴリズムはこの場合にも意味を持つ. このアルゴリズムを適用して得られる新しい関数を, $G(e,1,n)$ に付随した Green 関数という.

講演では, $G(e,1,n)$ に付随した Green 関数に対する組合せ論的なアプローチを紹介した. すなわち, $G(e,1,n)$ に付随した, Schur 関数と Hall-Littlewood 関数が構成され, Schur 関数と Hall-Littlewood 関数の間の遷移行列として Green 関数が構成できる. ここで Schur 関数は既に Macdonald の教科書 [M] に与えられているもので, Hall-Littlewood 関数の構成が本質的である. 詳しい内容については, [S2] を参照して下さい.

$G(e,1,n)$ には部分群として複素鏡映群 $G(e,p,n)$ が含まれる. ここに, p は e の約数. 特に, $G(e,e,n)$ は D_n 型の Weyi 群の拡張になっている. ($e=2$ の場合, すなわち $G(2,2,n)$ が D_n 型 Weyl 群に一致する.) これらの群に対しても, Green 関数が定義され, $G(e,1,n)$ の場合と同様の組合せ論的なアプローチが可能になる. 講演では, D_n 型の Green 関数の構成についても少し触れる予定だったが, 時間の関係でできなかった. 講演で話した $G(e,1,n)$ の場合については [S3] に日本語の解説を書いたので, ここでは繰り返さないことにして, 講演で触れることのできなかった D_n 型の Green 関数に話を絞って解説する. 複素鏡映群とタイトルを掲げておいて D_n 型だけでは, 看板倒れと言われそうだが, 以下に述べることは, 適当に定式化すれば $G(e,p,n)$ について成立する. そのためもあって, D_n 型を記述するにしては少々大げさな記号を使うことになった. 詳しい話は [S4] に書きます.

2. 有限簡約群の Green 関数

Chevalley 型の連結簡約群の Green 関数については, [S3] に解説を書いた. ここでは一部重複するが, D_n-型の場合に表れる non-split type (Steinberg 型) の場合も含める形で Green 関数を決定するアルゴリズムを簡単に復習しておく. 興味のある方は [S3] を参照して下さい.

2.1. G を有限体 $\mathbf{F}_q$ 上定義された連結簡約群, $F : G \to G$ をその Frobenius 写像とする. Deligne-Lusztig により, F-不変な極大トーラス T と T^F の既約指標 $\theta : T^F \to \bar{\mathbf{Q}}_l^*$ に対して, 一般指標 $R_T^G(\theta)$ が定義された. ただし, $\bar{\mathbf{Q}}_l$ は $\mathrm{ch}\,\mathbf{F}_q$ と異なる素数 l に関する, l-進数体 $\mathbf{Q}_l$ の代数的閉包を表す. $R_T^G(\theta)$ を G^F の巾単元の集合 G_{uni}^F に制限してできる, G_{uni}^F 上の G^F-不変な関数 $Q_T^G : G_{\mathrm{uni}}^F \to \bar{\mathbf{Q}}_l$ を G^F の Green 関数という. Q_T^G は θ の取り方に依存しない. また, T と T' が G^F-共役ならば, $Q_T^G = Q_{T'}^G$ が成り立つ.

さて, T_0 を F-不変な Borel 部分群に含まれる F-不変な極大トーラスとする. このような T_0 は G^F-共役を除いて一意的に定まる. $W = N_G(T_0)/T_0$ を G の Weyl 群とする. F は W に自然に作用する. G の F-不変な極大トーラスの G^F-共役類の集合は, W の F-twisted class の集合 $W/{\sim_F}$ と 1 対 1 に対応する. ただし, $x, y \in W$ に対し, $y = z^{-1}xF(z)$ となる $z \in W$ が存在するとき, $x \sim_F y$ (F-twisted conjugate) と表記し, それによる W の同値類の集合を $W/{\sim_F}$ と表す. ここで, $\sigma : W \to W$ を F の作用による W の自己同型とし, $\widetilde{W} = W \rtimes \langle\sigma\rangle$ (半直積) とおく. $\widetilde{W}$ における W の剰余類 $W\sigma$ は $\widetilde{W}$ の共役の作用で不変

であり, 共役類の集合 $W\sigma/\sim$ は 対応 $w\sigma \leftrightarrow w$ のもとに集合 $W/\sim_F$ と同一視できる. そこで, $w\sigma \in W/\sim$ に対応する G の F-不変な極大トーラスを $T_{w\sigma}$ と表すことにする.

一方, W の F-不変な規約指標は $\widetilde{W}$ の既約指標に拡張できる. W の既約指標の全体を $W^\wedge$ と表し, F-不変な既約指標の全体を $W^\wedge_{\mathrm{ex}}$ と表すことにする. $\chi \in W^\wedge$ に対し, その $\widetilde{W}$ への拡張は一意的ではなく, ちょうど σ の位数と同じだけある. その一つを選び, $\widetilde{\chi}$ と表す. W の F-不変な既約指標の個数は, W の F-不変な共役類の個数に等しく, 共役類と既約指標の関係がこの状況にそのまま拡張されていることに注意しておく.

今, $\mathcal{V}_{\mathrm{uni}}$ を G^F_{uni} 上の G^F-不変な関数全体のなす $\bar{\mathbf{Q}}_l$ 上のベクトル空間とする. すると, $Q^G_T \in \mathcal{V}_{\mathrm{uni}}$. ここで, $\chi \in W^\wedge_{\mathrm{ex}}$ に対し,

$$Q_{\widetilde{\chi}} = |W|^{-1} \sum_{w\sigma \in W\sigma} \widetilde{\chi}(w\sigma) Q^G_{T_{w\sigma}}$$

により, $Q_{\widetilde{\chi}} \in \mathcal{V}_{\mathrm{uni}}$ を定義する. $Q_{\widetilde{\chi}}$ はスカラー倍の違いを除けば, 拡張 $\widetilde{\chi}$ の取り方によらない.

2.2. C を G の F-不変な巾単類とする. $u \in C^F$ に対して, $A_G(u) = Z_G(u)/Z^0_G(u)$ とおくと, F は自然に $A_G(u)$ に作用する. C^F に含まれる G^F-共役類の集合は, $A_G(u)$ の F-twisted class の集合 $A_G(u)/\sim_F$ (定義は 2.1 と同様) と 1 対 1 に対応することが知られている. ρ を $A_G(u)$ の F-不変な既約指標として組 (C,ρ) を考える. ここで, I を上のような組 (C,ρ) 全体の集合とする. I の元の個数は G^F の巾単類の個数に一致してることに注意しておく.

さて Weyl 群の場合と同様に, σ を F から誘導された, $A_G(u)$ の自己同型とし, $A_G(u)$ を半直積の群 $\widetilde{A}_G(u)$ に拡張しておく. $\rho \in A_G(u)^\wedge$ の $\widetilde{A}_G(u)$ への拡張を $\widetilde{\rho}$ とする. $a \in A_G(u)/\sim_F$ に対応する C^F の代表元を u_a と表す. 各 $i = (C,\rho) \in I$ に対し, $Y_i \in \mathcal{V}_{\mathrm{uni}}$ を

$$Y_i(v) = \begin{cases} \widetilde{\rho}(a\sigma) & v \text{ が } u_a \text{ と } G^F\text{-共役の場合}, \\ 0 & v \notin C^F \text{ の場合}, \end{cases}$$

として定義する. すると, $\{Y_i \mid i \in I\}$ は $\mathcal{V}_{\mathrm{uni}}$ の基底を与えることが分かる.

ここで, I_1 を G の巾単類 C と $\rho \in A_G(u)^\wedge$ の組 (C,ρ) 全体の集合とする (ここでは, F を忘れている). $W^\wedge$ と 集合 I_1 との間に, 自然な単射, “Springer 対応” $f : W^\wedge \to I_1$ が存在する. $f(W^\wedge_{\mathrm{ex}}) = I_0$ とおく. $I_0 \subset I$ となる. $f(\chi) = i$ のとき, $Q_{\widetilde{\chi}} = Q_i$ と書く. $Q_i \in \mathcal{V}_{\mathrm{uni}}$ であるから, Q_i は Y_j 達の線形結合で表される. しかし, 実は Q_i は Y_j $(j \in I_0)$

で生成される部分空間に含まれることが知られている. (この事実は Lusztig [L3] により示されたが, 指標層に関する深い結果を必要とする). そこで, Q_i は

$$Q_i = \sum_{j \in I_0} p_{ij} Y_j$$

と, 係数 $p_{ij} \in \bar{\mathbf{Q}}_l$ により表される.

さて, W の既約指標の直交関係により, Green 関数 $Q^G_{T_{w\sigma}}(w\sigma \in W)$ の決定は, 各 $\chi \in W^\wedge_{\rm ex}$ に対する $Q_{\tilde{\chi}}$ の決定と同値になる. 各関数 Y_j はよく分かっているので, 結局 Green 関数の決定は行列 $P = (p_{ij})$ の決定に帰着する. Lusztig は [L3] で P が行列に関する方程式

$$(*) \qquad P\Lambda\, {}^tP = \Omega$$

の解として一意的に定まることを示した.* ただし, ${}^tP$ は P の転置行列を表す. 実際, (*) は Green 関数の直交関係の式を書き直したもので, 右辺の行列 Ω は Weyl 群に関する情報だけで完全に定まる. 一方ここで, I_0 に次のような全順序 $i \le i'$ をいれる: $i = (C, \rho), i' = (C', \rho')$ とするとき, $\bar{C} \subset \bar{C'}$ ($\bar{C}$ は巾単類 C の G での閉包を表す) ならば, $i \le i'$. さらに, I_0 の同値関係を $C = C'$ のとき, $i \sim i'$ として定義する. I_0 の全順序は, この同値関係と両立するように, つまり各同値類が区間をなすように選んでおく. そこで, P, Λ, Ω をこの順序に関する行列とし, さらに同値関係に対応した行列の区分けを考える. Lusztig, Borho-MacPherson により, Green 関数 Q_χ は巾単類上の交差 cohomology を用いて表されることが知られており, これより行列 P は次の性質を持つことが分かる: P は区分けの意味で下三角行列になり, C に対応する対角ブロックはスカラー行列 $q^{d_u} I$ となる. ただし, $u \in C$, B を G の Borel 部分群として $\mathcal{B}_u = \{B_1 \in G/B \mid u \in B_1\}$ とおくとき, $d_u = \dim \mathcal{B}_u$ である. さらに, Λ は対角ブロックのみがゼロでない, 正則な区分け行列になる. これらの条件から, 簡単な線形代数によって, 行列方程式 (*) (Ω は既知, P, Λ を未知関数とみる) から, P と Λ が一意的に求まることが分かる.

*Lusztig の示したのはもう少し間接的な事実であり, 具体的な計算をするためには, C^F からどのような u を選ばなければならないかが問題になる. 例えば古典群の場合については [S1] に代表元の取り方が与えられている.

3. D_n-型の Green 関数

前節で議論した行列方程式 $P\Lambda\, {}^tP = \Omega$ は古典群 Sp_{2n}, SO_{2n+1} の場合には, 巾単 symbol と Weyl 群の表現論の言葉で完全に記述できる. 特に, D_n-型の場合にそれを説明する.

3.1. $W_0 = \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ を B_n 型の Weyl 群 とし, $M = \mathbb{R}^n$ を W_0 の鏡映表現とする. $\mathbb{R}^n$ の標準基底に関する行列表現により, W_0 は 各成分が ± 1 であるような n 次の置換行列の全体と同一視できる. non-zero 成分の積が 1 であるような置換行列全体のなす W_0 の部分群を W とおく. $W \simeq \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1}$ が D_n 型の Weyl 群になり, W を 2 節で述べた Weyl 群 $W = N_G(T_0)/T_0$ と同一視できる. ただし, G は D_n 型簡約群である. そこで, $\sigma : W \to W$ が Frobenius 写像により導かれる. G^F が split type ならば, $\sigma = 1$ であり, non-split type ならば σ は位数 2 となる. ここで, t_1 を第一成分が -1, 他の対角成分が 1 であるような対角行列とし, $\mathrm{ad}\, t_1 : W \to W, w \mapsto t_1 w t_1^{-1}$ とおいて, W の自己同型 $\mathrm{ad}\, t_1$ を定義する. non-split type の場合, $\sigma = \mathrm{ad}\, t_1$ であり, したがって半直積の群 $\widetilde{W} = W \rtimes \langle\sigma\rangle$ が B_n 型 Weyl 群 W_0 に一致する. 以下では, $\widetilde{W}$ を W_0 の部分群として考える. $\sigma = 1$ または $\sigma = \mathrm{ad}\, t_1$ に応じて $\widetilde{W} = W$ または $\widetilde{W} = W_0$ となる.

$S(M)$ を M 上の対称代数, I_+ を (次数ゼロでない) W 不変な斉次ベクトルで生成された $S(M)$ のイデアルとする. R を W の余不変式環 $S(M)/I_+$ とする. R は自然に次数付き環 $R = \bigoplus_i R_i$ の構造を持つ. t を不定元として, R の Poincaré 多項式 $P_W(t)$ を $P_W(t) = \sum_{i\geq 0} (\dim R_i) t^i$ で定義する. 具体的に表せば

$$P_W(t) = (t^n - 1) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{t^{2i} - 1}{t - 1}$$

となる. $\varepsilon : \widetilde{W} \to \pm 1$ を $\widetilde{W}$ の符号指標とする. $\widetilde{W}$-不変な $W\sigma$ 上の関数 f に対して $R^{\pm}(f) \in \mathbb{R}(t)$ を,

$$R^{\pm}(f) = (t-1)^n P_W(\eta(\sigma)t) \frac{1}{|W|} \sum_{w\in W} \frac{\varepsilon(w\sigma) f(w\sigma)}{\det_V(t \cdot \mathrm{id}_M - w\sigma)} \tag{3.1.1}$$

により定義する. ただし, $\sigma = 1$ のとき, $\eta(\sigma) = 1$, $\sigma = \mathrm{ad}\, t_1$ のとき, $\eta(\sigma) = -1$ であり, $R^{\pm}(f)$ の符号は, $\eta(\sigma) = \pm 1$ に応じて取るものとする. また, $w\sigma \in W_0$ は M に作用しているので, 分母は意味を持つことに注意する. $\sigma = 1$ の場合, $\langle\, , \,\rangle_W$ を W の類関数の内積とすると $\chi \in W^\wedge$ に対して $R^+(\chi) = \sum_i \langle \chi, R_i \rangle_W t^i$ となる. したがって, $R^+(\chi)$ は χ の

fake degree に一致する．特に, W の一般指標 f に対しては, $R^+(f) \in \mathbb{Z}[t]$ となることが分かる．

ここで, N を W のルート系における正ルートの個数 ($= \dim G/B$) とする．すると, N は R の最高次数に一致し, $R_N \simeq \varepsilon$ が成り立つ．

3.2. n の分割 α とは, $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_r > 0$ となる整数の列で, $\sum_i \alpha_i = n$ となるものを表す．$|\alpha| = n$ とおく．2-分割 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)})$ を 2 個の分割 $\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}$ の組とおく．また, $\boldsymbol{\alpha}$ のサイズ $|\boldsymbol{\alpha}|$ を $|\boldsymbol{\alpha}| = \sum_i |\alpha^{(i)}|$ により定義する．$\mathcal{P}_{n,2}$ をサイズ n の 2-分割全体の集合とする．W_0 の既約指標全体の集合 $W_0^\wedge$ は $\mathcal{P}_{n,2}$ により parametrize されることが知られている．$\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}_{n,2}$ に対応する W_0 の既約指標を $\chi^{\boldsymbol{\alpha}}$ と表す．特に, $\boldsymbol{\alpha} = ((n), -)$ が単位指標に対応し $\boldsymbol{\alpha} = (-, (1^n))$ が 符号指標 ε に対応する．

$\mathcal{P}_{n,2}$ への作用 θ を $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)})$ に対し, $\theta(\boldsymbol{\alpha}) = (\alpha^{(1)}, \alpha^{(0)})$ により定義する．すると, W の既約指標は次のように記述される．$\chi^{\boldsymbol{\alpha}} \in W_0^\wedge$ とする．$\theta(\boldsymbol{\alpha}) \neq \boldsymbol{\alpha}$ のとき, $\chi^{\boldsymbol{\alpha}} \in W_0^\wedge$ の W への制限は既約になり, $\theta(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\beta}$ のときに限り, $\chi^{\boldsymbol{\alpha}}|_W = \chi^{\boldsymbol{\beta}}|_W$ が成り立つ．また, $\theta(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}$ のときは, $\chi^{\boldsymbol{\alpha}}|_W = \chi^{\boldsymbol{\alpha},1} + \chi^{\boldsymbol{\alpha},2}$ と同じ次数を持つ 2 個の異なる既約指標の和に分解する．W の既約指標はこのようにして, すべて得られる．まとめると次のようになる．今 $\mathcal{P}_{n,2}/\!\sim$ を $\mathcal{P}_{n,2}$ の θ-軌道の集合とする．また, 各 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}_{n,2}$ に対し, $o_{\boldsymbol{\alpha}}$ を $\boldsymbol{\alpha}$ の θ-軌道に含まれる元の数とする．このとき, W の既約指標 $\chi^{\boldsymbol{\alpha},i} (1 \leq i \leq 2/o_{\boldsymbol{\alpha}})$ が構成され,

$$W^\wedge = \{\chi^{\boldsymbol{\alpha},i} \mid \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}_{n,2}/\!\sim, 1 \leq i \leq 2/o_{\boldsymbol{\alpha}}\} \tag{3.2.1}$$

と W の既約指標がパラメトライズされる．

次に, $\sigma \neq 1$ とする．$\chi \in W^\wedge$ が σ-不変になるのは, χ が $\widetilde{W} = W_0$ の既約指標に拡張できる場合、すなわち $\chi = \chi^{\boldsymbol{\alpha}}|_W$ となる場合である．したがって,

$$W^\wedge_{\mathrm{ex}} = \{\chi^{\boldsymbol{\alpha},1} \in W^\wedge \mid o_{\boldsymbol{\alpha}} = 2\} \tag{3.2.2}$$

と表される．$W^\wedge, W^\wedge_{\mathrm{ex}}$ を記述するために (一時的ではあるが) 記号を導入しておく．(3.2.1) の右辺に表れる $\boldsymbol{\alpha}$ の同値類 (と, それを二重に数えたもの) を $\mathcal{P}^+_{n,2}/\!\sim$, (3.2.2) の右辺に表れる $\boldsymbol{\alpha}$ の同値類を $\mathcal{P}^-_{n,2}/\!\sim$ と表す．$W^\wedge \simeq \mathcal{P}^+_{n,2}/\!\sim$, $W^\wedge_{\mathrm{ex}} \simeq \mathcal{P}^-_{n,2}/\!\sim$ となる．

3.3. 整数 $m > 0$ を固定し, $Z_n^0 = Z_n^0(m)$ をサイズ n の 2-分割 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)})$ 全体の集合とする．ただし, 各 $\alpha^{(k)}$ は $\alpha_1^{(k)} \geq \cdots \geq \alpha_m^{(k)} \geq 0$ と後ろに ゼロを補うことにより,

$\alpha^{(k)} \in \mathbb{Z}^m$ とみなしておく. 次に, 整数 $r \geq 0$ を固定し, 2-分割 $\boldsymbol{\Lambda}^0 = \boldsymbol{\Lambda}^0(m) = (\Lambda_0, \Lambda_1)$ を

$$\text{(3.3.1)} \qquad \Lambda_0 = \Lambda_1 : \ (m-1)r \geq \cdots \geq 2r \geq r \geq 0,$$

により定義する. $Z_n^r = Z_n^r(m)$ を $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\Lambda}^0$ ($\boldsymbol{\alpha} \in Z_n^0$) の形の 2-分割の集合とする. ただし, 和は $\boldsymbol{\Lambda}^0, \boldsymbol{\alpha}$ を行列とみての和を取る. $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha})$ と表し, $\boldsymbol{\Lambda}$ を $\boldsymbol{\alpha}$ に対応する r-型の symbol という. 次に, $m' = m+1$ とおき, shift operation $Z_n^r(m) \to Z_n^r(m')$ を次のように定義する. $\boldsymbol{\Lambda} \mapsto \boldsymbol{\Lambda}'$ とするとき, $\boldsymbol{\Lambda} = (\Lambda_0, \Lambda_1)$ に対し, $\boldsymbol{\Lambda}' = (\Lambda_0', \Lambda_1')$ を $\Lambda_k' = (\Lambda_k + r) \cup \{0\}$ ($k = 0, 1$) と定める. shift operation によって移り合う symbol を同一視したものが本来の symbol である. これにより, 自由に m を大きく取って議論できる. しかし, 以下では多くの場合に m を固定して考える.

Z_n^r の二つの元 $\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Lambda}'$ は, (行列としてみたときの) 各成分が重複度を込めて一致するとき, similar であるという. また Z_n^r の中で similar な元を集めたものを similarity class という. ここで, 関数 $a : Z_n^r \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を次のように定義する. $\boldsymbol{\Lambda}^0$ を前のように取る. $\boldsymbol{\Lambda} \in Z_n^r$ に対し,

$$\text{(3.3.2)} \qquad a(\boldsymbol{\Lambda}) = \sum_{\lambda, \lambda' \in \boldsymbol{\Lambda}} \min(\lambda, \lambda') - \sum_{\mu, \mu' \in \boldsymbol{\Lambda}^0} \min(\mu, \mu'),$$

とおく. a 関数は shift operation で不変であり, また各 similarity class の上で一定値を取ることが分かる.

ここで, symbol の概念を W の指標の分類に応じて次のように変形しておく. $\theta(\boldsymbol{\alpha}) \neq \boldsymbol{\alpha}$ のとき, $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha})$ と $\boldsymbol{\Lambda}(\theta(\boldsymbol{\alpha}))$ を同一視する. 一方, $\theta(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}$ のときは, $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha})$ を $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha}^1), \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha}^2)$ と二つに勘定する. このようにみたものを, $Z_n^{r,+}/\!\sim$ とおく. (3.2.1) により, $Z_n^{r,+}/\!\sim$ は $W^\wedge$ と 1 対 1 に対応する. また, この対応で $W_{\mathrm{ex}}^\wedge$ の像になっているものを $Z_n^{r,-}/\!\sim$ とおく. したがって, $Z_n^{r,-}/\!\sim$ は $W_{\mathrm{ex}}^\wedge$ と 1 対 1 に対応する.

注意 3.4. $r = 1$ の場合の symbol $Z_n^{1,\pm}/\!\sim$ が, $SO_{2n}^\pm(\mathbf{F}_q)$ の巾単指標をパラメトライズするために Lusztig [L1] が導入した original な symbol (の内, $(W^F)^\wedge$ に対応する部分) である. この場合, a 関数は, 本来の Weyl 群の既約指標 χ に対する $a(\chi)$, すなわち, $q^{a(\chi)}$ が χ の generic degree を割り切る最大の q 巾, であり, similarity class は family に対応する.

$r = 2$ の場合, $Z_n^{2,+}/\!\sim$ は巾単 symbol に対応し, $G = SO_{2n}$ ($\mathrm{ch}\,\mathbf{F}_q \neq 2$) の Springer 対応を記述するために [L2] で導入された. この場合, similarity class は G の巾単類と 1 対 1 に対応する. ($Z_n^{2,-}/\!\sim$ の similarity class は G の non-split F に関する F-不変な巾単類

に対応する.) また, a 関数の値 $a(\boldsymbol{\Lambda})$ は, u を対応する巾単類の元とするとき, $\dim \mathcal{B}_u$ に一致する.

3.5. $Z_n^{r,\pm}/\sim \simeq \mathcal{P}_n^{\pm}/\sim$ の対応のもとに, a 関数や, similarity class を $\mathcal{P}_n^{\pm}/\sim$ に対しても定義しておく. $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathcal{P}_n^{\pm}/\sim$ が同じ similarity class に含まれるとき, $\boldsymbol{\alpha} \sim \boldsymbol{\beta}$ と表す. また $\mathcal{P}_n^{\pm}/\sim$ の全順序 $\prec$ を $\boldsymbol{\alpha} \prec \boldsymbol{\beta}$ ならば $a(\boldsymbol{\alpha}) \geq a(\boldsymbol{\beta})$ となり, さらに各 similarity class が区間となるように定める. 以下, $\mathcal{P}_n^{\pm}/\sim$ を添字に持つ, この順序に関する正方行列を考える. まず, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathcal{P}_n^{\pm}/\sim$ に対して, 多項式 $\omega^{\pm}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \in \mathbb{Z}[t]$ を,

$$\omega^{\pm}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = t^N R^{\pm}(\chi^{\boldsymbol{\alpha}} \otimes \chi^{\boldsymbol{\beta}} \otimes \varepsilon)$$

により定義し, $\Omega^{\pm} = (\omega^{\pm}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})$ を次数 $|\mathcal{P}_n^{\pm}/\sim|$ の行列とする. ただし, $\sigma \neq 1$ の場合には, 上式の $\chi^{\boldsymbol{\alpha}}, \chi^{\boldsymbol{\beta}}$ は, W_0 の既約指標 の $W\sigma$ への制限を表すものとする. さらに, 次数 $|\widetilde{\mathcal{P}}_n^{\pm}|$ の正方行列 $P = (p_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}), \Lambda = (\lambda_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})$ を用意する. そこで, 未知変数 $\lambda_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}, p_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ に関する以下のような方程式を考える.

$$\begin{cases} \lambda_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} & = 0 \quad \text{unless } \boldsymbol{\alpha} \sim \boldsymbol{\beta}, \\ p_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} & = 0 \quad \text{unless either } \boldsymbol{\alpha} \succ \boldsymbol{\beta} \text{ and } \boldsymbol{\alpha} \not\sim \boldsymbol{\beta}, \text{ or } \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}, \\ p_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}} & = t^{a(\boldsymbol{\alpha})}, \\ P\Lambda\, {}^tP & = \Omega^{\pm}. \end{cases} \tag{3.5.1}$$

$r = 2$ としたときの (3.5.1) が 2 節に述べた Green 関数を決定する方程式 (*) に他ならない. また, $r = 1$ の場合が Geck と Malle [GM] が考察したものにあたる.

4. D_n-型 Weyl 群に対する Frobenius の公式

この節では, 対称群の既約指標を Schur 関数と巾和対称関数との間の遷移行列として表す Frobenius の公式を D_n-型の Weyl 群に拡張する. B_n-型、あるいは, より一般に複素鏡映群 $G(e,1,n)$ に関する Frobenius formula については, Macdonald の教科書に記載がある. この節では, 簡単のため D_n-型 Weyl 群に話を限るが, ここでの結果は適当に変形することにより, 一般の複素鏡映群 $G(e,p,n)$ に関して成立する.

4.1. $Z_n^r(m)$ の成分に対応して, 不定元 $x_j^{(k)}$ $(0 \leq k < 2, 1 \leq j \leq m)$ を用意する. x で全ての不定元 $(x_j^{(k)})$ を表し, また $x^{(k)}$ で, $x_1^{(k)}, \dots, x_m^{(k)}$ を表すものとする. まず [M, Appendix B] にしたがって, B_n-型の Schur 関数, 単項式対称関数, 巾和対称関数を導入す

る. 整数 $r \geq 0$ と, $0 \leq i < 2$ となる i に対して,

$$p_r^{(i)}(x) = \sum_{j=0}^{1} (-1)^{ij} p_r(x^{(j)}),$$

とおく. ただし, $p_r(x^{(k)})$ は変数 $x^{(k)}$ に対する r-次の巾和対称関数である. さらに, $r = 0$ に対しては $p_r^{(i)}(x) = 1$ としておく. 2分割 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}) = (\alpha_j^{(k)})$ に対して, 巾和対称関数 $p_{\boldsymbol{\alpha}}(x)$ を

$$p_{\boldsymbol{\alpha}}(x) = \prod_{k=0}^{1} \prod_{j=1}^{m} p^{(k)}_{\alpha_j^{(k)}}(x) \tag{4.1.1}$$

により定義する.

次に, Schur 関数と単項式対称関数とを,

$$s_{\boldsymbol{\alpha}}(x) = \prod_{k=0}^{1} s_{\alpha^{(k)}}(x^{(k)}), \qquad m_{\boldsymbol{\alpha}}(x) = \prod_{k=0}^{1} m_{\alpha^{(k)}}(x^{(k)}), \tag{4.1.2}$$

により定義する. ただし, $s_{\alpha^{(k)}}(x^{(k)}), m_{\alpha^{(k)}}(x^{(k)})$ はそれぞれ変数 $x^{(k)}$ に関する Schur 関数, 単項式対称関数を表す. 対称群の場合の拡張として, B_n-型 Weyl 群に対する Frobenius の公式が次のように与えられる.

$$p_{\boldsymbol{\beta}} = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}_{n,2}} \chi^{\boldsymbol{\alpha}}(w_{\boldsymbol{\beta}}) s_{\boldsymbol{\alpha}}. \tag{4.1.3}$$

ただし, $w_{\boldsymbol{\beta}}$ は $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{P}_{n,2}$ に対応する W の共役類の代表元を表す.

4.2. ここで, (3.2.1) に与えた $W^\wedge$ の記述を少し変形しておく. 各 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}_{n,2}$ に対して, $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}$ を位数 $r = 2/o_{\boldsymbol{\alpha}}$ の巡回群とする. つまり, $\theta(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}$ ならば $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, それ以外は $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}} = \{1\}$. ここで,

$$\widetilde{\mathcal{P}}_n^+ = \{(\boldsymbol{\alpha}, \phi) \mid \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}_{n,2}/\sim, \phi \in \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}^\wedge\}$$

とおく. D_n-型 Weyl 群に関する Schur-Weyl の相互律を利用することにより, $W^\wedge$ は集合 $\widetilde{\mathcal{P}}_n^+$ によりパラメトライズされることが分かる, すなわち,

$$W^\wedge = \{\chi^{\boldsymbol{\alpha},\phi} \mid (\boldsymbol{\alpha}, \phi) \in \widetilde{\mathcal{P}}_n^+\}.$$

と表される.

$(\boldsymbol{\alpha}, \phi) \in \widetilde{\mathcal{P}}_n^+$ に対し, Schur 関数 $\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\alpha},\phi} = (s^0_{\boldsymbol{\alpha},\phi}, s^1_{\boldsymbol{\alpha},\phi})$ を次のように定義する. 第1成分については, $r = 2/o_{\boldsymbol{\alpha}}$ として,

$$s^0_{\boldsymbol{\alpha},\phi}(x) = \sum_{i=0}^{r-1} s_{\theta^i(\boldsymbol{\alpha})}(x) \tag{4.2.1}$$

と定める. $s_{\boldsymbol{\alpha}}(x)$ は $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}_{n,2}$ に関する 4.1 で定義された Schur 関数である. 第2成分については

$$s^1_{\boldsymbol{\alpha},\phi}(x) = \begin{cases} \pm s_\beta(X) & \theta(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha} \text{ の場合}, \\ 0 & \theta(\boldsymbol{\alpha}) \neq \boldsymbol{\alpha} \text{ の場合} \end{cases} \tag{4.2.2}$$

と定義する. ただし, $\theta(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}$ の場合に $\boldsymbol{\alpha} = (\beta; \beta)$ とおいた. また $X_j = x_j^{(0)} x_j^{(1)}$ とおいて新しい変数を定義する. $s_\beta(X)$ は分割 β に付随した変数 $X = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ に関する (通常の) Schur 関数を意味する. 符号は, $\phi = 1$ ならば正, $\phi \neq 1$ ならば負を取るものとする. $\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\alpha},\phi}(x)$ は代表元 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}_{n,2}$ の取り方によらない. D_n-型の場合, Schur 関数は対称関数の組として定義されることに注意する.

次に,

$$\widetilde{\mathcal{P}}_n^- = \{(\boldsymbol{\alpha}, \phi) \in \widetilde{\mathcal{P}}_n^+ \mid o_{\boldsymbol{\alpha}} = 2\}$$

とおく. (3.2.2) により, $W^\wedge_{\mathrm{ex}}$ は $\widetilde{\mathcal{P}}_n^-$ により, パラメトライズされる. この場合, 常に $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}} = \{1\}$ であるので, $(\boldsymbol{\alpha}, \phi)$ とペアにする必要はないのだが, 後の記述を統一させる意味もあって, あえて, $(\boldsymbol{\alpha}, \phi)$ と表すことにする. 常に, $\phi = 1$ であることに注意する.

$(\boldsymbol{\alpha}, \phi) \in \widetilde{\mathcal{P}}_n^-$ に対して, (D_n^- 型の) Schur 関数 $\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\alpha},\phi} = (s^0_{\boldsymbol{\alpha},\phi}, s^1_{\boldsymbol{\alpha},\phi})$ を定義する. 第1成分については, 代表元 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}_{n,2}$ を選び

$$s^0_{\boldsymbol{\alpha},\phi}(x) = s_{\boldsymbol{\alpha}}(x) - s_{\theta(\boldsymbol{\alpha})}(x) \tag{4.2.3}$$

として $s^0_{\boldsymbol{\alpha},\phi}(x)$ を定義する. もうひとつの代表元 $\boldsymbol{\alpha}' = \theta(\boldsymbol{\alpha})$ を選べば $s^0_{\boldsymbol{\alpha}',\phi} = -s^0_{\boldsymbol{\alpha},\phi}$ となる. 第2成分については, 常に, $s^1_{\boldsymbol{\alpha},\phi} = 0$ と定義する. これより, $\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\alpha},\phi}$ は ± 1 倍を除いて代表元の取り方によらないことが分かる.

次に, D_n-型の巾和対称関数を定義するのだが, その前に W と $W\sigma$ $(\sigma \neq 1)$ の共役類を記述しておこう. B_n-型 Weyl 群 W_0 の共役類は $\mathcal{P}_{n,2}$ により, パラメトライズされる. $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)})$ に対応する W_0 の共役類を $C_{\boldsymbol{\alpha}}$ と表す. $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}_{n,2}$ に対して, $\Delta(\boldsymbol{\alpha}) = l(\alpha^{(1)})$

とおく. ただし, 分割 $\alpha=(\alpha_1\geq\cdots\geq\alpha_r>0)$ に対して $l(\alpha)$ は α の長さ $(l(\alpha)=r)$ を表す. W は W_0 の共役類の和集合であり, $C_{\boldsymbol{\alpha}}$ が W に含まれるための条件は, $\Delta(\boldsymbol{\alpha})$ が偶数になることである. また, $\sigma\neq 1$ の場合, $W_0=W\cup W\sigma$ となり, $C_{\boldsymbol{\alpha}}\subset W\sigma$ となるのは, $\Delta(\boldsymbol{\alpha})$ が奇数になる場合である. さらに, W に関しては $\alpha^{(1)}=\emptyset$ で, $\alpha^{(0)}$ の各パーツが全て偶数のとき, $C_{\boldsymbol{\alpha}}$ は W の 2 つの共役類 $C'_{\boldsymbol{\alpha}}, C''_{\boldsymbol{\alpha}}$ に分かれ, それ以外の $\boldsymbol{\alpha}$ に対しては $C_{\boldsymbol{\alpha}}$ が W の共役類を与える. 前者の $C_{\boldsymbol{\alpha}}$ を退化したクラス, 後者を非退化なクラスという. $C_{\boldsymbol{\alpha}}$ が退化する場合, その代表元は次のようになる: 3.1 のように, W_0 を $GL(\mathbb{R}^n)$ の部分群と考える. $\mathbb{R}^n$ の標準基底を $e_1,\ldots,e_n$ とし, $\mathfrak{S}_n$ の巡回置換 $e_{i_1}\mapsto e_{i_2}\mapsto\cdots\mapsto e_{i_r}\mapsto e_{i_1}$ を $(i_1,\ldots,i_r)$ と表す. さらに, $e_{i_1}\mapsto e_{i_2}\mapsto\cdots\mapsto e_{i_{r-1}}\mapsto -e_{i_r}\mapsto e_{i_1}$ により 置換 $(i_1,\ldots,i_{r-1},-i_r)$ を定義する. $(i_1,\ldots,i_{r-1},-i_r)$ は W の元になる. $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha,-)$, $\alpha=(\alpha_1\geq\cdots\geq\alpha_r>0)$ とし, 各 α_i は偶数と仮定する.

$$w'_{\boldsymbol{\alpha}}=(1,2,\ldots,\alpha_1-1,\alpha_1)(\alpha_1+1,\ldots,\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_2+1,\ldots,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\cdots$$
$$w''_{\boldsymbol{\alpha}}=(1,2,\ldots,\alpha_1-1,-\alpha_1)(\alpha_1+1,\ldots,\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_2+1,\ldots,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\cdots$$

とおく. このとき, $w'_{\boldsymbol{\alpha}}, w''_{\boldsymbol{\alpha}}$ がそれぞれ $C'_{\boldsymbol{\alpha}}, C''_{\boldsymbol{\alpha}}$ の代表元を与える. 以上の議論から, W の共役類 $W/\!\sim$ は, 集合

$$\mathcal{P}_{n,+}=\{(\boldsymbol{\alpha},c)\mid \Delta(\boldsymbol{\alpha})\equiv 0\pmod 2\}$$

でパラメトライズされることが分かる. ただし, $c\in\{0,1\}$ であり, $C_{\boldsymbol{\alpha}}$ が非退化なら, $c=0$, $C_{\boldsymbol{\alpha}}$ が退化していれば, $C'_{\boldsymbol{\alpha}}\leftrightarrow(\boldsymbol{\alpha},0), C''_{\boldsymbol{\alpha}}\leftrightarrow(\boldsymbol{\alpha},1)$ としておく.

一方, $W\sigma$ の W_0-軌道の全体 $W\sigma/\!\sim$ は, W_0 での共役類に他ならず, $W\sigma/\!\sim$ は 集合

$$\mathcal{P}_{n,-}=\{(\boldsymbol{\alpha},c)\mid \Delta(\boldsymbol{\alpha})\equiv 1\pmod 2\}$$

により, パラメトライズされる. この場合常に $c=0$ である.

ここで, 各 $(\boldsymbol{\alpha},c)\in\mathcal{P}_{n,\pm}$ に対し, $D_n^{\pm}$-型の巾和対称関数 $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{\alpha},c}=(p^0_{\boldsymbol{\alpha},c},p^1_{\boldsymbol{\alpha},c})$ を次のように定義する. $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{\alpha},c}$ の第一成分については, B_n-型の巾和対称関数を用いて

$$p^0_{\boldsymbol{\alpha},c}(x)=p_{\boldsymbol{\alpha}}(x) \tag{4.2.4}$$

と定義する. 第二成分については, $C_{\boldsymbol{\alpha}}$ が退化する場合に $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha, -)$, $\alpha = (\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_r > 0)$ と置くとき, (各 α_i は偶数であることに注意)

$$(4.2.5) \qquad p^1_{\boldsymbol{\alpha},c}(x) = \begin{cases} 0 & C_{\boldsymbol{\alpha}} \text{ が非退化の場合} \\ \pm 2^{l(\alpha)} \prod_{j=1}^r p_{\alpha_j/2}(X) & C_{\boldsymbol{\alpha}} \text{ が退化する場合} \end{cases}$$

と定義する. $p_k(X)$ は Schur 関数の場合と同様に, 変数 $X = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ に関する (通常の) 巾和対称関数である. また符号については, $c=0$ のとき正符号, $c=1$ のとき負符号を取るものとする. 特に, $(\boldsymbol{\alpha}, c) \in \mathcal{P}_{n,-}$ の場合には常に, $p^1_{\boldsymbol{\alpha},c} = 0$ であることに注意する.

以上の準備のもとに, D_n-型 Weyl 群 W に対する Frobenius の公式は次のように述べられる. (4.1.3) と比較してほしい.

命題 4.3. $(\boldsymbol{\beta}, c) \in \mathcal{P}_{n,\pm}$ に対応する, W の共役類の代表元を $w_{\boldsymbol{\beta},c}$ とする. このとき,

$$\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{\beta},c} = \sum_{(\boldsymbol{\alpha},\phi) \in \widetilde{\mathcal{P}}_n^{\pm}} \chi^{\boldsymbol{\alpha},\phi}(w_{\boldsymbol{\beta},c}) \boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\alpha},\phi}$$

5. D_n-型 Green 関数に対する組合せ論的アプローチ

5.1. 最初に B_n-型の Green 関数の構成に使われた, 種々の対称関数を [S2] にしたがって復習しておく. まず, 新しい変数 t を導入する. $0 \leq k < 2$ となる k と, 整数 $r \geq 0$ に対して関数 $q_r^{(k)}(x,t)$ を

$$(5.1.1) \qquad q_r^{(k)}(x;t) = \sum_{i \geq 1} (x_i^{(k)})^{r-1} \frac{\prod_j x_i^{(k)} - t x_j^{(k+1)}}{\prod_{j \neq i} x_i^{(k)} - x_j^{(k)}} \qquad (r \geq 1),$$

により定義する. ([S2] では, 複素鏡映群 $G(e,1,n)$ の場合に符号 $\pm$ に応じて 2 種類の $q_{r,\pm}(x;t)$ が定義された. しかし, $e=2$ の場合には $q_{r,\pm}$ は符号に無関係に定まる. そこで符号を省略し, それを q_r と表す. 以下の議論も符号には関係しないので, 同様に符号を省略する.) ここで, 変数 $x^{(k)}$ の k は modulo 2 で考えるものとする. さらに, $r=0$ に対しては, $q_0^{(k)}(x;t) = 1$ としておく. $q_r^{(k)}(x;t)$ は, 整数係数の x, t に関する多項式になり, 変数 x に関しては次数 r の斉次多項式になる. ここで $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}) \in \mathcal{P}_{n,2}$ に対して,

$$(5.1.2) \qquad q_{\boldsymbol{\alpha}}(x;t) = \prod_{k=0}^{1} \prod_{j=1}^{m} q^{(k)}_{\alpha_j^{(k)}}(x;t)$$

により関数 $q_{\boldsymbol{\alpha}}(x;t)$ を定義する.

次に, 分割 $\alpha^{(k)}:\alpha_1^{(k)}\geq\cdots\geq\alpha_{l_k}^{(k)}$ ($l_k=l(\alpha^{(k)})$) に対し, t の有理関数 $z_{\alpha^{(k)}}(t)$ を

$$z_{\alpha^{(k)}}(t)=\prod_{j=1}^{l_k}(1-(-1)^k t^{\alpha_j^{(k)}})^{-1},$$

により定義する. そして, $\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{P}_{n,2}$ に対し,

$$z_{\boldsymbol{\alpha}}(t)=z_{\boldsymbol{\alpha}}\prod_{k=0}^{1}z_{\alpha^{(k)}}(t) \tag{5.1.3}$$

とおいて関数 $z_{\boldsymbol{\alpha}}(t)$ を定義する. ただし, $z_{\boldsymbol{\alpha}}$ は $w_{\boldsymbol{\alpha}}$ の W_0 での中心化群 $Z_{W_0}(w_{\boldsymbol{\alpha}})$ の位数を表す. 具体的には, $z_{\boldsymbol{\alpha}}$ は次のようになる. $\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{P}_{n,2}$ に対し, $l(\boldsymbol{\alpha})=l(\alpha^{(0)})+l(\alpha^{(1)})$ とおき, 分割 $\alpha=(1^{n_1},2^{n_2},\cdots)$ に対し, $z_\alpha=\prod_{i\geq1}i^{n_i}n_i!$ とおく. このとき, $z_{\boldsymbol{\alpha}}=2^{l(\boldsymbol{\alpha})}\prod_{k=0}^{1}z_{\alpha^{(k)}}$.

ここで, 各 $k=0,1$ に対し, 無限個の変数 $x_i^{(k)},y_i^{(k)}$ $(i=1,2,\dots)$ を導入する. 今までに表れた関数はみな, 無限個の変数 $x_1^{(k)},x_2^{(k)},\dots$ に関する関数とみなすことができる. このような設定のもとで B_n-型の場合には次が成立する.

命題 5.2. 無限積 $\Omega(x,y;t)$ を次のように定義する.

$$\Omega(x,y;t)=\prod_{k=0}^{1}\prod_{i,j}\frac{1-tx_i^{(k+1)}y_j^{(k)}}{1-x_i^{(k)}y_j^{(k)}}.$$

このとき, 以下のような展開が得られる.

$$\Omega(x,y;t)=\sum_{\boldsymbol{\alpha}}q_{\boldsymbol{\alpha}}(x;t)m_{\boldsymbol{\alpha}}(y)=\sum_{\boldsymbol{\alpha}}m_{\boldsymbol{\alpha}}(x)q_{\boldsymbol{\alpha}}(y;t), \tag{5.2.1}$$

$$\Omega(x,y;t)=\sum_{\boldsymbol{\alpha}}z_{\boldsymbol{\alpha}}(t)^{-1}p_{\boldsymbol{\alpha}}(x)p_{\boldsymbol{\alpha}}(y). \tag{5.2.2}$$

ここで $\boldsymbol{\alpha}$ は任意のサイズの 2-分割を全て動く.

5.3. (無限変数) 多項式環 $\mathbb{Z}[x]$ の同型写像 θ を $\theta(x_j^{(k)})=x_j^{(k+1)}$ $(j=1,2,\dots)$ により定義する. 変数 y,t は固定することにより, θ は involutive な同型 $\theta_x:\mathbb{Z}[x,y;t]\to\mathbb{Z}[x,y;t]$ に拡張される. 射影 $\pi_x^{\pm}:\mathbb{Q}[x,y;t]\to\mathbb{Q}[x,y;t]$ を符号 $\pm$ に応じて,

$$\pi_x^{\pm}=\frac{1}{2}(1\pm\theta_x)$$

により定義する. また, $j=1,2,\ldots$ に対して $X_j = x_j^{(0)}x_j^{(1)}, Y_j = y_j^{(0)}y_j^{(1)}$ とおき, $\Omega^1(x,y;t)$ を

$$\Omega^1(x,y;t) = \prod_{i,j} \frac{1-t^2X_iY_j}{1-X_iY_j}$$

により定義する. $\Omega^1(x,y;t)$ は変数 X_i, Y_j, t^2 に関する A_n-型の場合の Cauchy の再生核 に他ならない.

$$\begin{aligned}\mathbf{\Omega}^+(x,y;t) &= (\pi_x^+(\Omega(x,y;t)), 2\Omega^1(x,y;t))\\ \mathbf{\Omega}^-(x,y;t) &= (\pi_x^-(\Omega(x,y;t)), 0)\end{aligned}$$

とおく. $\mathbf{\Omega}^\pm$ が $D_n^\pm$-型の場合の Cauchy の再生核の役割を果たすことをみて行こう. $(\boldsymbol{\alpha},\phi) \in \widetilde{\mathcal{P}}_n^\pm$ に対し, $\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{\alpha},\phi}(x;t), \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\alpha},\phi}(x)$ を Schur 関数と同様に定義する. $\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{\alpha},\phi} = (q^0_{\boldsymbol{\alpha},\phi}, q^1_{\boldsymbol{\alpha},\phi}), \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\alpha},\phi} = (m^0_{\boldsymbol{\alpha},\phi}, m^1_{\boldsymbol{\alpha},\phi})$ とおく. $(\boldsymbol{\alpha},\phi) \in \widetilde{\mathcal{P}}_n^+$ の場合, 第 1 成分に関しては, $r = 2/o_{\boldsymbol{\alpha}}$ とするとき

$$q^0_{\boldsymbol{\alpha},\phi}(x;t) = \sum_{i=0}^{r-1} q_{\theta^i(\boldsymbol{\alpha})}(x;t), \qquad m^0_{\boldsymbol{\alpha},\phi}(x) = \sum_{i=0}^{r-1} m_{\theta^i(\boldsymbol{\alpha})}(x). \tag{5.3.1}$$

また第 2 成分に関しては,

$$q^1_{\boldsymbol{\alpha},\phi}(x;t)) = \begin{cases} \pm q_\beta(X;t^2) & \theta(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha} \text{ の場合}, \\ 0 & \theta(\boldsymbol{\alpha}) \neq \boldsymbol{\alpha} \text{ の場合}. \end{cases} \tag{5.3.2}$$

$$m^1_{\boldsymbol{\alpha},\phi}(x) = \begin{cases} \pm m_\beta(X) & \theta(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha} \text{ の場合}, \\ 0 & \theta(\boldsymbol{\alpha}) \neq \boldsymbol{\alpha} \text{ の場合}. \end{cases} \tag{5.3.3}$$

ただし, $\theta(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}$ の場合, $\boldsymbol{\alpha} = (\beta;\beta)$ とおいた. また, $q_\beta(X;t^2)$ は変数 $X_j = x_j^{(0)}x_j^{(1)}$ に関する A_n-型の場合の q_β-関数 ([M, III, 2]) を意味する. $m_\beta(X)$ は変数 X_j に関する単項式対称関数である.

一方, $(\boldsymbol{\alpha},\phi) \in \widetilde{\mathcal{P}}_n^-$ の場合, 第 1 成分に関しては

$$q^0_{\boldsymbol{\alpha},\phi}(x;t) = q_{\boldsymbol{\alpha}}(x;t) - q_{\theta(\boldsymbol{\alpha})}(x;t), \qquad m^0_{\boldsymbol{\alpha},\phi}(x) = m_{\boldsymbol{\alpha}}(x) - m_{\theta(\boldsymbol{\alpha})}(x). \tag{5.3.4}$$

また第2成分に関しては,

$$q^1_{\boldsymbol{\alpha},\phi}(x;t) = 0, \qquad m^1_{\boldsymbol{\alpha},\phi}(x) = 0 \tag{5.3.5}$$

と定義する.

次の結果が $D_n^{\pm}$ 型の場合における命題 5.2 の類似を与える.

命題 5.4. $\boldsymbol{\Omega}^{\pm}(x,y;t)$ は次の展開を持つ.

$$\boldsymbol{\Omega}^{\pm}(x,y;t) = \sum_{(\boldsymbol{\alpha},\phi)} \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{\alpha},\phi}(x;t)\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\alpha},\phi}(y) = \sum_{\boldsymbol{\alpha},\phi} \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\alpha},\phi}(x)\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{\alpha},\phi}(y;t), \tag{5.4.1}$$

$$\boldsymbol{\Omega}^{\pm}(x,y;t) = \sum_{(\boldsymbol{\alpha},c)} z_{\boldsymbol{\alpha}}(t)^{-1}\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{\alpha},c}(x)\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{\alpha},c}(y). \tag{5.4.2}$$

ただし, $\pm$ の符号の応じて, *(5.4.1)* では, $(\boldsymbol{\alpha},\phi)$ は $\bigcup_{n\geq 1}\widetilde{\mathcal{P}}_n^{\pm}$ のすべての元を動き, *(5.4.2)* では, $(\boldsymbol{\alpha},c)$ は $\bigcup_{n\geq 1}\mathcal{P}_{n,\pm}$ のすべての元を動く.

5.5. 次に, D_n-型の場合の Hall-Littlewood 関数を導入するが, その前に B_n-型の場合の Hall-Littlewood 関数の性質を復習しておこう. 各 symbol $\boldsymbol{\Lambda} \in Z_n^r$ に対して, [S2] で Hall-Littlewood 関数 $P_{\boldsymbol{\Lambda}}(x;t), Q_{\boldsymbol{\Lambda}}(x;t)$ が構成された. 命題 5.2 と関連して, $P_{\boldsymbol{\Lambda}}, Q_{\boldsymbol{\Lambda}}$ は次のような展開を持つ.

$$\Omega(x,y;t) = \sum_{\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{\Lambda}'} b_{\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{\Lambda}'}(t)P_{\boldsymbol{\Lambda}}(x;t)P_{\boldsymbol{\Lambda}'}(y;t), \tag{5.5.1}$$

$$\Omega(x,y;t) = \sum_{\boldsymbol{\Lambda}} Q_{\boldsymbol{\Lambda}}(x;t)P_{\boldsymbol{\Lambda}}(y;t) = \sum_{\boldsymbol{\Lambda}} P_{\boldsymbol{\Lambda}}(x;t)Q_{\boldsymbol{\Lambda}}(y;t). \tag{5.5.2}$$

ここに, (5.5.1) 式では, $\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{\Lambda}'$ は $\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n^r$ の元を全て動く. また, $|\boldsymbol{\Lambda}| = |\boldsymbol{\Lambda}'|$ かつ $\boldsymbol{\Lambda} \sim \boldsymbol{\Lambda}'$ の場合を除いて $b_{\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{\Lambda}'}(t) = 0$ となる. ($\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha})$ のとき, $|\boldsymbol{\Lambda}| = |\boldsymbol{\alpha}|$ とおいて, $|\boldsymbol{\Lambda}|$ を定義しておく). (5.5.2) では $\boldsymbol{\Lambda}$ は $\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n^r$ の元を全て動く.

さて, $\widetilde{Z}_n^{r,\pm}$ を $(\boldsymbol{\alpha},\phi) \in \widetilde{\mathcal{P}}_n^{\pm}$ から定まる組 $(\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha}),\phi)$ 全体の集合とする. 各 $(\boldsymbol{\Lambda},\phi) \in \widetilde{Z}_n^{r,\pm}$ に対して $D_n^{\pm}$-型の Hall-Littlewood 関数 $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\Lambda},\phi} = (P^0_{\boldsymbol{\Lambda},\phi}, P^1_{\boldsymbol{\Lambda},\phi})$, $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\Lambda},\phi} = (Q^0_{\boldsymbol{\Lambda},\phi}, Q^1_{\boldsymbol{\Lambda},\phi})$ を次のように定義する. まず, D_n^+-型の場合を考える. $(\boldsymbol{\Lambda},\phi) \in \widetilde{Z}_n^{r,+}$ に対し, 第1成分に関しては $r = 2/o_{\boldsymbol{\alpha}}$ とするとき,

$$P^0_{\boldsymbol{\Lambda},\phi}(x,y;t) = \sum_{i=0}^{r-1} P_{\theta^i(\boldsymbol{\Lambda})}(x,y;t), \qquad Q^0_{\boldsymbol{\Lambda},\phi}(x,y;t) = \sum_{i=0}^{r-1} Q_{\theta^i(\boldsymbol{\Lambda})}(x,y;t). \tag{5.5.3}$$

ただし, $\boldsymbol{\Lambda}(\theta^i(\boldsymbol{\alpha}))$ を $\theta^i(\boldsymbol{\Lambda})$ とおいた. また第2成分に関しては,

$$P^1_{\boldsymbol{\Lambda},\phi}(x;t)) = \begin{cases} \pm P_\beta(X;t^2) & \theta(\boldsymbol{\Lambda}) = \boldsymbol{\Lambda} \text{ の場合}, \\ 0 & \theta(\boldsymbol{\Lambda}) \neq \boldsymbol{\Lambda} \text{ の場合}. \end{cases} \tag{5.5.4}$$

$$Q^1_{\boldsymbol{\Lambda},\phi}(x) = \begin{cases} \pm Q_\beta(X;t^2) & \theta(\boldsymbol{\Lambda}) = \boldsymbol{\Lambda} \text{ の場合}, \\ 0 & \theta(\boldsymbol{\Lambda}) \neq \boldsymbol{\Lambda} \text{ の場合}. \end{cases} \tag{5.5.4}$$

ただし, $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha})$ が $\theta(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}$ をみたすとき, $\boldsymbol{\alpha} = (\beta;\beta)$ と書ける. P_β, Q_β は分割 β に付随した, 変数 X, t^2 に関する A_n-型の Hall-Littlewood 関数である. 符号は, 以前と同様に, $\phi = 1$ のとき正, $\phi \neq 1$ のとき負に取る.

次に, D_n^--型の場合を考える. 各 $(\boldsymbol{\Lambda}, \phi) \in \widetilde{Z}_n^{r,-}$ に対して, 第1成分に関しては

$$P^0_{\boldsymbol{\Lambda},\phi}(x,y;t) = P_{\boldsymbol{\Lambda}}(x,y;t) - P_{\theta(\boldsymbol{\Lambda})}(x,y;t), \qquad Q^0_{\boldsymbol{\Lambda},\phi}(x,y;t) = Q_{\boldsymbol{\Lambda}}(x,y;t) - Q_{\theta(\boldsymbol{\Lambda})}(x,y;t)$$

と定義する. また, 第2成分に関しては,

$$P^1_{\boldsymbol{\Lambda},\phi}(x,y;t) = 0, \qquad Q^1_{\boldsymbol{\Lambda},\phi}(x,y;t) = 0$$

とおく. 以上の設定のもとに次が成り立つ.

命題 5.6. $\boldsymbol{\Omega}^\pm(x,y;t)$ は次の展開を持つ.

$$\boldsymbol{\Omega}^\pm(x,y;t) = \sum_{(\boldsymbol{\Lambda},\phi),(\boldsymbol{\Lambda}',\phi')} b_{(\boldsymbol{\Lambda},\phi),(\boldsymbol{\Lambda}',\phi')}(t)\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\Lambda},\phi}(x;t)\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\Lambda}',\phi'}(y;t), \tag{5.6.1}$$

$$\boldsymbol{\Omega}^\pm(x,y;t) = \sum_{\boldsymbol{\Lambda},\phi} \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\Lambda},\phi}(x;t)\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\Lambda},\phi}(y;t) = \sum_{\boldsymbol{\Lambda},\phi} \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\Lambda},\phi}(x;t)\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\Lambda},\phi}(y;t). \tag{5.6.2}$$

ここに, $\pm$ の符号に応じて (5.6.1) 式では, $(\boldsymbol{\Lambda},\phi),(\boldsymbol{\Lambda}',\phi')$ は $\bigcup_{n=1}^\infty \widetilde{Z}_n^{r,\pm}$ の元を全て動く. また, $|\boldsymbol{\Lambda}| = |\boldsymbol{\Lambda}'|$ かつ $\boldsymbol{\Lambda} \sim \boldsymbol{\Lambda}'$ の場合を除いて $b_{(\boldsymbol{\Lambda},\phi),(\boldsymbol{\Lambda}',\phi')}(t) = 0$ となる. (5.6.2) では $(\boldsymbol{\Lambda},\phi)$ は $\bigcup_{n=1}^\infty \widetilde{Z}_n^{r,\pm}$ の元を全て動く.

5.7. $\Xi_m = \bigotimes_{k=0}^1 \mathbb{Z}[x_1^{(k)}, \dots, x_m^{(k)}]^{\mathfrak{S}_m}$ を変数 $x = (x_j^{(k)})$ の $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_m$ に関する対称多項式のなす環とする. Ξ_m には次数付き環 $\Xi_m = \bigoplus_{i\geq 0} \Xi_m^i$ の構造が自然に入る. ここに, Ξ_m^i は, 次数 i の斉次対称多項式の全体 (とゼロ) を表す. 整数 $l \geq 0$ に対して, $m' = m + l$ とおくとき, 準同型 $\rho_{m',m} : \Xi_{m'}^i \to \Xi_m^i$ を, $k \geq m$ に対して, $x_i^{(k)} \mapsto 0$, 他の $x_j^{(k)}$ は動かさ

ない, として定義する. 射影的極限

$$\Xi^i = \varprojlim_m \Xi^i_m$$

を考えて, $\Xi = \bigoplus_{i\geq 0}\Xi^i$ とおく. Ξ が (B_n-型の場合の) 対称関数の空間である. 無限変数 $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots$ に関する Schur 関数 $s_{\boldsymbol{\alpha}}(x)$ は Ξ^n ($n = |\boldsymbol{\alpha}|$) の元とみることができ, $\{s_{\boldsymbol{\alpha}}(x) \mid \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}_{n,2}\}$ が Ξ^n の $\mathbb{Z}$-基底をなす. また, $\{P_{\boldsymbol{\Lambda}}(x;t) \mid \boldsymbol{\Lambda} \in Z_n^r\}$, $\{Q_{\boldsymbol{\Lambda}}(x;t) \mid \boldsymbol{\Lambda} \in Z_n^r\}$ は共に, $\Xi_{\mathbb{Q}}[t] = \mathbb{Q}(t)\otimes_{\mathbb{Z}}\Xi^n$ の $\mathbb{Q}(t)$-基底を与える.

D_n-型の Schur 関数 $\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\alpha},\phi}(x)$ は $\Xi^n \oplus \Xi^n$ の元とみることができる. $\{\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\alpha},\phi}(x) \mid (\boldsymbol{\alpha},\phi) \in \widetilde{\mathcal{P}}_n^{\pm}\}$ で生成された $\Xi^n\oplus\Xi^n$ の $\mathbb{Z}$-部分加群を $\varPi_{\pm}^n$ と表す. このとき, $\{\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\alpha},\phi}(x) \mid (\boldsymbol{\alpha},\phi) \in \widetilde{\mathcal{P}}_n^{\pm}\}$, $\{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\alpha},\phi}(x) \mid (\boldsymbol{\alpha},\phi) \in \widetilde{\mathcal{P}}_n^{\pm}\}$, は共に $\varPi_{\pm}^n$ の $\mathbb{Z}$-基底を与える. また, $\{\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\Lambda},\phi}(x;t) \mid (\boldsymbol{\Lambda},\phi) \in \widetilde{Z}_n^{r,\pm}\}$, $\{\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\Lambda},\phi}(x;t) \mid (\boldsymbol{\Lambda},\phi) \in \widetilde{Z}_n^{r,\pm}\}$ が $\mathbb{Q}(t)$ 空間 $\varPi_{\pm,\mathbb{Q}}^n[t] = \mathbb{Q}(t)\otimes_{\mathbb{Z}}\varPi_{\pm}^n$ の $\mathbb{Q}(t)$-基底になることも確かめられる.

B_n-型の場合, Schur 関数 $s = \{s_{\boldsymbol{\alpha}}\}$ のなす $\Xi_{\mathbb{Q}}^n[t]$ の基底 と Hall-Littlewood 関数 $P = \{P_{\boldsymbol{\Lambda}}\}$ のなす基底との間の遷移行列 $M(s,P)$ として Kostka 関数 $K(t) = (K_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}}(t))$ が定義された. すなわち,

$$s_{\boldsymbol{\beta}}(x) = \sum_{\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha})} K_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}}(t)P_{\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha})}(x;t). \tag{5.7.1}$$

$D_n^{\pm}$-型の場合にも同様に, Schur 関数 $\boldsymbol{s} = \{\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\alpha},\phi}\}$ のなす $\varPi_{\pm,\mathbb{Q}}^n[t]$ の基底 と Hall-Littlewood 関数 $\boldsymbol{P} = \{\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\Lambda},\phi}\}$ のなす基底との間の遷移行列 $M(\boldsymbol{s},\boldsymbol{P})$ として Kostka 関数 $K^{\pm}(t) = (K_{(\boldsymbol{\beta},\phi),(\boldsymbol{\alpha},\phi')}(t))$ を定義する. すなわち,

$$\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\beta},\phi}(x) = \sum_{(\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha}),\phi')} K_{(\boldsymbol{\beta},\phi),(\boldsymbol{\alpha},\phi')}(t)\boldsymbol{P}_{(\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha}),\phi')}(x;t). \tag{5.7.2}$$

$K_{(\boldsymbol{\beta},\phi),(\boldsymbol{\alpha},\phi')}(t) \in \mathbb{Q}(t)$ を $\widetilde{Z}_n^{r,\pm}$ に付随した Kostka 関数という. B_n 型の場合と同様に, $K^{\pm}(t)$ は区分け行列として下三角になり, 対角線にならぶブロックは全て単位行列になる. ここで, $\widetilde{K}_{(\boldsymbol{\alpha},\phi),(\boldsymbol{\beta},\phi')}(t) = t^{a(\boldsymbol{\beta})}K_{(\boldsymbol{\alpha},\phi),(\boldsymbol{\beta},\phi')}(t^{-1})$ とおき, 行列 $\widetilde{K}^{\pm}(t) = (\widetilde{K}_{(\boldsymbol{\alpha},\phi),(\boldsymbol{\beta},\phi')}(t))$ を定義する. $\widetilde{K}^{\pm}(t)$ は (3.5.1) の P と同じ条件を満たすことに注意する. 次に, 行列 $D^{\pm}(t) = (b_{(\boldsymbol{\Lambda},\phi),(\boldsymbol{\Lambda}',\phi')}(t))$ $((\boldsymbol{\Lambda},\phi),(\boldsymbol{\Lambda}',\phi') \in \widetilde{Z}_n^{r,\pm})$ を考える. ただし, $b_{(\boldsymbol{\Lambda},\phi),(\boldsymbol{\Lambda}',\phi')}(t)$ は (5.6.1) に表れたものである. $D^{\pm}(t)^{-1} = (b'_{(\boldsymbol{\Lambda},\phi),(\boldsymbol{\Lambda}',\phi')}(t))$ とおいて, 行列 $\widetilde{\varLambda}^{\pm}(t)$ を $\widetilde{\varLambda}^{\pm}(t) = (d(t)t^{a(\boldsymbol{\Lambda}')-a(\boldsymbol{\Lambda})}b'_{(\boldsymbol{\Lambda},\phi),(\boldsymbol{\Lambda}',\phi')}(t^{-1}))$ により定義する. ここで, $d(t) = t^{N-n}(t-1)^nP_W(t)$ とお

いた. 明らかに, $\widetilde{\Lambda}^{\pm}(t)$ は区分けの意味で対角行列になっている. 以上の設定のもとで次の定理が得られる.

定理 5.8. 行列 $\widetilde{K}^{\pm}(t), \widetilde{\Lambda}^{\pm}(t)$ は次の関係式を満たす.

$$\widetilde{K}^{\pm}(t)\widetilde{\Lambda}^{\pm}(t)\,{}^t\widetilde{K}^{\pm}(t) = \Omega^{\pm}.$$

(ただし, 複号は同順に取る.) 特に, $P = \widetilde{K}^{\pm}(t), \Lambda = \widetilde{\Lambda}^{\pm}(t)$ は方程式 *(3.5.1)* の解を与える.

(5.7.2) と (5.7.1) を比較することにより, 次を得る.

命題 5.9. $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathcal{P}_{n,2}$ を $\theta(\boldsymbol{\alpha}) \neq \boldsymbol{\alpha}, \theta(\boldsymbol{\beta}) \neq \boldsymbol{\beta}$ となるものとする. このとき,

$$K_{(\boldsymbol{\alpha},\phi),(\boldsymbol{\beta},\phi)}(t) = K_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(t) \pm K_{\boldsymbol{\alpha},\theta(\boldsymbol{\beta})}(t).$$

ただし, $(\boldsymbol{\alpha}, \phi), (\boldsymbol{\beta}, \phi) \in \widetilde{\mathcal{P}}_n^+$ のとき, 正符号, $(\boldsymbol{\alpha}, \phi), (\boldsymbol{\beta}, \phi) \in \widetilde{\mathcal{P}}_n^-$ のとき, 負符号を取るものとする. *(条件より, ϕ は単位表現であることに注意).*

注意 5.10. 定理 5.8 を 命題 5.9 と結びつけることにより, D_n 型の Green 関数の, $\theta(\boldsymbol{\alpha}) \neq \boldsymbol{\alpha}$, $\theta(\boldsymbol{\beta}) \neq \boldsymbol{\beta}$ での値は, (Z_n^r に付随した) B_n 型の "Green 関数" によって表されることが分かる. $\theta(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}$, または $\theta(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\beta}$ の場合にも D_n 型の Green 関数を B_n-型の Green 関数と A_n-型の Green 関数を使って記述することができる.

しかし, ここに表れる Green 関数は $r = 2$ の場合でさえも, B_n 型の本来の Green 関数とは異なることに注意しておく. 実際, (5.7.1) で定義された Kostka 関数 $K_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(t)$ から得られる modified Kostka 関数 $\widetilde{K}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(t) = t^{a(\boldsymbol{\beta})}K_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(t^{-1})$ が Z_n^r に付随する Green 関数を与えることが, [S2] で示されている. しかし, [S2] で示されたように, SO_{2n+1} に付随する Green 関数は ([S2] の記号で) symbol $Z_n^{2,0}(\boldsymbol{m})$ によって定まる. ここに, $\boldsymbol{m} = (m+1, m)$ であって, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}) \in \mathcal{P}_{n,2}$ は,

$$\alpha^{(0)} : \alpha_0^{(0)} \geq \cdots \geq \alpha_m^{(0)} \geq 0, \qquad \alpha^{(1)} : \alpha_1^{(1)} \geq \cdots \geq \alpha_m^{(1)} \geq 0$$

と表されていた. 一方, ここで扱った B_n 型の symbol Z_n^r ($r = 2$) は, [S2] の記号のもとでは, $Z_n^{2,0}(\boldsymbol{m})$, $\boldsymbol{m} = (m, m)$ に対応している. したがって, 両者は $\mathcal{P}_{n,2}$ の異なる同値類を与える.

REFERENCES

[DL] P. Deligne and G. Lusztig; Representations of reductive groups over finite fields, Ann. of Math. 103 (1976), 103–161.

[G] J.A. Green; The characters of the finite general linear groups, Trans. Amer. Math. Soc. 80 (1955), 402–447.

[GM] M. Geck and G. Malle; On special pieces in the unipotent variety, Experimental Math. **8** (1999).

[L1] G. Lusztig; Irreducible representations of finite classical groups, Invent. Math. **43** (1977), 125–175

[L2] G. Lusztig; Intersection cohomology complexes on a reductive group, Invent. Math. **75** (1984), 205–272.

[L3] G. Lusztig; Character sheaves V, Advances in Math. **61** (1986), 103–155.

[M] I.G. Macdonald; Symmetric functions and Hall Polynomials, second edition. Clarendon Press. Oxford 1995.

[S1] T. Shoji; On the Green polynomials of classical groups. Inventiones Math., **74** (1983), 239 - 267.

[S2] T. Shoji; Green functions associated to complex reflection groups. Preprint.

[S3] 庄司 俊明; 複素鏡映群に付随した Green 関数について. 第 44 回代数学シンポジウム (2000 年, 九大) 報告集に掲載予定.

[S4] T. Shoji; Green functions associated to complex reflection groups, II. 準備中.