数理解析研究所講究録
第1192巻 2001年 114-117

解析関数の係数評価について

布川　護（群馬大学・教育学部）、　尾和　重義（近畿大学・理工学部）、
高橋　典宏（群馬大学・教育学部）

1　星型関数の係数評価

単位円板 $U=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ で解析的である関数

$$f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k$$

の全体を $A(1)$ で表す。
１９６０年に J. Clunie と F. R. Keogh [1] は $A(1)$ の関数 $f(z)$ に対して、次のような定理を与えた。

【定理A】　$A(1)$ の関数 $f(z)$ が U で星型で、U を面積 Δ の領域に写像するとき、

$$|a_n|\leq\frac{2}{n-1}\left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^{1/2}\qquad(n=2,3,4,\cdots)$$

が成り立つ。

また、１９６２年に Ch. Pommerenke [3] が次の結果を証明した。

【定理B】　$A(1)$ の関数 $f(z)$ が U で星型で、U を面積 π の領域に写像するとき、

$$|a_n|\leq\frac{2}{n+1}\qquad(n=2,3,4,\cdots)$$

が成り立つ。

さらに、１９６４年に J. Clunie と Ch. Pommerenke [2] は次のような定理を証明した。

【定理C】 $A(1)$ の関数 $f(z)$ が U で close-to-convex ならば

$$|a_n| < \frac{(2+\sqrt{2})e}{n} M\left(\frac{n}{n+1}\right) \qquad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

が成り立つ。ただし、$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ である。
特に、$|f(z)| < 1$ $(z \in U)$ ならば

$$|a_n| < \frac{(2+\sqrt{2})e}{n} < \frac{9.3}{n} \qquad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

が成り立つ。

2 解析関数の係数評価

単位円板 U で解析的な関数

$$f(z) = z^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k \qquad (p \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\})$$

の族を $A(p)$ で表す。定理A、定理B、および定理C では関数族 $A(1)$ の関数に対する係数評価が与えられた。ここでは、関数族 $A(p)$ の関数に対する係数評価を考察する。

【定理１】 $A(p)$ の関数 $f(z)$ に対して

$$|a_{p+n}| \leq \sqrt{\frac{S(r)}{2\pi}} \left(\frac{4(p+n)+1}{2(p+n)r^{p+n}}\right) \frac{1}{\sqrt{2(p+n)+1}} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つ。ただし、$|z| < r \leq 1$ および

$$S(r) = \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho |f'(\rho e^{i\theta})|^2 \, d\rho d\theta \qquad (0 < r < 1)$$

とする。

【証明】 コーシーの積分表示によって、$A(p)$ の関数

$$f(z) = z^p + a_{p+1} z^{p+1} + a_{p+2} z^{p+2} + \cdots + a_{p+n} z^{p+n} + \cdots$$

に対して、

$$(p+n) a_{p+n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f'(z)}{z^{p+n}} \, dz \qquad (0 < |z| = r < 1)$$

すなわち、

$$(p+n)|a_{p+n}| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f'(re^{i\theta})|}{r^{p+n-1}}\,d\theta$$

が成り立つ。したがって、

$$(p+n)|a_{p+n}|\rho^{2(p+n)-\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \rho^{p+n}\sqrt{\rho}|f'(\rho e^{i\theta})|\,d\theta$$

を得る。この両辺を積分して、

$$(p+n)|a_{p+n}|\int_0^r \rho^{2(p+n)-\frac{1}{2}}\,d\rho \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^r\int_0^{2\pi} \sqrt{\rho}|f'(\rho e^{i\theta})|\rho^{p+n}\,d\theta\,d\rho$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi}\int_0^r \rho|f'(\rho e^{i\theta})|^2\,d\rho\,d\theta\right\}^{1/2}\left\{\int_0^{2\pi}\int_0^r \rho^{2(p+n)}\,d\rho\,d\theta\right\}^{1/2}$$

が得られる。したがって、

$$|a_{p+n}| \leq \sqrt{\frac{S(r)}{2\pi}}\left(\frac{4(p+n)+1}{2(p+n)r^{p+n}}\right)\frac{1}{\sqrt{2(p+n)+1}}$$

を得る。

定理１から $A(1)$ の関数 $f(z)$ に対して、次の定理が得られる。

【定理２】 $A(1)$ の関数 $f(z)$ に対して

$$|a_n| \leq \sqrt{\frac{S(r)}{2\pi}}\left(\frac{4n+1}{2nr^n}\right)\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \qquad (n=2,3,4,\cdots)$$

が成り立つ。

【注意】 定理２では、関数 $f(z)$ の単葉性を仮定していないが、$f(z)$ が U で単葉ならば、$S(r)$ は領域 $f(|z|<r)$ の面積に等しくなる。このとき、

$$|a_n| \leq \sqrt{\frac{S}{2\pi}}\left(\frac{4n+1}{2n}\right)\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \qquad (n=2,3,4,\cdots)$$

が得られる。ただし、S は領域 $f(|z|<1)$ の面積を表す。

最後に、定理２から

【系】 $A(1)$ の関数 $f(z)$ が $S \leq \pi$ を満たすとき

$$|a_n| \leq \left(\frac{4n+1}{2\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \qquad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

が成り立つ。

参考文献

[1] J.Clunie and F.R.Keogh, *On starlike and convex schlicht functions*, J. London Math. Soc. **35**(1960), 229 - 233.

[2] J.Clunie and Ch.Pommerenke, *On the coefficients of close-to-convex univalent functions*, J. London Math. Soc. **41**(1966), 161 - 165.

[3] Ch.Pommerenke, *On starlike and convex functions*, J. London Math. Soc. **37**(1962), 209 - 224.