数理解析研究所講究録
1194 巻 2001 年 225-232

幾何ブラウン運動の最適インパルス制御について

辻村 元男
大阪大学 大学院経済学研究科
mtsujimu@compsrv.econ.osaka-u.ac.jp

大西 匡光 †
大阪大学 大学院経済学研究科
ohnishi@econ.osaka-u.ac.jp

平成 13 年 2 月 8 日

1 幾何ブラウン運動のインパルス制御

1 次元の**ブラウン運動フィルトレーション**付きの確率空間を

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; (\mathcal{F}(t); t \in \mathbb{R}_+)) \tag{1.1}$$

とし, $x \in \mathbb{R}_+$ を初期状態として, 制御を実施しない場合の**幾何ブラウン運動**

$$(X^x(t); t \in \mathbb{R}_+) \tag{1.2}$$

は次の確率微分方程式 (SDE) で定義される:

$$X^x(0) = x \in \mathbb{R}_+; \tag{1.3}$$

$$dX^x(t) = \mu X^x(t)dt + \sigma X^x(t)dW(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.4}$$

ただし,

μ ($\in \mathbb{R}$): **ドリフト係数**;
σ ($\in \mathbb{R}_{++}$): **拡散係数** (**ボラティリティ係数**);
$(W(t); t \in \mathbb{R}_+)$: 1 次元 $(\mathcal{F}(t))$–**ブラウン運動**.

とする (($\mathcal{F}(t); t \in \mathbb{R}_+$) は $(W(t); t \in \mathbb{R}_+)$ から生成される自然なフィルトレーションである).

このとき,

$$X^x(t) = x \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)\right\}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.5}$$

ただし $W(t) \sim N(0, t)$.

定義 1.1 (インパルス制御, 制御過程) インパルス制御とは確率要素の対の列

$$\delta := ((\tau_i, \Delta X_i); i \in \mathbb{Z}_{++}) \tag{1.6}$$

で定義される. ここで,

(1) τ_i ($i \in \mathbb{Z}_{++}$) は 第 i **干渉時刻**で, i について単調増加, すなわち,

$$0 \leq \tau_1 \leq \cdots \leq \tau_i \leq \tau_{i+1} \leq \cdots \leq \infty, \quad \mathbb{P}\text{–a.s.} \tag{1.7}$$

を満たす $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ 値 $(\mathcal{F}(t))$–停止時刻であり, さらに,

$$\tau_i < \infty \implies \tau_i < \tau_{i+1} \leq \infty, \quad \mathbb{P}\text{–a.s.}; \tag{1.8}$$

$$\tau_i = \infty \implies \tau_i = \tau_{i+1} = \infty, \quad \mathbb{P}\text{–a.s.}; \tag{1.9}$$

(2) ΔX_i $(i \in \mathbb{Z}_{++})$ は第 i **干渉アクション**で $(\mathcal{F}(\tau_i))$–可測;

(3) **制御過程** $(X^{x,\delta}(t); t \in \mathbb{R}_+)$ は,

$$X^{x,\delta}(0-) = x \in \mathbb{R}_+ \tag{1.10}$$

として, $i \in \mathbb{Z}_{++}$ に対しては, 再帰的に,

$$\begin{aligned} dX^{x,\delta}(t) &= \mu X^{x,\delta}(t)dt + \sigma X^{x,\delta}(t)dW(t), \quad \tau_{i-1} \le t < \tau_i \le \infty; & (1.11)\\ X^{x,\delta}(\tau_i) &= X^{x,\delta}(\tau_i-) + \Delta X_i & (1.12)\end{aligned}$$

と定義される, ただし, $\tau_0 := 0$ とする.

さらに, インパルス制御が**許容** (的) であるとは, 次を満たす場合を言う:

(4) すべての $T \in \mathbb{R}_+$ に対して,

$$\mathbb{P}\left(\lim_{i\to\infty} \tau_i \le T\right) = 0. \tag{1.13}$$

許容なインパルス制御のすべてからなる集合を Δ で表す. □

定義 1.2 (コスト構造)

(1) $K(x, \Delta x) \in \mathbb{R}_+$ $(x \in \mathbb{R}_+,\ x + \Delta x \in \mathbb{R}_+)$: 過程が状態 x にあるときに干渉アクション Δx を用いた場合に瞬間的にかかる正の**干渉コスト**とし, 次の狭義の三角不等式を満たすものとする;

$$\begin{aligned} K(x, \Delta x + \Delta y) \quad &< \quad K(x, \Delta x) + K(x + \Delta x, \Delta y),\\ &\qquad \forall (x, x + \Delta x, x + \Delta x + \Delta y) \in \mathbb{R}_+^3; \end{aligned} \tag{1.14}$$

(2) $c(x) \in \mathbb{R}$ $(x \in \mathbb{R}_+)$: 過程が状態 x にあるときに単位時間当たりにかかる**ランニング・コスト率**で x の連続関数;

(3) $\alpha \in \mathbb{R}_{++}$: **割引き率**

としたとき, 次で定義される無限計画期間にわたる**期待総割引き費用**を最小化することを目的とする:

(4) $x \in \mathbb{R}_+$, $\delta \in \Delta$ に対して,

$$v^\delta(x) := \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} c(X^{x,\delta}(t))dt + \sum_{i=1}^\infty e^{-\alpha\tau_i} K(X^{x,\delta}(\tau_i-), \Delta X_i) 1_{\{\tau_i<\infty\}}\right]. \tag{1.15}$$

□

以下では, k, $K \in \mathbb{R}_{++}$ を正の定数として,

$$K(x, \Delta x) := k|\Delta x| + K, \quad (x, x + \Delta x) \in \mathbb{R}_+^2 \tag{1.16}$$

と特定化する.

2 準変分不等式

最適値関数を

$$v(x) := \inf_{\delta\in\Delta} v^\delta(x), \quad x \in \mathbb{R}_+ \tag{2.1}$$

と定義する.

また, 任意の関数 $u:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ に対して, 以下の通り, 2 種の**作用素**を (定義できる場合に) 定義する:

$$
\begin{aligned}
[Mu](x) &:= \inf_{\Delta x\in\mathbb{R}|\ x+\Delta x\in\mathbb{R}_+}\{(k|\Delta x|+K)+u(x+\Delta x)\}, \quad x\in\mathbb{R}_+; && (2.2)\\
[Nu](x) &:= \inf_{\tau\in\Xi}\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-\alpha t}c(X^x(t))dt+e^{-\alpha\tau}[Mu](X^x(\tau-))\right], \quad x\in\mathbb{R}_+, && (2.3)
\end{aligned}
$$

ただし, Ξ は $\mathbb{R}_+\cup\{\infty\}$ 値 $(\mathcal{F}(t))$–**停止時刻**のすべてからなる集合である.

(1) 作用素 M は現在干渉を行うとしたときの最適な干渉アクションを定めることに対応している.
(2) 作用素 N は次に干渉を行うべき最適なタイミングをを定めることに対応している.

最適値関数 $v:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ に対しては, 即座に介入を行うことは必ずしも最適ではないので,

(C1)

$$
v(x)\le[Mv](x), \quad \forall x\in\mathbb{R}_+ \tag{2.4}
$$

が成り立つ.

さて, **Bellman, R. の (動的計画法における) 最適性原理**より,

$$
v(x)=[Nv](x), \quad \forall x\in\mathbb{R}_+ \tag{2.5}
$$

が成り立つ. さらに, 最適値関数 $v:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ を $\mathbb{C}^2$ 級の関数と仮定すれば,

$$
\begin{aligned}
v(x) &= [Nv](x)\\
&= \inf_{\tau\in\Xi}\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-\alpha t}c(X^x(t))dt+e^{-\alpha\tau}[Mv](X^x(\tau-))\right]\\
&= \inf_{\tau\in\Xi}\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-\alpha t}c(X^x(t))dt+e^{-\alpha\tau}v(X^x(\tau-))\right]\\
&\le \mathbb{E}\left[\int_0^s e^{-\alpha t}c(X^x(t))dt+e^{-\alpha s}v(X^x(s-))\right]\\
&= v(x)+\mathbb{E}\left[\int_0^s e^{-\alpha t}\{[Lv](X^x(t))+c(X^x(t))\}dt\right.\\
&\qquad \left.+\int_0^s e^{-\alpha s}v'(X^x(t))\sigma(X^x(t))dW(t)\right] && (2.6)\\
&= v(x)+\mathbb{E}\left[\int_0^s e^{-\alpha t}\{[Lv](X^x(t))+c(X^x(t))\}dt\right], \quad \forall x\in\mathbb{R}_+,\ s\in\mathbb{R}_+
\end{aligned}
$$

が成り立つ, ただし, L は次で定義される**微分作用素**であり, 上の第 4 の等式は, **伊藤の補題**から成り立つ: $u:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ を $\mathbb{C}^2$ 級の関数としたとき,

$$
[Lu](x):=\lim_{t\downarrow 0+}\frac{\mathbb{E}\left[e^{-\alpha t}u\left(X^x(t)\right)\right]-u(x)}{t}=\frac{1}{2}\sigma^2x^2u''(x)+\mu xu'(x)-\alpha u(x) \tag{2.7}
$$

と定義する. 上の不等式 (2.6) から, やはり, 最適値関数 $v:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ を $\mathbb{C}^2$ 級の関数と仮定すれば,

(C2)

$$
[Lv](x)+c(x)\ge 0, \quad \forall x\in\mathbb{R}_+ \tag{2.8}
$$

が成り立つ.

定義 2.1 (準変分不等式 (Quasi–Variational Inequality: QVI)) 関数 $u:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ に対する, 以下の 3 条件の組を最適インパルス制御問題に対する**準変分不等式** (Quasi–Variational Inequality: QVI) と言う:

(C1)

$$u(x) \leq [Mu](x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+; \tag{2.9}$$

(C2)

$$[Lu](x) + c(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+; \tag{2.10}$$

(C3) **(相補性条件)** すべての $x \in \mathbb{R}_+$ に対して, 不等式 (2.9) と (2.10) とのいずれか一方は等式で成立する, すなわち,

$$\{u(x) - [Mu](x)\}\{[Lu](x) + c(x)\} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+. \tag{2.11}$$

□

定義 2.2 (QVI–制御) 関数 $u^* : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ を QVI (C1), (C2), (C3) に対する解とする. このとき, 以下で規定される許容なインパルス制御 $\delta^* \in \Delta$ (が存在するとき, それ) を **QVI–制御** と言う:

(B1)

$$\begin{aligned} \tau_i &= \inf\left\{t > \tau_{i-1} : u^*(X^{x,\delta^*}(t-)) = [Mu^*](X^{x,\delta^*}(t-))\right\} \\ &= \inf\left\{t > \tau_{i-1} : [Lu^*](X^{x,\delta^*}(t-)) + c(X^{x,\delta^*}(t-)) > 0\right\}, \quad i \in \mathbb{Z}_{++}; \end{aligned} \tag{2.12}$$

(B2)

$$\Delta X_i = \underset{\Delta x \in \mathbb{R} | \ X^{x,\delta^*}(\tau_i-) + \Delta x \in \mathbb{R}_+}{\arg\min} \left\{k|\Delta x| + K + u^*(X^{x,\delta^*}(\tau_i-) + \Delta x)\right\}, \quad i \in \mathbb{Z}_{++}. \tag{2.13}$$

□

定理 2.1 $\mathbb{C}^2$ 級の関数 $u^* : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ を QVI (C1), (C2), (C3) に対する解とし, 以下の**可積分性・成長条件**を満たすものとする: 任意の初期状態 $x \in \mathbb{R}_+$ と許容なインパルス制御 $\delta \in \Delta$ に対応する状態過程 $(X^{x,\delta}(t); t \in \mathbb{R}_+)$ に対して,

(D1)

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \left|e^{-\alpha t}\sigma X^{x,\delta}(t) u^{*\prime}(X^{x,\delta}(t))\right|^2 dt\right] < \infty; \tag{2.14}$$

(D2)

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[e^{-\alpha t} u^*(X^{x,\delta}(t))\right] = 0. \tag{2.15}$$

このとき,

$$v(x) \geq u^*(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \tag{2.16}$$

が成り立つ. さらに, 関数 u^* によって規定される QVI–制御 δ^* のもとで,

$$v^{\delta^*}(x) = u^*(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \tag{2.17}$$

が成り立つ. したがって, QVI–制御 δ^* は最適なインパルス制御であり, u^* は最適値関数 v に一致する:

$$v^{\delta^*}(x) = u^*(x) = v(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+. \tag{2.18}$$

□

注 2.1

(1) より一般的には解関数 u^* (したがって最適値関数 v) に $\mathbb{C}^2$ 級までを仮定する必要はなく, **(一般化された) 伊藤の公式**が適用でき (したがって微分作用素 L が “ほとんど” 定義でき) るクラスに属すればよい. □

3 スムース・ペースティング法

一般には, QVI (C1), (C2), (C3) を解析的に, あるいは数値的にさえも解くことは困難であるため, 問題の構造を利用することで, (ほぼ) 陽表的な解を求めることのできるクラスを明らかにすることには意味がある. この際に有効な原理・手法が**スムース・ペースティング法** (smooth pasting technique) である.

最適なインパルス制御 $\delta^* \in \Delta$ が, **2 個のパラメータ**

$$(\beta, b) \quad (0 < \beta < b < \infty) \tag{3.1}$$

を用いて, 以下のような制御規則で記述できることが**予想される**問題を想定する:

(E1) 開区間 $[0, b)$ を**非干渉領域**とする, すなわち, 状態が $[0, b)$ 内にある限り, 何の干渉アクションもとらない;
(E2) 半直線 $[b, \infty)$ を**干渉領域**とし, 状態が $[b, \infty)$ 内にあれば即座に状態 β へ移動させる干渉アクションをとる.

上述のタイプのインパルス制御の最適性を予想すれば, 最適値関数 $v : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ は以下の条件を満たすものと**予想される**:

(F1) 開区間 $(0, b)$ において, v は次の 2 階の常微分方程式を満たす:

$$([Lv](x) + c(x) =) \ \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v''(x) + \mu x v'(x) - \alpha v(x) + c(x) = 0, \quad x \in (0, b); \tag{3.2}$$

(F2) **(Value Matching Conditions)**: v の連続性から,

$$v(b) = k|\beta - b| + K + v(\beta) \ \ (= k(b - \beta) + K + v(\beta)); \tag{3.3}$$

(F3) $x = b$ において, $y = \beta$ は最適な移動先である ((F2) の式 (3.3) の右辺は β について最適化されている, すなわち,

$$v(b) = k(b - \beta) + K + v(\beta) = \min_{0<y<b} \{k(b - y) + K + v(y)\}, \tag{3.4}$$

したがって):

$$v'(\beta) = k; \tag{3.5}$$

(F4) **(Smooth Pasting Conditions)**: v' の連続性から,

$$v'(b) = \lim_{x \downarrow b+} v'(x) = \lim_{x \downarrow b+} \frac{d}{dx}\{k(x - \beta) + K + v(\beta)\} = k. \tag{3.6}$$

以下では, さらに,

$$c(x) := x^2, \quad x \in \mathbb{R}_+ \tag{3.7}$$

と特定化する.

仮定 3.1 (A1)

$$\alpha - 2\mu - \sigma^2 > 0. \tag{3.8}$$

□

常微分方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v''(x) + \mu x v'(x) - \alpha v(x) + c(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}_{++} \tag{3.9}$$

の特性方程式は,

$$\gamma(\lambda) := \frac{1}{2}\sigma^2 \lambda^2 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\lambda - \alpha = 0 \tag{3.10}$$

であり, これは仮定 (A1) のもとで, 符号の異なる次の 2 実根を持つ:

$$\lambda_{\pm} := \frac{-\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \pm \sqrt{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 + 2\sigma^2\alpha}}{\sigma^2}. \tag{3.11}$$

$x \downarrow 0+$ としたときに関数値が発散しないことを要求すれば, 常微分方程式 (3.9) の一般解は

$$u(x;a) := -ax^{\lambda_+} + \left(\alpha - 2\mu - \sigma^2\right)^{-1} x^2, \quad x \in \mathbb{R}_{++} \tag{3.12}$$

と表される, ただし a ($\in \mathbb{R}_{++}$) は決定すべき正の定数である.

2 個のパラメータ β, b に加え, 2 階の常微分方程式 (3.2) の解は **1 個の未知定数** a を含むので, 合計 **3 個の定数**を決定する必要があるが, それらは式 (3.3), (3.5), (3.6) の **3 個の条件**により, (典型的には) 決定されるであろう.

仮定 3.2 (A2)

$$\frac{1}{k} > \alpha - 2\mu - \sigma^2. \tag{3.13}$$

□

定理 3.1 仮定 (A1), (A2) のもとで, 以下の 3 条件 (F2), (F3), (F4) を満たす 3 定数 β, b ($0 < \beta < b < \infty$), a ($\in \mathbb{R}_{++}$) が一意的に存在する.

(F2) **(Value Matching Conditions)**:

$$u(b;a) = k|\beta - b| + K + u(\beta;a) \quad (= k(b - \beta) + K + u(\beta;a)); \tag{3.14}$$

(F3)

$$u'(\beta;a) = k; \tag{3.15}$$

(F4) **(Smooth Pasting Conditions)**:

$$u'(b;a) = k. \tag{3.16}$$

□

以下では (A1), (A2) を仮定する. 定理 3.1 から, 一意的な存在が保証される 3 定数 β, b ($0 < \beta < b < \infty$), a ($\in \mathbb{R}_{++}$) を用いて, 最適値関数を次のように**予想する**:

$$u^*(x) := \begin{cases} u(x;a) = -ax^{\lambda_+} + \left(\alpha - 2\mu - \sigma^2\right)^{-1} x^2, & x \in [0, b); \\ k(x - \beta) + K + u(\beta; a), & x \in [b, \infty). \end{cases} \tag{3.17}$$

仮定 3.3 (A3)

$$\begin{aligned} &(\alpha - 2\mu - \sigma^2)\left(\frac{\lambda_+ - 1}{\lambda_+ - 2}\right) k \\ > \quad &(\alpha - \mu) k + \left[(\alpha - \mu)^2 k^2 + 4\alpha\left\{\frac{\alpha - 2\mu - \sigma^2}{2}\left(-\frac{(\lambda_+ - 1)^2}{2\lambda_+(\lambda_+ - 2)}\right) k^2 + K\right\}\right]^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

□

定理 3.2 仮定 (A1), (A2), (A3) のもとで, (3.17) で定義される関数 $u^* : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ は, 以下の QVI (C1), (C2), (C3) を満たす.

(C1)

$$u^*(x) \le [Mu^*](x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+; \tag{3.19}$$

(C2)

$$[Lu^*](x) + c(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+; \tag{3.20}$$

(C3) **(相補性条件)**

$$[Lu^*](x) + c(x) = 0, \qquad \forall x \in [0, b); \tag{3.21}$$

$$u^*(x) = [Mu^*](x), \qquad \forall x \in [b, \infty). \tag{3.22}$$

したがって, 関数 u^* によって規定される以下の QVI–制御 δ^* は最適なインパルス制御であり, u^* は最適値関数 v に一致する:

(B1)

$$\begin{aligned} \tau_i &= \inf\left\{t > \tau_{i-1} : u^*(X^{x,\delta^*}(t-)) = [Mu^*](X^{x,\delta^*}(t-))\right\} \\ &= \inf\left\{t > \tau_{i-1} : X^{x,\delta^*}(t-) \in [b, \infty)\right\}, \quad i \in \mathbb{Z}_{++}; \end{aligned} \tag{3.23}$$

(B2)

$$\begin{aligned} \Delta X_i &= \mathop{\arg\min}_{\Delta x \in \mathbb{R} |\ X^{x,\delta^*}(\tau_i -) + \Delta x \in \mathbb{R}_+} \left\{k|\Delta x| + K + u^*(X^{x,\delta^*}(\tau_i -) + \Delta x)\right\}, \\ &= \beta - X^{x,\delta^*}(\tau_i -), \quad i \in \mathbb{Z}_{++}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

□

参考文献

[1] Bensoussan, J. L. and J. L. Lions, *Impulse Control and Quasi–Variational Inequalities*, Gauthier–Villars, Paris, 1984.

[2] Brekke, K. A. and B. Øksendal, "The High Cntact Principle as a Sufficiency Condition for Optimal Stopping", in *Stochastic Models and Option Values* (Lund, D. and B. Øksendal Eds.), North–Holland, pp.187–208, 1991.

[3] Brekke, K. A. and B. Øksendal, "A Verification Theorem for Combined Stochastic Control and Impulse Control", in *Stochastic Analysis and Related Topics* (Decreasefond, L. et al. Eds.), Vol. 6. Bikhäuser, Basel, pp. 211–220, 1988.

[4] Buckley, I. R. C. and Korn, R., "Optimal Index Tracking under Transaction Costs and Impulse Control", *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **1** (1998), pp. 315–330.

[5] Cadenillas, A., "Consumption–Investment Problem with Transaction Costs: Survey and Open Problems", *Mathematical Methods of Operations Research*, **51** (2000), pp. 43–68.

[6] Cadenillas, A. and F. Zapatero, "Optimal Central Bank implementation in the Foreign Exchange Market", *Journal of Economic Theory*, **87** (1999), pp. 218–242.

[7] Cadenillas, A. and F. Zapatero, "Classical and Impulse Stochastic Control of the Exchange Rate Using Interest Rates and Reserves", *Mathematical Finance*, **10** (2000), pp. 141–156.

[8] Constantinides, G. M. and S. F. Richard, "Existence of Optimal Simple Policies for Discounted–Cost Inventory and Cash Management in Continuous Time", *Operations Research*, **26** (1978), pp. 620–636.

[9] Dixit, A., "A Simplified Treatment of the Theory of Optimal Regulation of Brownian Motion", *Journal of Economic Dynamics and Control*, **15** (1991), pp. 588–605.

[10] Dixit, A., *The Art of Smooth Pasting*, Harwood Academic Publishers, Switzerland, 1993.

[11] Dixit, A. and R. Pindyck, *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, New Jersey, 1994.

[12] Eastham, J. F. and K. J. Hastings, "Optimal Impulse Control of Portfolios", *Mathematics of Operations Research*, **13** (1988), pp. 657–673.

[13] Harrison, J. M., *Brownian Motion and Stochastic Flow Systems*, John Wiley & Sons, New York, 1985.

[14] Harrison, J. M., T. M. Sellke, and A. J. Taylor, "Impulse Control of Brownian Motion", *Mathematics of Operations Research*, **8** (1983), pp. 454–466.

[15] Jeanblanc–Picqué, M., "Impulse Control Mehotd and Exchange Rate", *Methematical Finance*, **3** (1993), pp. 161–177.

[16] Karatzas, I. and S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer–Verlag, 1988.

[17] Korn, R., "Optimal Impulse Control Actions Have Random Consequences", *Mathematics of Operations Research*, **22** (1997), pp. 639–667.

[18] Korn, R., *Optimal Portfolios: Stochastic Models for Optimal Investment and Risk Management in Continuous Time*, World Scientific, Singapore, 1997.

[19] Korn, R., "Some Applications of Impulse Control in Mathematical Finance", *Mathematical Methods of Operations Research*, **50** (1999), pp. 493–518.

[20] Mizuta, H., "Constraints, Necessary Assumptions and Optimality Conditions in the Art of Smooth Pasting: a Note on Impulse Control of Brownian Motion", *Social Sciences*, Kushiro Public University of Economics, **12** (2000), pp. 115–133 (in Japanease).

[21] Ohnishi, M., "An Optimal Stopping Problem for a Geometric Brownian Motion with Poissonian Jumps" (submitted).

[22] Øksendal, B., "Stochastic Control Problems where Small Intervention Costs Have Big Effects", *Applied Mathematics and Optimization*, **40** (1999), pp. 355–375.

[23] Tsujimura, M., "Price Analysis of Tradable Emission Permits of CO2 by a Real Option Model", *Osaka Econimic Papers*, Faculty of Economics, Osaka University, **50** (2000), pp. 50–65.

[24] Tsujimura, M. "Optimal Implementation of Environment Improvement Policy with Implementation Costs" (submitted).