数理解析研究所講究録
1194巻 2001年 200-203

ベクトル値最短経路問題

長岡工業高等専門学校（Nagaoka Technical College）
涌田和芳(WAKUTA Kazuyoshi)

1．はじめに

Sniedovich[3]は，多目的最短経路問題を有限段階の多目的決定過程で定式化し，ＤＰアルゴリズムにより解いた．一方，最短経路問題は，無限段階の決定過程すなわち吸収状態を持つマルコフ決定過程と見ることが出来る．Sancho[2] とBertsekasとTsitsiklis[1] は，確率的最短経路問題を解くために，マルコフ決定過程モデルを考え，それを政策改良法で解いた．本報告では，多目的最短経路問題をマルコフ決定過程として定式化し，政策改良法で解く．最初に，多目的最短経路問題と一目的最短経路問題の相違について議論する．次に，locally efficient policyを導入し，すべての点から目的地へのefficientなすべてのパスを求めるアルゴリズムを与える．

2．多目的最短経路問題

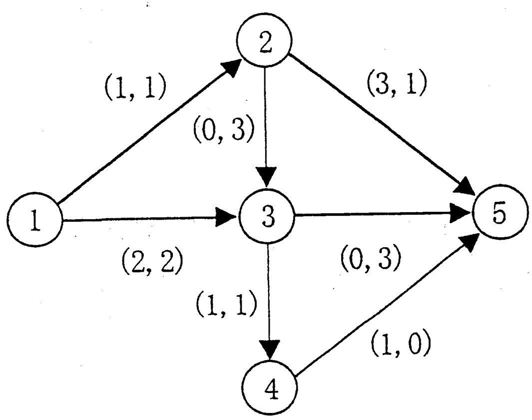
$\overline{R}=R\cup\{\infty\}$とおく．$a=(a_1,\dots,a_m)$，$b=(b_1,\dots,b_m)\in\overline{R}^m$に対して，$a\geqq b \Leftrightarrow a_k\geqq b_k$, $k=1,\dots,m$；$a\geq b \Leftrightarrow a\geqq b, a\neq b$；$a>b\Leftrightarrow a_k>b_k, k=1,\dots,m$. $U\subset\overline{R}^m$に対して，$e(U)=\{x\in U|\ \ x\in R^m$かつある$y\in U$に対して$y\leqq x$ならば$y=x\}$ とおく．

点$\{1,2,\dots,N\}$をもつ有向ネットワークを考え，Nは目的地とする．各枝(i,j)の距離を$c(i,j)\in R^m$とする．すべての点から目的地へのパスが少なくとも1つ存在するとし，サイクル$i\to j_1\to\cdots\to j_k\to i$に対して，$c(i,j_1)+\cdots+c(j_k,i)\geq 0$と仮定する．この多目的最短経路問題（ＭＯＳＰＰ）に対して，次のような多目的マルコフ決定過程（ＭＯＭＤＰ）を考える．
$S=\{1,2,\dots,N\}$ ：状態空間，$A(i)=\{j\in S|\ j$ は i の直後の点$\}$ ：行動空間，$T(i,a)=j$, $a\in A(i)$, $a=j$ ：推移法則，$c(i,a)$ ：コスト関数，Nは目標状態で，$A(N)=N$, $c(N,N)=0$とする．政策は，確定的定常政策である．この全体をGとし，$f\in G$を用いたときの合計コストを$I_f(i)=(I_f^1(i),\cdots,I_f^m(i))$, $i\in S$，で表す．$I_f(i_1)\in e(V(i_1))$，$i_1\in S$，ただし $V(i_1)=\bigcup_{f\in G}\{I_f(i_1)\}$であるとき，$f$はefficientであるという．$f\in G$の下で，すべての $i\in S$からNが到達可能であるとき，fはproperであるという．fがproperであることは，$I_f^k(i), i\in S,$が有限であることと同値である．

3．反例

多目的最短経路問題と一目的最短経路問題との間にはいくつかの相違がある．まず最初に，MOMDP に対する efficient な政策は，すべての点から N への efficient なパスを与えるが，逆は正しくないことを示す．

反例 3.1.
次のMOSPPで，パス $2\to3\to4\to5$ は，efficient であるが，これを一部分とする efficient な政策は存在しない．



$B^m(S)$ を S から R^m へのすべての関数の集合とし，$u \in B^m(S)$ に対して

$T_a u(i) = c(i,a) + u(T(i,a)),\ i \in S,\ a \in A(i)$,

$T_f u(i) = T_{f(i)} u(i)$,

$I_f^a(i) = T_a I_f(i)$.

とおく． $u, v \in B^m(S)$ に対して， $u \geqq v \Leftrightarrow u(i) \geqq v(i),\ i=1,\dots,m$； $u \geq v \Leftrightarrow u \geqq v, u \neq v$ ；$u > v \Leftrightarrow u(i) > v(i)_k, i=1,\dots,m$ とする．

補題 3.1. $f \in G$ は proper とする．このとき

(i) $I_f^g \leq I_f$ ならば，g は proper で，$I_g \leq I_f$.

(ii) $I_f^g = I_f$ ならば，g は proper で，$I_g = I_f$.

(iii) $I_f^g \geq I_f$ で g が proper ならば，$I_g \geq I_f$.

反例 3.2. 反例 3.1と同じMOSPPを考える．政策α_1を$\alpha_1(1)=1, \alpha_1(2)=1, \alpha_1(3)=1$とする．このとき，

$$I_{\alpha_1}(1)=(3,5),\ I_{\alpha_1}(2)=(2,4),\ I_{\alpha_1}(3)=(2,1)$$
$$I_{\alpha_1}^2(1)=(4,3),\ I_{\alpha_1}^2(2)=(3,1),\ I_{\alpha_1}^2(3)=(0,3).$$

$I_{\alpha_1}^a(i) \le I_{\alpha_1}(i)$なる$(i,a), i \in S, a \in A(i)$は存在しない，すなわち，$I_{\alpha_1}^g \le I_{\alpha_1}$なる政策$g$は存在しない．しかし，$I_{\alpha_1}(1) \notin e(V(1))$なので$\alpha_1$はefficientではない．

4. Locally efficient policies

$I_f^g \le I_f$なるgが存在しないとき，fはlocally efficientであるという．

命題 4.1. iからNへの任意のefficientなパスは，あるlocally efficientな政策の一部分である．

［証明］ 与えられたefficientなパスを含む政策を選ぶ．その政策を可能な限り改良する．その結果，locally efficientな政策を得る．与えられたefficientなパスは，変更されないことに注意する．

命題 4.2. fがlocally efficientであるということは，$I_g \le I_f$であるようなgが存在しないことと同値である．

［証明］ fがlocally efficientでないならば，補題4.1より，$I_g \le I_f$なる政策gが存在する．逆に，$I_g \le I_f$なる政策gが存在するとき，$I_f^{f_1} \le I_f$なる政策f_1が存在する．したがって，fはlocally efficientではない．

アルゴリズム

n段階までに得られたlocally efficientな政策の集合をE_n，それ以外の政策の集合をF_nで表す．また，すべてのlocally efficientな政策の集合をE_Lで表す．

Phase I

1. 任意の政策f_1を選ぶ．

2. $I_{f_n}(i), i \in S$, を計算する．

2.1 f_nがproperでないならば，

$$E_n=E_{n-1},\ F_n=F_{n-1} \cup \{f_n\}.$$

政策$f_{n+1}\in(G\setminus(E_n\cup F_n))$ を選んでStep 2へ行く.

2.2. f_nがproperならば$a\neq f_n(i)$を選んで, gを$g(i)=a$かつ$g(j)=f_n(j)$, $j\neq i$なる政策とする. これをすべての $i\neq N$ と$a\in A(i)$に対して行う. もしf_nによってdominate される$\{g_1,\cdots,g_k\}$ が見つかれば

$$F_n=F_{n-1}\cup\{g_1,\cdots,g_k\}$$

とおく.

2.2.1. もし$I^a_{f_n}(i)\leq I_{f_n}(i)$なる$(i,a)$がなければ, f_nはlocally efficientである.

$$E_n=E_{n-1}\cup\{f_n\}$$

とおく. 政策$f_{n+1}\in(G\setminus(E_n\cup F_n))$を選んでStep 2へ戻る.

2.2.2. もし$I^a_{f_n}(i)\leq I_{f_n}(i)$なる$(i,a)$があれば, f_{n+1} を$f_{n+1}(i)=a$かつ$f_{n+1}(j)=f_n(j)$, $j\neq i$, としてStep 2 へ戻る.

3. $E_n\cup F_n=G$となったら止める. このとき, E_Lを得る. Phase II へ行く.

Phase II

1. $f\in E_L$ を選ぶ.

$$d^g_f(i)=I_g(i)-I_f(i)\leq 0,\quad i\in(S\setminus N)$$

なる $g\in E_L$が存在するかどうかチェックする. もし, そのような政策がなければ, $I_f(i)$は efficientである. さもなければ, $I_f(i)$は efficientではない.

[1] Bertsekas & Tsitsiklis (1991) An analysis of stochastic shortest path problems. Math. Oper. Res. 16:580-595.

[2] Sancho (1985) Routing problems and Markov decision processes. J. Math. Anal. Appl. 105:76-83.

[3] Sniedovich (1988) A multi-objective routing problem revisited. Eng. Opt. 13:99-108.