数理解析研究所講究録
1194巻 2001年 9-17

全部分ネットワークに対する総合信頼度の効率的算出方法

流通科学大学　小出　武　(Takeshi KOIDE)
鹿児島大学理学部　新森 修一　(Shuichi SHINMORI)
大阪大学工学部　石井 博昭　(Hiroaki ISHII)

1 はじめに

ネットワーク型システム（以下単にネットワークとする）の信頼度を問題とする場合，グラフ中の点や枝に動作確率を付与した確率グラフをネットワークのモデルとして用いることが多い．ネットワークの信頼性を測る尺度の一つである総合信頼度とは，確率グラフ中の全ての点が正常に機能している枝によって連結されている確率である．総合信頼度の算出は一般に#P-完全である．

ネットワーク設計問題とは，設置可能な枝の中から採用する枝を決定して，構築するネットワークの形状を決定する問題である．この問題では通常，構築コストやネットワーク性能などを目的関数や制約条件にする．換言すれば，設置可能な全ての枝から構成されるネットワークが有する部分ネットワークの中から，制約条件を満足して目的関数を最適とするものを探索する問題がネットワーク設計問題であるといえる．総合信頼度を考慮したネットワーク設計問題はこれまでに数多く研究されているが，総合信頼度の算出の困難性のため，厳密解ではなく近似解を導出する手法がほとんどである [1, 2]．厳密解を提案するアルゴリズムも提案されているが，大きなサイズのネットワークを対象とすることは計算時間の上で実質的に不可能である [4, 5]．

本論文では，あるネットワークが有する全ての部分ネットワークに対して，その総合信頼度を計算する手法を提案する．本手法では，他の部分ネットワークの信頼度を計算するときに得た情報を利用することにより，全体として処理時間を短縮する工夫をしている．ネットワーク設計問題において，本手法は探索空間上の解を列挙する完全列挙アルゴリズムに相当する．本手法は様々な厳密解法の礎になるだけでなく，ネットワーク設計問題を多目的化した問題に対するアルゴリズムにも拡張可能である．

2 ネットワークモデルと総合信頼度

要素数 n の点集合 V，要素数 m の枝集合 $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ からなる無向ネットワークを $G = (V, E)$ とする．枝の状態は正常，または故障のいずれかであるとし，枝 $e \in E$ が正常である確率を $p(e)$ とする．一方，点は常に正常であると仮定する．正常な枝によってネットワーク G 中の全ての点が連結されているとき，ネットワーク G は正常であると定義する．ネットワークも正常と故障の2つの状態しかとらない．ネットワーク G が正常である確率を総合信頼度といい，$Rel(G)$

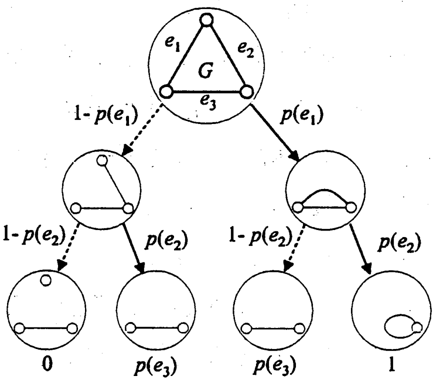
で表す [3].

枝の削除とは対象の枝をネットワークから除去すること，枝の縮約とは枝の両端となる 2 点を 1 つの点にまとめた後に枝を除去することをいう．ネットワーク G 内の枝 e を削除，縮約して得られるネットワークをそれぞれ $G-e$，G/e と表す．$Rel(G)$ を求めるために以下の定理がよく用いられる [3].

定理 1 $G=(V,E)$，$e \in E$ に対し，以下の式が成立する．

$$Rel(G) = (1-p(e))Rel(G-e) + p(e)Rel(G/e) \tag{1}$$

あるネットワーク $G=(V,E)$ が有する枝 $e \in E$ に対して，式 (1) を用いて展開することを **factoring** という．$Rel(G-e)$ や $Rel(G/e)$ が簡単に計算可能になるまで factoring を再帰的に適用することにより $Rel(G)$ を計算する方法を **factoring** 法と呼ぶ．本研究では特に断らない限り，factoring は枝番号の順に適用し，ネットワークの枝数が 1 本以下になるまで factoring を適用することにする．図 1 に factoring 法による総合信頼度計算の例を示した．



$$\begin{aligned} Rel(G) & \\ &= \{1-p(e_1)\}[\{1-p(e_2)\}\cdot 0 + p(e_2)p(e_3)] \\ &\quad + p(e_1)[p(e_1)\{1-p(e_2)\} + p(e_2)\cdot 1] \\ &= p(e_1)p(e_2) + p(e_2)p(e_3) + p(e_3)p(e_1) \\ &\quad -2p(e_1)p(e_2)p(e_3) \end{aligned}$$

図 1: factoring 法による総合信頼度計算の例

3 全部分ネットワークに対する信頼度計算

3.1 部分ネットワークの表現形

ネットワーク $G=(V,E), E' \subseteq E = \{e_1,\ldots,m\}$ に対し，$G'=(V,E')$ を G の部分ネットワークと呼ぶ．枝 $e_i \in E$ に対し、$e_i \in E'$ のとき 1，そうでないとき 0 をとる 0-1 変数を x_i で表すと，表現形 $\boldsymbol{x} = [x_1 \cdots x_m]$ によって全ての部分ネットワークを一意に表現できる．

本研究の目的は，与えられたネットワーク G が有する全ての部分ネットワークの総合信頼度を計算することである．本研究では特に断らない限り，全ての部分ネットワークに対し総合信頼度を計算する順序は，表現形 $\boldsymbol{x}$ に関する辞書順とする．以下に $\boldsymbol{x}$ 表現形に関する定義と補題を示す．

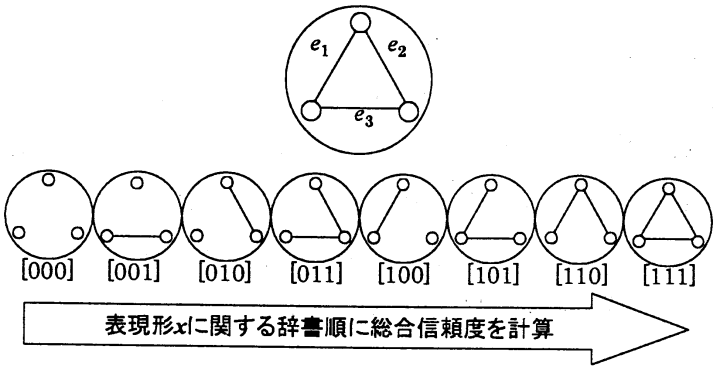


図 2: 図 1 で扱ったネットワークの全部分ネットワークとそれらの表現形

定義 2 $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{y}$ の部分ネットワークであるとき，$\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{x}$ の母ネットワークと呼ぶ.

補題 3 ネットワーク G の部分ネットワーク $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ において，$\boldsymbol{y}$ が $\boldsymbol{x}$ の母ネットワークであるとする．このとき $\boldsymbol{y}$ より $\boldsymbol{x}$ が先に総合信頼度計算の対象となる.

証明： $\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_m]$, $\boldsymbol{y} = [y_1, \ldots, y_m]$ とすると，$\boldsymbol{y}$ が $\boldsymbol{x}$ の母ネットワークであることから,

$$x_i \leq y_i \qquad i = 1, \ldots, m \tag{2}$$

が成立する．よって $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ を辞書順に並べると $\boldsymbol{x}$ の方が前になる. □

3.2 factoring 法で構成するネットワークの表現形

ネットワーク G の各部分ネットワークの総合信頼度を factoring 法によって計算する場合，図 1 で示したように各々の部分ネットワークに対する枝の削除や縮約によって，様々なネットワークが構築される．これらのネットワークの表現形に関する補題を以下に示す.

補題 4 $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$ に対し，x_i 以外は全て等しく，x_i の値が 0, 1 であるネットワークをそれぞれ $\boldsymbol{x_0}$, $\boldsymbol{x_1}$ とすると，次式が成立する.

$$\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{x_1} - e_i \tag{3}$$

証明： 枝の削除や縮約によって構築されるネットワークは，削除や縮約をする枝の順序に関係なく一意に定まるので明らか. □

補題4は，ある枝がある部分ネットワークに初めから含まれていないことと，初めは含まれていたが削除されたことは，ネットワークの形状を表現する上では同意であることを表している．よってネットワークの表現の対象を部分ネットワークから factoring 法によって構成されるネットワークにまで広げたとき，枝の状態は以下の3つに類別できることが分かる．

a. 初めからネットワークに含まれない，または削除された

b. ネットワークに含まれ，削除も縮約もされていない

c. 縮約された

すなわち，枝 e_i が上記3つの状態をとることを $x_i = 0,\ 1,\ 2$ で表現すれば，ネットワーク表現の対象を factoring 法により構成されるネットワークにまで広げても，表現形 $\boldsymbol{x}$ で一意に表現できることがわかる．図2に示した [001] から [111] の各部分ネットワークに対して factoring 法で総合信頼度を計算する様子を図3に示した．

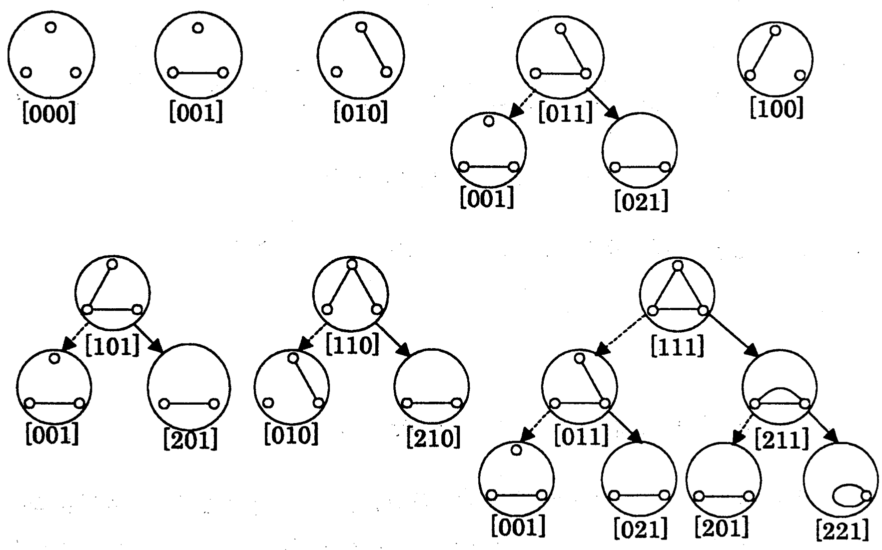


図 3: 図1で示したネットワークの全部分ネットワークに対する factoring 法の適用

3.3 構築するネットワークの数を減少させる工夫

図3において，部分ネットワーク [111] の総合信頼度を計算する過程でネットワーク [011] が構成される．各部分ネットワークの総合信頼度は表現形 $\boldsymbol{x}$ における辞書順で計算するので，部分ネットワーク [011] の信頼度は既知である．よってネットワーク [011] の信頼度を参照できるのであれば，信頼度計算のために新たな2つのネットワーク [001] と [021] を構築する必要がない．すなわち，信頼度計算の結果を記憶して後に参照できるのであれば，信頼度の計算過程で構築するネットワークの個数を減らすことができることが分かる．このように計算した信頼度を記憶して参照

するという工夫を施した factoring 法を以後 **factmem** 法と呼ぶことにする．factmem 法によって全部分ネットワークの総合信頼度を計算するときも，表現形 $\boldsymbol{x}$ に関して辞書順に行うとする．

図 3 の場合，部分ネットワーク [011] のみ後にその信頼度が参照される．factmem 法では計算した全ての総合信頼度が参照されるわけではない．後に必要となる信頼度のみを記憶することにより記憶領域を減少させ，実行時間を短縮できる．記憶すべき信頼度の判断基準となる補題と定理を以下に示す．

補題 5 部分ネットワーク $\boldsymbol{x}$ を信頼度計算の対象とするとき，$\boldsymbol{x}$ の信頼度は未知である．

証明： $\boldsymbol{x}$ の信頼度が既知であると仮定する．$\boldsymbol{x}$ の信頼度を算出したときの部分ネットワークを $\boldsymbol{y}$ とすると，$\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{x}$ の母ネットワークになる．よって補題 3 より，信頼度計算は $\boldsymbol{y}$ が $\boldsymbol{x}$ より後で対象となることになり，表現形 $\boldsymbol{x}$ について辞書順に対象にする仮定に矛盾する． □

定理 6 factmem 法によって構築された枝を 3 本以上持つネットワーク $\boldsymbol{x}$ において，$x_i = 1$ なる枝 e_i に対し $\boldsymbol{x} - e_i$, $\boldsymbol{x}/e_i$ を構築するとき，$\boldsymbol{x} - e_i$ の信頼度は既知，$\boldsymbol{x}/e_i$ の信頼度は未知である．

証明： ネットワーク $\boldsymbol{x}$ を構築する元となった部分ネットワークを $\boldsymbol{x_0}$ とする．補題 5 より，部分ネットワーク $\boldsymbol{x_0}$ の信頼度は未知である．以下 $\boldsymbol{x_0}$ における $x_i = 1$ となる変数の数，すなわち部分ネットワーク $\boldsymbol{x_0}$ に存在する枝の本数 l について帰納的に証明する．$\boldsymbol{x_0}$ において $x_i = 1$ なる番号 i をそれぞれ $i(1), \ldots, i(l)$ $(i(1) < \cdots < i(l))$ とする．

(1) $l = 3$ の場合

枝 $e_{i(1)}$ に関して factoring を適用する．$\boldsymbol{x_0}$ から枝 $e_{i(1)}$ を削除することは，$x_{i(1)}$ の値を 1 から 0 にすることに等しい．すなわち $\boldsymbol{x_0} - e_{i(1)}$ は，$x_i = 1$ なる番号が $i(2), i(3)$ の 2 つである部分ネットワークと同形である．このネットワークは $\boldsymbol{x_0}$ の部分ネットワークなので，補題 3 よりその信頼度は既知であることが分かる．よって $\boldsymbol{x_0} - e_{i(1)}$ の信頼度は既知である．一方 $\boldsymbol{x_0}/e_{i(1)}$ については，補題 5 での証明と同様にその信頼度が未知であることが示される．

(2) $l > 3$ の場合

枝 $e_{i(1)}$ に関する factoring を適用すると，(1) と同様 $\boldsymbol{x_0} - e_{i(1)}$ の信頼度は既知，$\boldsymbol{x_0}/e_{i(1)}$ の信頼度は未知であることが示される．

次に $\boldsymbol{x_0}/e_{i(1)}$ において枝 $e_{i(2)}$ について factoring を適用する．$x_i = 1$ なる番号が $i(1), i(3), \ldots, i(l)$ の $l-1$ 個である G の部分ネットワークを $\boldsymbol{y}$ とすると，$\boldsymbol{x_0}/e_{i(1)} - e_{i(2)}$ は $\boldsymbol{y}/e_{i(1)}$ と同形である．$\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{x_0}$ の部分ネットワークであるので，補題 3 より，$\boldsymbol{y}/e_{i(1)}$ の

信頼度は既知である．よって $\boldsymbol{x}_0/e_{i(1)}-e_{i(2)}$ の信頼度は既知である．一方，$\boldsymbol{x}_0/e_{i(1)}/e_{i(2)}$ については，これまでと同様未知であることがいえる．次は枝 $e_{i(3)}$ について factoring を適用する．この手順をネットワークの枝数が 3 本になるまで繰り返しても一般性を失わない．

(1)(2) より，factmem 法によって構築されたネットワーク $\boldsymbol{x}$ が 3 本以上の枝を持つとき，factmem 法における削除によって構築されたネットワークの信頼度は既知，縮約によって構築されたネットワークの信頼度は未知であることがいえる． □

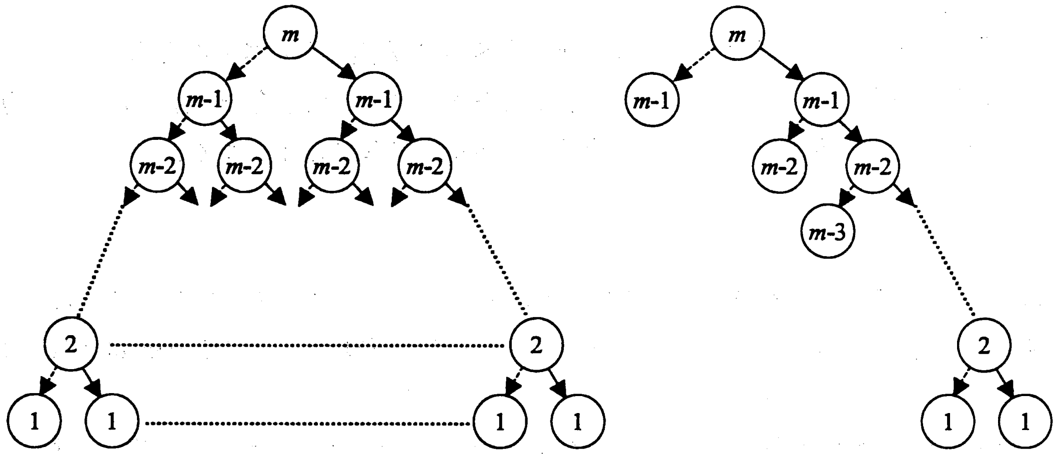


図 4: 2 つの方法が構築するネットワークの様子

図 4 の左に factoring 法，右に factmem 法がネットワークを構築する様子を例示した．図中の丸の中の数値は，ネットワークが有する枝数を示している．定理 6 から，factoring 法と factmem 法によって，全部分ネットワークの計算の際に構築するネットワークの総数を算出することができる．

定理 7 factoring 法，および factmem 法で全部分ネットワークの総合信頼度を計算するとき，構築するネットワークの総数はそれぞれ 3^m-2^m+1，$(m-1)2^m+2$ である．

証明： factoring 法と factmem 法によって，枝数 m の部分ネットワークの総合信頼度を計算するときに構築されるネットワークの総数を $N_1(k)$，$N_2(k)$ とすると $k>0$ のとき，

$$N_1(k)=2^k-1, \qquad N_2(k)=2k-1 \tag{4}$$

となる（図 4 参照）．また $N_1(0)=N_2(0)=1$ である．従って 2 つの方法によって構築されるネットワークの総数を N_1，N_2 とすると，

$$N_1 = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}N_1(k)=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(2^k-1)+1=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}2^k-\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}+1$$

$$
\begin{aligned}
&= 3^m - 2^m + 1 && (5)\\
N_2 &= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}N_2(k) = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(2k-1)+2 = 2\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}k - \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}+2\\
&= 2(m2^{m-1}) - 2^m + 2\\
&= (m-1)2^m + 2 && (6)
\end{aligned}
$$

□

定理 7 で示した総数を具体的に表 3.3 に示した．factmem 法で構築するネットワーク数も元々のネットワークの枝数 m に対して指数個数になるが，factoring 法と比較すると構築するネットワークの個数を大幅に減少していることがわかる．

表 1: 2 つのアルゴリズムが構築するネットワーク数

m	factoring 法 (A)	factmem 法 (B)	B/A
3	20	18	0.900
4	66	50	0.758
6	666	322	0.483
8	6,306	1,794	0.284
10	58,026	9,218	0.159
15	14,316,140	458,754	0.032
20	3,485,735,826	19,922,946	0.006

一方図 3 を見ても分かるように，計算した総合信頼度の全てを後に参照するわけではない．後にその信頼度が参照されるか否かを判断する上で以下の定理は有効である．

定理 8 信頼度計算を完了した枝数 2 以上のネットワークを $\boldsymbol{x} = [x_1 \cdots x_m]$ とすると，後に $\boldsymbol{x}$ の信頼度を参照する回数は，以下の条件を満足する $x_i = 0$ なる変数の個数に等しい．

(1) $k = 1, \ldots, i-1$ に対し　$x_k \neq 1$

(2) $k = i+1, \ldots, m$ に対し　$x_k \neq 2$

証明： 定理 6 で示した通り；後に参照される信頼度は，枝の削除により構築されたネットワークと同形のネットワークの信頼度である．従って後に参照されるネットワークには $x_i = 0$ なる変数が含まれている必要がある．

ネットワーク $\boldsymbol{x}$ における $x_i = 0$ が 2 条件を満足すると仮定すると，$x_1, \ldots, x_{i-1}$ は 0 または 2 である．ここで $k = 1, \ldots, i-1$ において $x_k = 2$ である全ての変数 x_k と x_i の値を 1 に変更して得られるネットワークを $\boldsymbol{y}$ とする．$\boldsymbol{y}$ には 0 と 1 しか存在しないので，$\boldsymbol{y}$ は G の部分ネットワークである．またネットワーク $\boldsymbol{x}$ を構築した部分ネットワーク $\boldsymbol{x_0}$ の母ネットワークでもあるので，補題 3 より，$\boldsymbol{y}$ の信頼度は未知である．部分ネットワーク $\boldsymbol{y}$ の信頼度計算において，$k = 1, \ldots, i-1$ において $x_k = 1$ である枝 e_k を縮約し，枝 e_i を除去したときに構成されるネットワークは $\boldsymbol{x}$ と同形なので，$\boldsymbol{x}$ の信頼度は $\boldsymbol{y}$ の信頼度の計算過程において参照される．

逆に $x_i = 0$ が条件を満足しない場合を考える．$\boldsymbol{x}$ において $k = 1, \ldots, i-1$ の中に $x_k = 1$ となる変数が存在したとする．枝の縮約や削除は枝番号の順に行うので，$x_k = 1$ のまま枝 e_i が削除される（x_i の値が 1 から 0 に変化する）ことはありえない．よって任意のネットワークにおいて枝 e_i を削除して $\boldsymbol{x}$ と同形になることはない．一方 $\boldsymbol{x}$ において $k = i+1, \ldots, m$ の中に $x_k = 2$ となる変数が存在したとすると，枝 e_i を削除する前に枝 e_k を縮約しなければならないので，このときも任意のネットワークにおいて枝 e_i の削除によって $\boldsymbol{x}$ と同形になることはない．

このことから枝 e_i の削除によってあるネットワークが $\boldsymbol{x}$ と同形になるのは，上記 2 条件を満足するときのみであることがいえる．従って $\boldsymbol{x}$ より後で構築される $\boldsymbol{x}$ と同形のネットワークは，上記 2 条件を満足する $x_i = 0$ なる変数の個数と同数存在する． □

factmem 法では計算済み信頼度を記憶するための領域を確保する必要がある．記憶するネットワークの個数について以下の定理が成り立つ．

定理 9 factmem 法で総合信頼度を記憶するネットワークの個数は高々$(m-3)2^{m-2}$ 個である．

証明： 定理 8 の 2 条件を満足する $x_i = 0$ なる変数を持つ，枝数 2 以上のネットワークの個数 N_m を数え上げる．

(1) $m = 3$ のとき

枝数が 2 本以上必要で，$x_i = 0$ なる変数が必要なので，[011] の 1 つしか存在しない．$N_3 = 1$ である．

(2) $m = 4$ のとき

$i = 2, 3, 4$ なる $x_i = 0$ が 2 条件を満足するならば，x_1 を無視したネットワークも 2 条件を満足する．(1) より $m = 3$ のときは [011] しか存在しないので，$i = 2, 3, 4$ なる $x_i = 0$ が 2 条件を満足するのは，[011] の左端に 0 か 2 を追加した [0011] と [2011] のみである．残るは $x_1 = 0$ のみが 2 条件を満足するネットワークになるので，$x_1 = 0,\ x_2 = 1$ が確定する．x_3, x_4 は 0 か 1 であるが，$x_3 = x_4 = 0$ は枝数制約を満たさない．従って [0110]，[0101]，[0111] が挙げられ，$N_4 = 5$ となる．

(3) $m > 4$ のとき

(2) と同様に解析を行うと,

$$N_m = 2N_{m-1} + 2^{m-2} - 1 \tag{7}$$

となる. 漸化式 (7) と初期条件 $N_3 = 1$ を解くと次式が導出される.

$$N_m = (m-3)2^{m-2} + 1 \tag{8}$$

□

定理 8 により, 記憶した信頼度が参照される回数がわかっているので, 必要回数だけ参照された後には記憶した信頼度を記憶領域から開放することが可能である. よって不要となったネットワークの情報を開放することにより, 記憶領域上に保持するネットワークの最大個数は定理 9 で示した個数よりも少なくなる.

4 まとめ

本研究では全部分ネットワークの総合信頼度を求めるための計算時間を短縮する手法である factmem 法を提案した. 通常の factoring を用いる手法に比べて構築するネットワークの数を大幅に減少させることができる. ネットワーク設計問題における構築コストは枝数に対して多項式時間で計算可能であるので, 総合信頼度と構築コストに関する 2 目的ネットワーク設計問題のパレート最適解を探索するアルゴリズムに本手法を応用させることが可能である.

参考文献

[1] K. K. Aggarwal, Y. C. Chopra and J. S. Bajwa, Topological layout of links for optimizing the overall reliability in a computer communication system, *Microelectonics & Reliability* **22** (1982) 347-351.

[2] S. -T. Cheng, Topological optimization of a reliable communication network, *IEEE Trans. Reliability* **47** (1988) 225-232.

[3] C. J. Colbourn, Combinatorics of Network Reliability, Oxford University Press, New York, 1987.

[4] R. -H. Jan, F. -J. Hwang and S. -T. Chen, Topological optimization of a communication network subject to a reliability constraint, *IEEE Trans. Reliability* **42** (1993) 63-70.

[5] T. Koide, S. Shinmori and H. Ishii, Topological optimization with a network reliability constraint, (in press).