数理解析研究所講究録
1195巻 2001年 62-66

Weierstrass論文「至る所微分不可能である連続関数の例」について

小柴 洋一 (鹿児島大 (理))

2000年8月22日 (火)

1 はじめに

至る所微分可能でない連続関数の例というのは、現代の数学の観念からしますとよく教科書等で引き合いに出されるものです。大学1年生の微分積分の内容から少し深く立ち入った解析学のはじめ位にある話題です。

1番よく云われる数学者は Weierstrass です。19世紀の解析学の概念の基礎が確立されてゆく過程の中でこの例の発見は大きな意味をもっていたと思われます。

この論文は Weiestrass 全集第2巻 (最後尾の文献 [1]) にあります。

この論稿ではこの元の Weierstrass 論文を読んできましたのでご報告したいと思います。

2 内容を follow すると

Karl Weierstrass が 1872 年に考えた関数は次の関数です。

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x\pi)$$

ここで a は奇整数,b は $0<b<1$ である実数とします。

定数 a,b については更に後で仮定が付け加わるのですがここでは一応このままでいきます。原文にある通り進んでいきます。

変数 x のとる任意の値 x_0、m を任意の正の整数とします。実数 $a^m x_0$ に最も近い整数を α_m、$x_{m+1} = a^m x_0 - \alpha_m$ とします。ですから $-\frac{1}{2} < x_{m+1} \leqq \frac{1}{2}$ となっています。

$$x' = \frac{\alpha_m - 1}{a^m}, \qquad x'' = \frac{\alpha_m + 1}{a^m},$$

とおくと

$$x' - x_0 = -\frac{1 + x_{m+1}}{a^m}, \qquad x'' - x_0 = \frac{1 - x_{m+1}}{a^m};$$

$$x' < x_0 < x''.$$

m を大きくとると x', x'' は各々 値 x_0 に近づきます。

$$\begin{aligned}
\frac{f(x') - (x_0)}{x' - x_0} &= \sum_{n=0}^{\infty}(b^n \cdot \frac{\cos(a^n x' \pi) - \cos(a^n x_0 \pi)}{x' - x_0}) \\
&= \sum_{n=0}^{m\ \ 1}((ab)^n \cdot \frac{\cos(a^n x' \pi) - \cos(a^n x_0 \pi)}{a^n(x' - x_0)}) \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty}(b^{m+n} \cdot \frac{\cos(a^{m+n} x' \pi) - \cos(a^n x_0 \pi)}{x' - x_0}).
\end{aligned}$$

右辺の第一の部分では、

$$\frac{\cos(a^n x' \pi) - \cos(a^n x_0 \pi)}{a^n(x' - x_0)} = -\pi \sin(a^n \frac{x' + x_0}{2} \pi) \cdot \frac{\sin(a^n \frac{x' \ \ x_0}{2} \pi)}{a^n \frac{x' \ \ x_0}{2} \pi}$$

$$\frac{\sin(a^n \frac{x' \ \ x_0}{2} \pi)}{a^n \frac{x' \ \ x_0}{2} \pi}$$

の値は-1 と 1 の間にあるから、その絶対値は

$$\pi \sum_{n=0}^{m\ \ 1}(ab)^n,$$

より小さく、したがって

$$\frac{\pi}{ab - 1}(ab)^m,$$

より小さい。
また、a は奇数であるから、

$$\cos(a^{m+n}x'\pi) = \cos(a^n(\alpha_m - 1)\pi) = -(-1)^{\alpha_m},$$

$$\cos(a^{m+n}x_0\pi) = \cos(a^n\alpha_m\pi + a^n x_{m+1}\pi) = (-1)^{\alpha_m}\cos(a^n x_{m+1}\pi),$$

したがって

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^{m+n}\cdot(\frac{\cos(a^{m+n}x'\pi) - \cos(a^{m+n}x_0\pi)}{x' - x_0}) = (-1)^{\alpha_m}(ab)^m \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+\cos(a^n x_{m+1}\pi)}{1+x_{m+1}}b^n.$$

となる。
級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+\cos(a^n x_{m+1}\pi)}{1+x_{m+1}}b^n$$

の各項は正で、$\cos(x_{m+1}\pi) \geqq 0, \frac{1}{2} < 1 + x_{m+1} \leqq \frac{3}{2}$ 故に各項は $\geqq \frac{2}{3}$ 。
これにより

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = (-1)^{\alpha_m}(ab)^m \cdot \eta(\frac{2}{3} + \varepsilon\frac{\pi}{ab-1}),$$

となる。ここに η は > 1 である正数、ε は-1 と 1 の間にある実数である。
同様にして

$$\frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0} = -(-1)^{\alpha_m}(ab)^m \cdot \eta_1(\frac{2}{3} + \varepsilon_1\frac{\pi}{ab-1}),$$

となる。ここに η_1 は > 1 である正数、ε_1 は-1 と 1 の間にある実数である。
ここで定数 a, b の仮定の条件をさらに強めて $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ とする。そうすると $\frac{2}{3} > \frac{\pi}{ab\ \ 1}$ である。
m を無限大にすると

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}, \qquad \frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0}$$

は各々異符号の無限大に行く。　以上の所論から、任意の $(x = x_0)$ において $f(x)$ は確定した有限の微分商も、確定した無限に大きい微分商も持たないことが証明された。

以上が Wierstrass の原論文で彼が考えた通りの logic を辿ってみたものです。

3 原文の翻訳の一部

文献 [1] の前半部分で Weierstrass は以下のように述べています。
(この翻訳は竹之内脩先生の助言をいただいています)

（１８７２年７月１８日王立科学アカデミーにて）

つい最近まで、実１変数の連続関数が、常に、孤立した点 (の集合) でのみ不確定かまたは無限に増大できる値になる第１次導関数を持つと、一般に考えられていた。これに対して、自らの学問に厳しい批判を加えるのが常であるガウス、コーシー、ディリクレらの論文においてさえ、私の知る限り、明白に表明されたいかなる見解も見たことが無い。この連続関数に関する想定が認められないこと、そしてたとえばこの想定が、無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$$

によって表現される関数の場合そうはなっていないと、確言したのはリーマンが最初だった。私がリーマンの聴講者から聞いたところによると、これは１８６１年またはそれ以前のことだったらしい。残念ながらこの証明をリーマンはどこにも公表していない。またリーマンの書いたどの文書にも、また誰かが書き留めた形としても残されていない。リーマンがその聴講者たちにどのようにそれを述べたのか、それを確かにこの耳で聞けたわけではないだけに実に残念である。　リーマンの主張が広い範囲の人たちに知られるようになってからこの問題に取り組んだ数学者たちは、変数のもっと狭い区間において微分可能でない関数の存在を示すことで十分であるという見解であったようである。この種の関数が存在することは、きわめて簡単に示されるので、リーマンは、変数の任意の値に対して、確定した微分商をもたないような関数を視野に捉えていたと、私は確信している。そうとはいえ、この与えられた三角級数がこの種の関数を表現することを証明するのは、いささか難しいように思う。しかしながら、実１変数 x の連続関数で、この関数が x のどのような値に対しても確定した微分商を持たないことが極めて簡単な方法で証明できるようなものを作ることができる。

これは例えば次のような方法で確かめることが出来る。

(これ以降は2節の式の証明部分とほぼ同じであるため省略)

参考文献

[1] K.Weierstrass,Über continuirliche functionen eines reellen arguments,die für keinen werth des letzteren einen bestimmten differentialquotienten besitzen,
Karl Weierstrass Mathematische Werke,Abhandlungen 2,71-74 Akademische Verlagsgesellschaft,Frankfurt

[2] 高木 貞治、解析概論、岩波、39ページ

[3] 徳永秀也、鹿野健、微分不可能な連続関数を巡っての小史、津田塾大数学計算機科学研究所報、1992年,65-76ページ