数理解析研究所講究録
1195巻 2001年 14-37

無限小量をめぐる論争と基礎づけの問題,ライプニッツ,ヴァリニョン,ヘルマン

学習院高等科　林　知宏 (Tomohiro HAYASHI)
Gakushuin Boys' High School

2000年10月31日*

1 はじめに

数学史研究における一つの「常識」として次のようなものがある.

- 17世紀後半にニュートン,ライプニッツによって無限小解析の基礎が確立された.
- 両者は独立して,各々の方法論を築いたが,後年無限小解析発見の先取権をめぐり熾烈な争いが起きた.
- ニュートン派は記号法を含めて,ライプニッツ派の多産な成果の前に「敗北」を余儀なくされた.

本稿は以上の歴史認識に対して,一定の疑義を投げかけるものである.すなわち,以下の3点の疑問に対して論究したい.

1. 何をもって「無限小解析の基礎の確立」と称するのか?
2. ニュートン派,ライプニッツ派の対立以上に,両者の知的融合に目を向けるべきではないのか?
3. 18世紀前半において,ニュートンはライプニッツ派に対して「敗北」したという位置づけでよいのか?

1の論点については,やはり無限小というギリシア数学が回避した対象をどのように正当化するかが問題である.実際,17世紀前半から多くの数学者たちが様々なアイデアを提示している.[1] 特に1690年代になってから,直接無限小を対象とする論争がライプニッツの周辺で展開した.ニュートン,ライプニッツ自身よりも彼らの数学を受容したものたちの方が,この問題についてより説得力ある議論を求めていたと考えられる.それは深さや,綿密さとも違った,より広汎な支持を

*本論考は2000年8月22日京都大学数理解析研究所研究集会「数学史の研究」において,「無限小解析の形成と17,18世紀における無限小量をめぐる論争について」のタイトルで発表したものをもとに作成した.

[1] [Malet 1996] 参照.

集めるための発想の模索である．ライプニッツと彼の周辺の人々（ヴァリニョン，ヘルマン）が抱いた意見の相違点を明確にしたい．

2は1と関連する．ライプニッツ流数学を受容し，その発展を担った人々はニュートンの『プリンキピア』を自己の議論の補強に役立てようとする．先取権論争は紛れもない歴史的事実である．そのこと自体をあえて覆す必要はない．しかし，我々が想像する以上に，17世紀後半から18世紀前半にかけて活躍した数学者たちは柔軟で，巧妙な戦略家たちであったのではないだろうか．大陸側とイギリス側，双方の方法論上の融合に目をむけていくべきである．

3については，1，2からの自然な帰結であるが，「敗北」などという単純な断定はありえないといえよう．無論，無限小解析を自然学に応用し，成果を上げることに関して，大陸側に量的な優位性があることは事実である．しかし，マクローリンの著作『流率論（*A Treatise of Fluxions*)』（1742年刊）では，大陸の数学の問題点を整理し，克服しようとする意図が明確である．[2] そしてマクローリンの著作は再度，大陸側にインパクトを与えたに違いない．ラグランジュ等，18世紀後半の解析学の発展に貢献するものたちへ影響をもたらすのである．[3]

数学史研究において，比較的手薄である18世紀前半の数学史研究に何らかの寄与をすることは重要である．十分に議論を深めなければならない余地があることを十分自覚しながらも，本稿は一つの試論としての役割を果たすこと目標とする．

2　17-18世紀における無限小解析の発展の流れ

まず簡単に，17世紀半ばから18世紀前半までの無限小解析の発展の流れを総括しておこう（我々の議論に必要な範囲内にとどめる）．カヴァリエリの『不可分量による連続体の幾何学』（1635年刊）は，後世への影響力を考えればまず第一に挙げるべきものであろう．多くの数学者たちは，不可分量を用いた求積計算の成果から出発している．1660年代から70年代にかけて，接線法，求積問題に対する個別の解法が蓄積されていった．それを担ったのは，イギリス側ではウォリス，バロウ，グレゴリーである．また大陸側では，ホイヘンス，パスカル，ロベルヴァル等である．特にバロウの『幾何学講義』（1670年刊）は，17世紀後半において一つの「標準」と捉えられていた．[4]

ニュートンは1666年から71年頃までに，ライプニッツは1675年から76年頃までにそれぞれの方法論を確立していた．彼らは，彼ら以前の個々の問題解決法を一般化することに成功した．通常，ニュートンが，ライプニッツが無限小解析の「創始者」と呼ばれる所以である．ライプニッツは，論文「極大，極小さらには接線に関する新方法」（1684年刊）の発表により，数学史上はじめて微分算の計算公式と基礎的発想を独自の記号法（dx）とともに公にしたのだった．ニュートンの論文の公刊は遅れ，草稿が個人的に回覧されるに止まっていた．1687年『自然哲学の数学的諸

---

[2]マクローリンは，「ア・プリオリな無限小量の導入」に否定的である．後述の通り，それはライプニッツ派にとって一つの重要な要請であり，様々な論争の中から抽出された結論的発想だった．マクローリンは代表例として，フォントネルの著作『無限幾何学原論（*Élements de la geometrie de l'infini*)』（1727年刊）を批判する．[MacLaurin 1742], pp. 40f.

[3][Grabiner 1997] 参照．

[4]例えば，ライプニッツ流の数学を受容した後のベルヌーイ兄弟たちにとっても，バロウの著作の重要性は決して損なわれることはなかった．彼らにとってバロウはライプニッツ以前の数学を象徴する存在であったと考えられる．[Roero 1989], pp. 145f.

原理』(以下では『プリンキピア』と称する）は，彼のいわゆる流率法を前面に押し出した著作ではない．しかしニュートンの無限小解析の内容が全面的に明らかにされていなかったために，彼が運動論を展開するため用意した数学的装置に大陸側の数学者たちは注目したのだった．

ライプニッツの1684年論文は，大陸側に大きな影響をもたらした．ヤコブ，ヨハンのベルヌーイ兄弟，ロピタル，ヴァリニョン等のグループは，(ライプニッツも含めて）互いの成果を公刊論文，書簡を通じて確認し合う．問題意識を共有し，また新たな問題解決に取り組む集団の形成である．1696年にはロピタルの手による，初の微分学の教科書も出版された．彼らの集団としての影響は，ヨーロッパの各所において広がっていく．[5] ライプニッツが最初に工夫した記号法は，ニュートン流に対して優位性を持つことが明らかだった．また実際，それを駆使した数学上の成果は量的にも，質的にもイギリス側に大きく水をあけた．その一方で，ちょうど世紀の変わり目から，いわゆる先取権論争が勃発した．両者とも冷静さを欠く対応だったには違いないが，実質的にイギリス側に「負い目」があったことは事実だろう．

1690年代半ば以降に，無限小にまつわる論争が図らずしも起きた．これを契機に，無限小解析に関する基礎づけをライプニッツ派は一層強く意識しただろう．ライプニッツは，彼の方法論形成の中で様々な発想を提示しつつ，この無限小の存在論的，認識論的正当化に取り組んでいた．1695年のライプニッツ，ニーウェンテイトの論争後に発刊されたロピタルの教科書には，その二人の論点の違いはほとんど現れない．これは非常に興味深いことである．すでに，問題が「整理されてしまった」かのような記述があるのみである．しかし，実際には論争は終焉してはいなかった．そこにはロピタル（元来はヨハン・ベルヌーイ）の戦略が見えかくれする．またそれはライプニッツのアイデアが全面的に反映されたものではない．両者の微妙な相違点は何であろうか．

世紀が変わって，パリのアカデミー内で，同様の論争が起こったとき，もはやライプニッツ自身は表面上かかわりを持たなかった．直接応戦したヴァリニョンはどのような考えを提示したか．それが我々にとって重要である．またライプニッツの反論に納得しなかったニーウェンテイトに再反論したのは，ヤコブ・ベルヌーイの弟子，ヘルマンだった．ヘルマンの著作『微分算の原理に関するニーウェンテイト氏の第2考察に対する返答』(1700年刊）は，一般には取り上げられる機会の少ない「忘れられた」著作である．あまり分析の対象とされなかった著作を通じて，当初掲げた我々の問題設定に対して何がしかの解答を与えたい．

我々はカヴァリエリに始まり，無限小をめぐる論争を通じて一定の方向性が定まった段階で，数学上の一つの分野における「パラダイム」形成が完了したと考える．以上，本節で述べた内容を図にまとめたものが図1である．無論，この図にはかなりの単純化が行なわれている（矢印の結びつきは最小限にしてある）．また，通常の数学史研究では，デカルトの代数的記号法の確立は中心に位置されるだろう．そしてなによりニュートンや，ライプニッツを中心線からずれた所に位置づけることは，例外的評価かもしれない．しかし我々の無限小解析のパラダイム形成に関していえば，図の中心線の人々こそが結果的には支配的な論点（自然哲学上のアトミズムともかかわる）を表明していたのだと考えたい．

[5]例えば，[Robinet 1991] または [Mazzone and Roero 1997] 参照．それらの著作はイタリアの大学においてライプニッツ流数学がどのように受容されていったかという問題を通じて，ライプニッツ派の戦略を明確にしようと試みている．

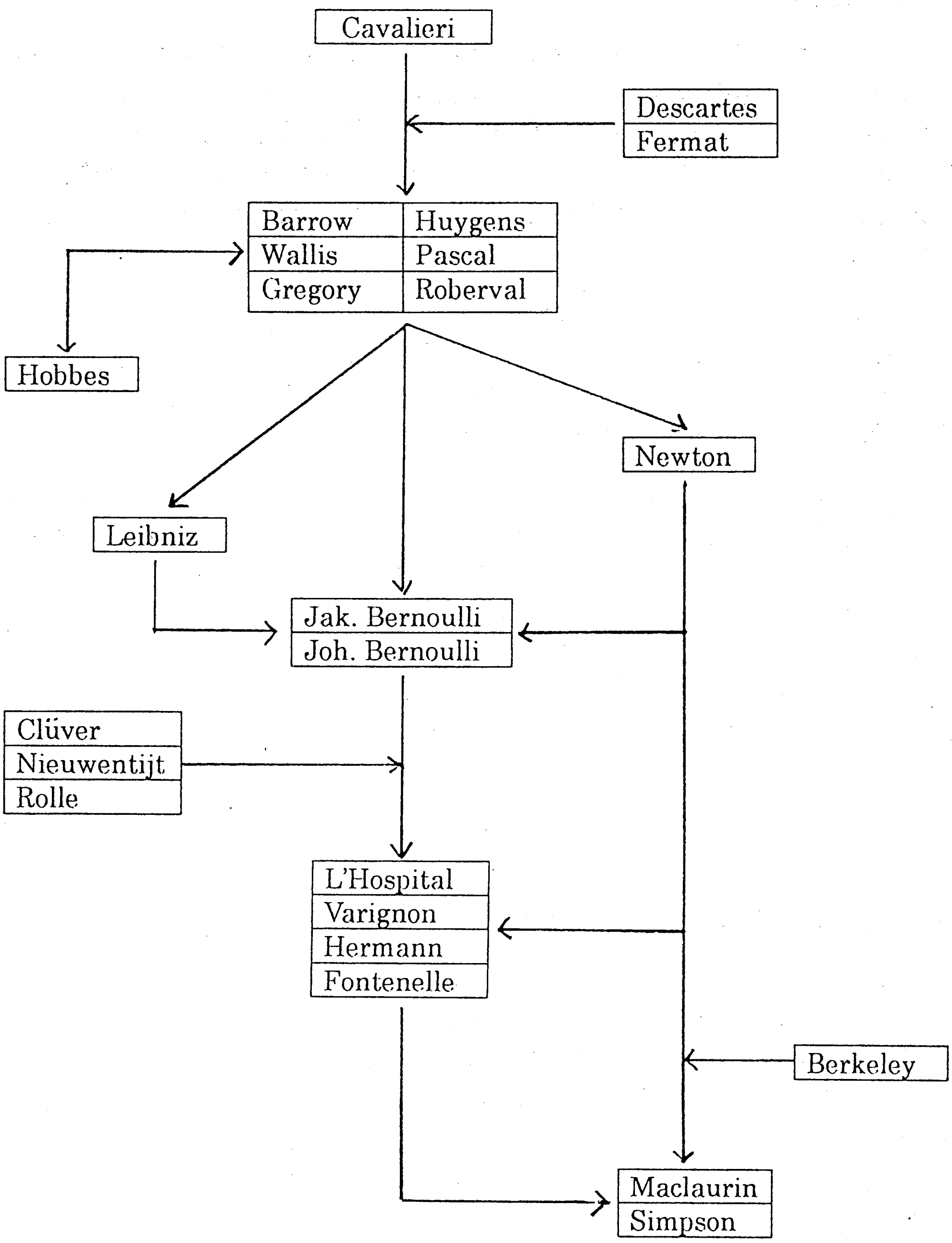

図 1: 17-18 世紀における無限小解析の発展の流れ

3　ライプニッツによる無限小の正当化

3.1　初期の自然学研究

ライプニッツの数学研究は，パリ滞在期（1672年〜76年）以降に本格化する．彼の無限小解析に関する基本的方法論もその1672年以降の草稿に現れる．しかし，ここで我々が関心を寄せる無限小自体に関する発想の表明は，それ以前の1671年の著作「抽象的運動論」に注目に値するものを見出すことができる．[6]　ライプニッツはその中で，運動の始まり（または終わり）に対する概念的定式化を試みている．そこでは必然的に,「微小」な量または変化を考察の対象としている．要点は次の通りである．[7]

1. 運動学上の概念として，ホッブズのコーナートスの援用.
2. 数学上の概念として，カヴァリエリの不可分量の援用.
3. 「曲線＝無限辺多角形」という発想の表明，運動の合成を通じた超越曲線への接近.
4. 運動の連続性を通じて表明される,「連続律」.

これらは，直接的に数学的問題の解決を目指すために導入されたものではない．しかしながら，いずれも無限小解析の形成にあたって活用されていくものである．特に，3はアルキメデスの求積の方法論を拡張する契機をもたらし，デカルトの『幾何学』を批判的に乗り越えていく（代数曲線から超越曲線を解析の対象とする）ための一段階になるだろう．さらに，4は単に自然学，数学上の原理（「自然は飛躍せず」）としての役割のみならず，一般的な形而上学的原理として生涯一貫して保持されていく．[8]　また2については，ライプニッツが後年提唱する,「凝集による存在（ens per aggregatum)」という存在論上の概念と不可分量のアイデアとの結びつきが我々には推測できる．[9]　ライプニッツは運動学の論考を通じて，実質的に「無限小」に付随する様々な考察にかかわっていたことがわかるであろう．

3.2　算術的求積・接線法・逆接線法研究，公刊論文上の無限小

パリ滞在によってライプニッツは数学研究を本格化させた．この期間中，彼が作り上げた成果は多岐にわたる．無限小をめぐっては，前半期の算術的求積，後半の接線法・逆接線法の研究が注目される．中でも，算術的求積に関する著作『円，楕円，双曲線の算術的求積について，およびその系として表を用いない三角法』を見ると，表面上ライプニッツは数学上の規範（アルキメデスの間接証明の利用）を逸脱する意図はないかのようである．しかし，ライプニッツは無限小使用に対する積極性を以下のように表明をしている．もはやライプニッツは，ギリシア数学を単純に再現する地点に止まっていない．これはやはり，前項で取り上げたパリ時代以前の研究成果とパリ時代になって吸収した先端の数学的著作との相互作用によるものだろう．

---

[6][Leibniz A], VI-2, S. 264-267.

[7]詳細な議論は[林 1999]第3章3.3節または[林 2000]参照.

[8]1702年2月2日付ヴァリニョン宛書簡で，ライプニッツは「私の連続律（ma loy de la continuité)」とわざわざ「私の」という言葉で強調している．[Leibniz GM], IV, S. 93.

[9]1706年3月11日付デ・ボス宛書簡の中に典型的記述を見出すことができる．[Leibniz GP], II, S. 304f.

> ここでいつも我々が無限と無限小について言っていることは，すべて新奇なものであるかのように，ある人々には不明瞭なものと見られるだろう．しかし各々の人による普通の思考（meditatio）によって，それは簡単に知覚（percipio）されるだろう．実際それを知覚する人は，その便利さを認めている．また事物の本性の中にそうした量があるかどうかは問題ではなく，実際，それを語ったり，知るのに，また部分的に見出したり，証明する際の節約を示そうとするときには，作り物（fictio）が導入されれば十分である．そうでなければ内接あるいは外接を用いて，そして矛盾へと導き，そして任意の指示可能なものよりも小さい誤差を示すことが必要である．[10]

「無限小＝作り物（fictio）」の観点こそ，ライプニッツの最重要テーゼである．彼は決して無限小実在論者ではない．17世紀の数学者の中でもこの発想は，(他の数学者に受け入れられたかどうかは別にして）独自のものである．実は，先の図1の中心線を貫く共通点はアトミズムに対する態度である．[11] ライプニッツは，学問的キャリアを開始した当初はアトミズムに共鳴していたふしもある．しかし，パリ時代以前の段階からはっきり一線を画するようになる．[12] 量の「最小要素」としての「無限小量」をア・プリオリに想定することは，ライプニッツにとってアトミズムと重なり合うものだったろう．

ライプニッツが最初に記号 dx が導入したのは，接線法・逆接線法の研究においてであった．1675年10月29日付の草稿「求積解析第2部」では単に記号 $\int$ を「和」(summa)，d を「差」(differentia)を意味するとしている．[13] 記号 d が次元を下げるという，ある種の「作用素」としての役割も担っているとも見ることができるだろう．この記号は導入の当初から dx の形の表現と同時に別の意味合いも込められていた．すなわち，無限小を直接表現する，または指示するだけではない．記号 d によって，ある種の形式的操作を施した結果そのものも意味しているのである．

1684年に『学術紀要』誌に発表されたライプニッツの微分算に関する初めての公刊論文「極大・極小に関する新方法」に至る過程において，ライプニッツは有限量，無限小，特に指示がないもの，どれかに特定するというより，臨機応変にこの記号 dx を使い分けている．我々はこの記号 dx の用法を追跡することによって，ライプニッツの無限小概念が何か一つのものに収束するという期待をややもすると抱く．しかしその点では明らかに期待外れである．

論文「極大・極小に関する新方法」は，ライプニッツが満を持して発表したものだけに無限小について確定的なアイデアの表明を期待したくなる．だが，それを見出すことはできない．一方で，有限量との「比例」による認識論的理解を示したことは注目に値する．例えば，接線について述べている以下の部分を見てみよう．

> 接線を見出すことは，無限小の距離を持つ曲線上の2点を結んだ，直線を引くことである．あるいは，我々にとって曲線と同等である，無限に多くの角を持つ多角形の辺を引くことである．[中略] 他方その無限小はいつも dv のように，ある既知の微分に

---

[10] [Leibniz QA], S. 69.

[11] 17世紀から18世紀にかけてのアトミズムの発想の広がりとライプニッツの数学との影響関係を論ずるについては他日を期したい．

[12] [Moll 1982], S. 183ff.

[13] [Leibniz LB], S. 155. 邦訳 [ライプニッツ 1997]，167頁．

よってか，あるいはそれ自身に対する関係 (relatio)，すなわちある既知の接線によって表される．[14]

このように「抽象的運動論」や算術的求積の著作の中で主張されていた，「曲線＝無限辺多角形」という発想に再び言及しつつも，既知の微分（有限量）dv との「関係」による把握を述べている．比例関係が成立するならば，それはユークリッド『原論』第5巻の枠組の中の存在となる．すなわち「無限小量」と呼ぶことが可能になるというのである．dx 等の記号に対する指示は不統一が見受けられたとしても，「有限量との関係（＝比例）において無限小量を捉える」ことがライプニッツの中ではゆるぎない基本線になっていくのである．

3.3 無限小をめぐる論争とライプニッツ

1684年の論文「極大・極小に関する新方法」の発表後，ライプニッツは積分算に関する論文も発表する（1686年）．彼の無限小解析計算の基礎部分は公にされ，外界へ向けて影響力を行使することになる．その一方で，早くも1687年にはクリューヴァー（Clüver）による無限小導入についての批判が『学術紀要』誌上に掲載される．ライプニッツの反応は草稿のまま公にされなかった．[15] さらに，1690年代に入りニーウェンテイトにより，無限小解析批判の3部作が刊行されるにいたった．ライプニッツは，公にニーウェンテイトへの反論を明らかにする（『学術紀要』，1695年）．その論文はライプニッツの無限小概念が最も明瞭に現れたものとなっている．より詳しい議論は他に譲るが，[16] ライプニッツの無限小概念に関する議論をまとめると次のようになるだろう．

1. パリ滞在以前に運動学研究を通じて獲得した発想の一貫した保持（連続律，「曲線＝無限辺多角形」）．
2. 算術的求積，接線法・逆接線法の発展を通じて獲得した，あるいは表明した内容（無限小＝'fictio'，記号法 dx，有限量との比例関係による理解）．
3. ニーウェンテイトとの論争によって明確化した内容（相等概念の拡張，第3比例項による高階の微分量の定式化）．
4. 記号法の形式的運用（操作自体を表す「作用素」）による適用範囲の拡大，有用性の強調（虚量との比較）．

四つの特徴の内，上の三つはライプニッツによれば，ギリシア以来の数学的伝統を踏襲するという意識の下で培われてきたものである（それはニーウェンテイトの目から見ればまた別に見えたかもしれないが）．それに対し，最後の特徴は17世紀の記号的代数学の発展の成果をふまえたものといえよう．特に虚量とのアナロジーはライプニッツが好んで用いた例である．ともに存在論的な議論によってではなく，数学上の発見を促進する「触媒」のごときものとして価値を認めて

[14][Leibniz GM], V, S. 223. 邦訳 [ライプニッツ 1997]，301頁．

[15]現在もクリューヴァーの論文に対して，ライプニッツがどのように考えたかは全体像が明らかにされていない．部分的には，[Mancosu and Vailati 1990] において論じられた．

[16]ニーウェンテイト，ライプニッツ両者の論点を比較した拙論参照．[林 1999]，208-221頁または [林 2000]，185-190頁．

いる．[17]

以上，ライプニッツの初期研究から無限小をめぐる論争におけるアイデアの表明までを跡づけてきた．こうしたライプニッツの発想は，ライプニッツ流の数学を受容した人々にどのように参照されるかを次に見ることにしたい．

4 ヴァリニョンによる無限小の正当化

ライプニッツが1684年以降発表した論文は大陸において影響力を行使する．ヤコブ，ヨハンのベルヌーイ兄弟を初めてとして，ライプニッツ流の無限小解析の普及が始まったのである．ベルヌーイ兄弟を通じて蒙を啓かれた人々もいる．すなわち，ヴァリニョン，ロピタル，ヘルマン等である．[18] ライプニッツはこうした研究者たちと書簡によって情報交換を行なった．彼らは互いの問題意識を共有する，一つの学派を形成したわけである．前節に記した，1690年代半ばに生じた無限小をめぐる論争の内容についても周知の事実であったといえよう．

1700年パリの科学アカデミーにおいて，無限小をめぐる論争が起こる．ロルはニーウェンテイトのように無限小を用いた解析学に疑義を投げかけ，それにヴァリニョンが応戦した．[19] レイノー（Reyneau）によって記録されたアカデミー内の議論をもとに，ヴァリニョンの主張を確認しよう．そこで重要なことは，前節までに見たライプニッツの発想とヴァリニョンのそれとの間に本質的な違いがあるということである．

4.1 ヴァリニョンが掲げる無限小解析の三つの困難

ヴァリニョンのロルへの反論は，1700年7月から翌1701年6月にかけて少なくとも5回提示された．[20] 中でも1度目のものは，無限小解析が抱える「三つの困難」を明瞭に示している．ヴァリニョンはそれらの一つ一つに逐次，正当化を試みている．

まず三つの困難を挙げる前に，前提として次のことが確認される．すなわち，「（1次の）無限小」,「微分」または「任意の量要素（element d'une grandeur quelconque)」は何であれ与えられた任意の量よりも小さな量（moindre que quelque grandeur proposée que ce soit, minor quâvis quantitate datâ）として「全ての幾何学者によって理解されている」．ヴァリニョンは具体例として，カヴァリエリ，パスカル，ロベルヴァル，バロウ，ホイヘンスの名前を挙げる．ライプニッツ以前に無限小解析の発展を担った人々が一応に無限小を「量」として存在を認めていたことを示

[17] ライプニッツはパリ滞在期に方程式研究にも励んでいた.「3次方程式の解の公式（カルダノ公式）の一般性をどう理解するか」,「5次以上の方程式に対する一般解を求める」といった問題に取り組んだ草稿が多く残されている（[Leibniz A], VII-2 所収）．特に前者は，実量の解も虚量を通じて得られることが正当化されるかを問うものだった．ライプニッツは16世紀のイタリアの代数学者ボンベリの『代数学』（1572年刊）に影響を受けながらも，虚量の有用性を強く意識していた．パリ時代のライプニッツの方程式研究については[林 1999], 90-101頁参照．

[18] ロピタルは数学史上，微分学に関する初の教科書『曲線理解のための無限小解析（*Analyse des infiniment petits sur l'intelligence des lignes courbes*)』(1696年刊）を著したことで知られる．本稿ではロピタルについては詳しくは論じない．

[19] この論争の経過一般については，[Mancosu 1996], pp. 165-177 参照．

[20] ペファーによって『ヨハン・ベルヌーイ書簡集』第3巻付録として公刊された．[Bernoulli BJH], Band 3, pp. 351-376.

唆しているかのようである．我々は図1によって17〜18世紀の無限小解析の発展を理解した．それはこうしたヴァリニョンの発言にもとづいている．ベルヌーイ，ロピタル，ヴァリニョンに共通する発想は，実はこの無限小量のア・プリオリな想定である．[21]

まずもって，それがライプニッツの立場とは異なることに我々は注目しなければならない．ライプニッツは決して単純な無限小実在論者ではない．それはすでに確認済みである．あくまでも，数学上の有用性において役割を果たす「作り物（fictio）」として必要であると考えていた．ライプニッツはそれを強調するために，虚量とのアナロジーを用いたのだった．レイノーの記録を見る限り，ヴァリニョンはこの第1反論でニュートンの名には言及するが，ライプニッツにはなぜかふれていない．ヴァリニョンは，ライプニッツがかかわった無限小をめぐる論争の内容を知らないはずはない．1695年のニーウェンテイトへの反論を記した論文は，彼の周辺でも読まれていただろう．しかし，その主張がどれほどの説得力を持ち得たか，簡単に断ずることはできないのである．

さて，ヴァリニョンの述べる「三つの困難」は次の通りである．

1. 幾何学において，「無限に大きな無限大（infiniment grand infini）」や「無限に小さな無限小（infiniment petit infinitième）」は存在するか？
2. 微分量分だけ大きい、または小さい一つの量を元の量と等しいと見なすことができるか？
3. 微分量は絶対的に0であるか？

1に対して，ヴァリニョンは次のような例を提示する．[22] すなわち，aを有限量，mを「漸近双曲線下の面積（l'espace hyperbolique asymtotique ordinaire）」とする．後者は「無限であることがあらゆる幾何学者に受け入れられている」．このとき，以下の列を考える．

$$\cdots,\ \frac{a^5}{m^4},\ \frac{a^4}{m^3},\ \frac{a^3}{m^2},\ \frac{a^2}{m},\ a,\ m,\ \frac{m^2}{a},\ \frac{m^3}{a^2},\ \frac{m^4}{a^3},\ \cdots$$

ヴァリニョンによれば，aから左に行けばいくほど，「一方[より右側にある項]は他方[より左側にある項]に比べて無限に無限大である．またaから右に行けばいくほど，「一方[より左側にある項]は他方[より右側にある項]よりも無限に無限小である」という．この例によって，無限または無限小の中に階層のあることを示そうとしている．

2，3はライプニッツに対するニーウェンテイトの批判とも通じる論点である．しかし不思議なことに，我々の参照するこのテクストにおいて，ライプニッツは全く言及されない．かわりに言及されるのは，ロピタル『曲線理解のための無限小解析』冒頭の定義，さらにニュートン『プリンキピア』第1巻，第1部，補題11，注（Scholium）である．本稿注21でも指摘したが，前者は，無限小量としての微分を定義したものである．また後者は，ライプニッツの論敵と考えられていたニュートンを指示していることでとりわけ注目される．[23]

---

[21] ロピタルの教科書の冒頭に記された二つの定義と要請は，無限小を「量」としてア・プリオリに導入する．それによって存在論的な議論を回避しようとする意図を如実に示している．[L'Hospital 1696], pp. 1ff. より詳細な分析は[林 2000]参照．

[22] [Bernoulli BJH], Band 3, pp. 353.

[23] 1699年，ファシオによるライプニッツの剽窃の告発が公に行なわれ，先取権論争の最初の火ぶたが切って落とされた．我々が問題にしているパリのアカデミー内の論争が行なわれていた時，ライプニッツはファシオへの反論を『学術紀要』誌に公にしていた．ライプニッツ派の中で，ニュートンを論じることはすでにデリケートな問題になっていたに違いない．

4.2 ニュートン『プリンキピア』による無限小の正当化

ヴァリニョンが援用する『プリンキピア』第1巻，第1部，補題11，注の内容を確認しておこう．そもそもこの補題は，「接触点で有限の曲率を持つあらゆる曲線において，接触角の消えゆく弦（substensa evanescens anguli contactus）は，弦に隣接する弧の二重比に究極的に比例する」というものである．すなわち，図2で，

$$BD : bd = AB^2 : Ab^2$$

の成立を意味する．[24] この接触角問題は，中世以来ヨーロッパ数学における積年の課題であった．

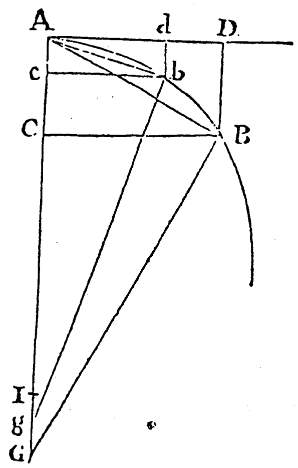

図 2: 『プリンキピア』第1巻，第1部，補題11

17世紀の数学者たちもほぼ例外なく，その問題に取り組んでいた．特にニュートンは，彼独自の数学的技法である「究極の比（ulitima ratio）」を用いた証明を提示した．さらに，ニュートンは注において，この技法の根底を成す基本概念について論じている．ヴァリニョンはまさにそれに目をつけたのである．

ニュートンは，曲線や曲線に囲まれた面に関して証明されることは，容易に曲面や立体にも応用されるとする．その上で，「矛盾へと帰着させる古代の幾何学者たちの方法によって，長たらしい証明を導く退屈さを避けるために（ut effugerem taedium deducendi lngas demonstrationes, more veterum geometrarum, ad absurdum）」と上記の補題を置いた目的を述べる．帰謬法を用いた間接証明の代わりに想定されるものは，カヴァリエリの不可分量による証明である．「しかし」とニュートンは次のように述べる．

> 不可分量の仮定はどちらかといえば問題があり（durior），したがってその方法はあまり幾何学的でないと考えられる．私は，導こうとする事々の証明を消えゆく量の究極の和や比，または生まれつつある最初の和や比へと帰着させる（ad ulitimas quantitatum evanescentium summas & rationes, primasque nascentium）方を好んで

[24] [Newton 1687], pp. 83f. 邦訳 [ニュートン 1979], 93 頁.

きた．すなわち，和や比の極限（limes）へと帰着することであり，その極限の証明をできる限り簡潔に提示することである．なぜならこれらによって不可分量の方法を用いるのと同じことが示されるからであり，しかも私はより安全に（tutius）証明の原理を利用するだろう．[中略]

消えゆく量の究極の比例などないという反論がある．なぜなら，消えてしまう前は，究極のものでないし，消えてしまった時には，何もないからである．また同じ議論になるが，運動が終わる時，ある位置に達する物体の究極の速度（velocitas ultima）などないということが主張される．なぜなら，物体がその位置に達する前には，究極のものではないし，達してしまって[運動が終われば]，速度は0だからである．[中略] しかし，答えは簡単である．究極の速度というものによって理解されることは，究極の位置に達し，運動が終わってしまう前でもなく，後でもなく，まさに達する時（neque antequam attingit locum ultimum & motus cessat, neque postea, sed tunc cum attingit），物体が動かされる速度である．すなわち，物体が究極の位置に達し，運動が終わる瞬間の速度そのものである．[25]

ニュートンは，さらに「消えゆく量の究極の比」は「究極の量の比」ではなく，「極限なしに，減少していく量の比がつねに近似するものに対する極限」であることを述べている．[26] ニュートンの議論の中には，無限小量は表向き用いられていない．また，彼独自の概念である流率の語も見ることができない．しかし，無限小存在論者のヴァリニョンは，先の引用に言及し，それを自己の立場の擁護に利用するのである．では，その『プリンキピア』の注釈のどこに利用価値があったのであろうか？

このレイノーによる記録が残された1700年の時点では，ニュートンの無限小解析の方法論を明らかにした著作は公刊されていない（1704年の『光学』の付録として「求積論（De quadratura curvarum）」の出版が最初）．したがって，ヴァリニョンを初めとする大陸の数学者たちにとってニュートンの方法論といえば，この『プリンキピア』で示されたものに他ならなかった．レイノーの記録は論点2について，ヴァリニョンがロルの無限小量の解釈を誤りを指摘したことを示している．実際，ロルは微分量を「固定した，あるいは決定された量（des grandeurs fixes et déterminées），さらには絶対的に0であると見なす」という誤りを犯しているという．そうではなく，「反対に」と次のように述べたようである．

微分量の本性は，変化し固定されないことにあり，それらをいわばそれらの消失性について点と同じに考えずに，0に至るまで，「連続的な流量の中で（in fluxu continuo）」絶えず減少することにある．消えゆく可分量（Evanescentia divisibilia），まさにそれこそ，[ロピタルの]『無限小解析』の定義1，定義2の中の語「変量」のことである．0まで減少が至ることができて，そして0からあるものまで増加する量の一部，それらをニュートンは「流量，増加あるいは減少するモメント（fluxiones, incrementa vel decrementa momentanea）」と名付けた．[27]

[25] [Newton 1687], pp. 86f. 邦訳，95f 頁．ただし，引用は拙訳による．
[26] *Ibid.*, p. 87. 邦訳，97 頁．
[27] [Bernoulli BJH], Band 3, p. 356.

ヴァリニョンは三つ目の困難について論じる際も,『プリンキピア』に言及する.無限小解析における計算,操作は微分量を「消滅していく (comme s'aneantissant)」としか考えず,「消滅したもの (comme aneanties)」とは考えていないとして,先の引用をもじって使用する.「すなわち,完全に消滅する直前のごとく考える.ちょうどニュートン氏の[『プリンキピア』の]第1部の終わりに見ることができるように,消えゆく前でもなく,後でもなく,消える時である (non antequam evanescunt, non postea, sed cum evanescunt)」.[28] ヴァリニョンは無限小量をあらかじめ定まったものではなく,量の変化の中で定まるものと捉えていた.そうした意味で,運動を援用しつつ,「消えゆく量の究極の比」を定めるニュートンの議論を有用に感じるのは当然であっただろう.

4.3 ライプニッツとヴァリニョン

ライプニッツはパリのアカデミー内の論争に直接参加することはなかった.しかし1701年11月にヴァリニョンがライプニッツに書簡を送ったことをきっかけに,両者は直接交信を始める.ヴァリニョンはライプニッツに自分がかかわったロルとの論争についてふれる(「あなたの[無限小]計算に関してロルと私の間に[論争が]あることをご存知でしょう.彼はあなたの[無限小]計算を誤りでかつ偽推論的 (paralogistique) と主張するのです」).そして,ヴァリニョン自身は無限小量または微分量をつねに固定されたもの,または決定されたものではなく尽くせないもの (inépuisable) として考えていることを述べ,この点に関してライプニッツがどのように感じているかを尋ねている.[29]

1702年2月2日付書簡でライプニッツは返答する.先の1695年のニーウェンテイトへの反論で表明されたように「無限小の効力 (l'effect des infiniment petits) を厳密にする」のは量が「比べられない」という発想であるとする.すなわち,次のように述べている.

> 我々の計算によって,望むだけ十分小さな量を常に取り得るのと同様に,その誤差に対して十分小さな,比べられないくらい小さな量を取り得るときに,指示されるようなどんな誤差よりも小さくなるという結果になります.[中略]疑いなくそれによって我々が利用する無限小計算の厳密な証明は構成されるのです.[30]

そして仮に無限小の線なるものを認めることができないとしても,それは「推論を簡略にする理想的概念 (notion ideale) としてのみ役立ち得る」のである.ちょうど虚量(例えば$\sqrt{-2}$)が3次方程式の解の公式の中で実量の解を表現するのに必要であったようにである.[31] さらにかつて算術的求積の著作の中で,表明されていた「無限小= 'fictio'」という発想はこの書簡でも再び述べられる.[32] そして運動学における連続律,すなわち静止=無限小の運動というアイデアの表明に続き,一般的な連続律を次のように提示する.

---

[28] *Ibid.*, p. 358.
[29] [Leibniz GM], IV, S. 89.
[30] *Ibid.*, S. 92.
[31] *Ibid.*
[32] *Ibid.*, S. 93. 1702年6月20日付のヴァリニョン宛書簡の中でもさらに同様な言明が繰り返される.ライプニッツは次のように述べている.「本当のことを言うと,私には無限や無限小を空想上のもの (choses ideales), またはうまく基礎づけられた作り物 (fictions bien fondées) と別な風に考えなければならないとはどうしても思えないのです」. *Ibid.*, S. 110.

> 有限の法則は無限の中でも成立するのであり，たとえ実際終わりなく小分割されてその質料がなくなってしまったとしても，あたかもアトム（すなわち自然の指示可能な元素）があるかのようにです．反対に無限の法則は有限の中でもうまくいくのです，たとえ必要でないとしても形而上学的な無限小があるかのようにです．[33]

したがって先に見た1階の微分量が，さらには高階の微分量が有限量の比によって正当化されるのである．

こうしたライプニッツの議論は，先に我々が見たニュートン『プリンキピア』中の議論とどれほど異なるものとしてヴァリニョンには見えただろうか．もともとライプニッツは，単純な無限小実在論者ではないので，無限小を量として一つの「固定した」存在のように考えることにはくみしない．したがって，ロルがそうした観点から無限小を否定することを反駁したい気持ちはヴァリニョンと同じであろう．ただし，ニュートンの「瞬間的」速度をア・プリオリに認めて，実質的に無限小量を正当化する方法論の中にない観点が含まれている．それは次の2点である．

1. 虚量とのアナロジー
2. 運動学上のみならず，形而上学的原理として連続律の表明

これらは，1695年に発表されたニーウェンテイトへの反論にもなかった論点であり，ヴァリニョンはその論文を熟読したとしても引き出せなかっただろう．我々はこれらがライプニッツの1670年頃からの様々な熟考の末に達した一つの境地であることを知っている．しかしながら，ヴァリニョンにどれだけの説得力を持っただろうか．

ライプニッツとヴァリニョンとの交信はライプニッツの最晩年まで続く．ただし上記の無限小に関する基礎づけに関して，ヴァリニョンがライプニッツの発想に対して云々することはあまり見られない．むしろ両者の話題は，具体的な問題（例えば，「任意の曲線上を速度を変えながら運動する物体の重さと中心力との関係を見出す」）に対して，互いの解法を述べることが中心となる．よって，我々の問題において両者の発想がどのように影響関係を持ったかについて即断は避けたい．しかし，ニュートン流の影響を物語るさらなる例として，ヴァリニョンが1707年6月にパリの科学アカデミーの紀要に発表した論文は注目に値するだろう．[34]

本章の議論をまとめよう．ライプニッツ自身の意図とは別に，無限小をめぐる基礎づけをめぐってニュートン，ライプニッツの議論がヴァリニョンのようなライプニッツ派の数学者の中では予想以上に早く融合していたと考えられる．すなわち運動を前面に出した無限小量の正当化である．ライプニッツとライプニッツ派の人々とは，ニーウェンテイトやロルのように無限小解析の成果

---

[33] *Ibid.*, S. 93f.

[34] ヴァリニョンはその論文中，定義1で「瞬間（instant）」を次のように定義する．

> 瞬間という語によって，我々はここで無限小の，または（デカルト氏以来の現代風に語るには）無限定に小さい時間の一部分（une particule de temps infiniment petite, ou(pour parler comme quelques modernes depuis M. Descartes) を理解する．すなわち，何であれ指し示すことができる何らかの量よりも小さいものをいう．それこそまさに古代人たちの言葉で，「与えられた任意の量よりも小さい」と称していたものである．

ヴァリニョンはさらに，定義の後の系で，時間 t，その間達した空間 e とするとき，運動が持続する各瞬間 dt における速度が $\frac{de}{dt}$ で与えられることを提示している．[Varignon 1707], pp. 222f.

を認めず，古典的手法への回帰を主張する人々への反駁という点では共同して戦う．それは有用性において無限小と（彼らの）記号法は，もはや不可欠だからである．しかし，成果の基礎を成す無限小に対する存在論的，あるいは認識論的議論においては両者は一線を画する発想を持っていたように見える．ヴァリニョンに代表される人々にとって，ニュートンのアイデアの方がより説得力を持つと感じていたのではないか．我々はそのことにもっと注目するべきであると考える．

5　ヘルマンによる無限小の正当化

ニーウェンテイトによる無限小解析批判は，1695 年にライプニッツの反論が発表された段階で終息したのではなかった．翌年，ニーウェンテイトはさらなる批判書『微分算の原理に関する第 2 考察』を出版して抵抗する．他方，ライプニッツは新たな反論を試みなかった．代って，その任を請け負ったのがヘルマンである．彼はもともとバーゼルでヤコブ・ベルヌーイの教えを受け，その後イタリア（パドゥア）にわたり，ライプニッツ流の無限小解析の普及に貢献があった人物である．1700 年というまさに世紀末に，彼の著書『微分算の原理に関して出版された著名なるベルナルド・ニーウェンテイト第 2 考察への返答』（以下では『ニーウェンテイト第 2 考察への返答』と称する）は出版された．この著作は数学史家の中でも，従来あまり注目されることがなかった．ある意味で「忘れられた」文献である．ヘルマン研究としては，後に発刊した自然学に関する著作の方が確かにライプニッツ流無限小解析の普及を考える上で重要性を持つといえるかもしれない．[35]　だが，この『ニーウェンテイト第 2 考察への返答』の内容を見るならば，興味深い言説をいくつか見出すことができる．我々の問題であるライプニッツ派の人々のライプニッツ受容の問題を考える上では，やはり見逃せない著作であることを確認したい．

5.1　『ニーウェンテイト第 2 考察への返答』

ヘルマンの著作は六つの章からなり，ニーウェンテイトの著作の内容に逐次反論するという形式を取っている．各章のおおまかな内容を羅列すると次のようになる．

- 第 1 章：無限小量にまつわる問題（量の同次性，他）．
- 第 2 章：ライプニッツによる比例を用いた ddx の正当化について．
- 第 3 章：2 階の微分量の方程式への応用，変曲点．
- 第 4 章：ニーウェンテイト流の原理に沿って議論を展開．ニュートンに言及（『プリンキピア』第 1 巻，第 1 部，第 1 章補題 11 を指示）．
- 第 5 章：指数に不定量を含んだ方程式の扱い．
- 第 6 章：無限小量の公理化．

[35] グッチャルディーニはニュートン『プリンキピア』をライプニッツ派が継承発展させていく一例として，ヘルマンの 1716 年の著作『運動学，あるいは立体と流体の力と運動に関して』に注目する．[Guicciardini 1999], pp. 205-216.

以上からわかることは，ヴァリニョンと違いライプニッツが 1695 年論文の中で展開していた発想をより忠実に受け継いでいるということである．第2，3，5 章はヘルマン独自の議論というより，ライプニッツのものをそのまま敷衍したものである．ヴァリニョンがロルとの論争において提示していた，ア・プリオリな無限小量の存在要請のための正当化の議論に比べて新味に欠けるように見えるかもしれない（それゆえ，数学史家に軽視されてきた？）．しかし，そうでない部分もこの著作は含んでいる．

ヘルマンは第 1 章で無限小量の存在そのものをめぐって，ニーウェンテイトが有限量の性質を無限小量に帰することを批判することを取り上げる．すなわち，「比べられない（imcomparabilis）」という，ニーウェンテイトに言わせればユークリッド『原論』第 5 巻の範疇にない量を通じて比例論など無意味ということである．それに対してヘルマンは，「こうした全ての困難は何か他のものから生まれるのではなく，ただ『比べられないくらい』という語のあいまいさから生まれるのである」と述べている．[36] これは重要な指摘である．なぜならば，この差が「比べられないくらい」量どうしを「等しい」とみなすことが，ライプニッツ 1695 年論文のラジカルな主張の一つだったからである．ヘルマンは基本線として，ライプニッツの主張に共感しながら，なお不十分な点を明確にしようとする意志を持っているといえよう．特に第 6 章で無限小量を公理化する場面は，彼の不満の解消を具体的に目指したものであろう．

第 6 章は冒頭で次のような定義が示される．

1. 無限とは，あらゆる指示可能なもの（assignabilis）よりも大きな量である．
2. 他方，無限小量とは，あらゆる指示可能なものよりも小さな量である．そうしたものは無限小（infinitesima）または微分と称される．[37]

以上の定義に，次の補題，命題が続く．

- 補題 1：無限に大きな量は有限量によって増加しない．
- 補題 2：無限に大きな量は有限量によって減少しない．
- 命題 1：有限量は無限小量が加えられても増加しないし，また同じものが取り去られても減少しない．

補題 1 の証明は，帰謬法による．もし補題 1 が成立しないとすると，指示可能なあるいは有限量によって増加する．ゆえに，先の無限量よりも大きいことになる．すると，あらゆる指示可能なものよりも大きいことにならなくなるだろう．これは定義 1 から無限ではない．よって仮定に反する．[38]

また，命題 1 は以下のように証明される（比，等号は我々の記号に修正）．A を有限量とし，a を無限小量とする．今，無限量 M を a にかけて，$Ma = A$ とできる．このときこれを比の形に直し

[36] [Hermann 1700], p. 9.
[37] *Ibid.*, pp. 55f.
[38] 後にヘルマンは 1709 年 3 月 22 日付グランディ宛書簡で，この著作『ニーウェンテイト第 2 考察への返答』にふれている．実際，まだ研究の初心者で，不十分な記述しかできなかったと反省している．特にこの第 6 章の補題に関しては不満だった（「たとえ正しいとはいえ，うまく証明されていない．少なくともそこから第 2 の補題が導かれる最初の方は.」）と考えられる．[Mazzone and Roero 1997], p. 31.

て，$A:a=M:1$ となる．ところが，ユークリッド『原論』第5巻の比例論の方法（'componendo & dividendo'）により，

$$A-a:A=M-1:M \tag{1}$$

となる．このとき補題2から $M-1$ は M に等しい．したがって式1の右辺は $1:1$ と同じ比を持つので，比 $A-a:A$ も $1:1$ に等しい．よって $A-a=A$ である．[39] ライプニッツのように「比べられないくらい」という語を用いずに，無限小量の根源的性質をこの命題で保証してしまおうとしていることが見て取れるだろう．

我々にとってさらに注目すべきは第4章である．ヘルマンはここで，あえてニーウェンテイト流の議論に沿いながら批判を加えている．[40] ニーウェンテイトの著作は，単にライプニッツ流の無限小解析のみならず，同時代の他の数学者（カヴァリエリ，ニュートン）の流儀にまで批判が及ぶ．[41] それに対して，ヘルマンもニュートンの『プリンキピア』第1巻，第1部，補題11の注に言及する．ニュートンがカヴァリエリの方法は生硬で，幾何学的に劣っていると述べていることを紹介し，次のように指摘する．

> [ニュートンの方法が] 最初の比そして究極の比へと洞察を進める限り，ニーウェンテイト流の極大および極小の方法とまさに上述したような点でほとんど同様である，ということはできない．なぜなら，もしそうだとしても，才知に富んだニュートンの労作の大部分はその上に構築されており，(ニーウェンテイト氏が示そうと望んだと考えられるように，彼の原理をニュートン流の代わりに承認したとしても）結論において独自の原理をこわしてしまうので，あらゆる構築物は廃虚（ruina）となってしまうということを甘受しなければならないだろう．[42]

前章で我々が見た通り，ニュートンの基本原理は大陸の数学者たちにとって『プリンキピア』第1巻，第1部，補題11に記されたものでしかない．ヘルマンはヴァリニョンほど，全面的にニュートンに依拠しようとはしていない．ただ，ニーウェンテイトの批判に対する反論を試みているだけである．しかし，ニュートンの議論に一定以上の理解を示し，本質を突いていることは確かである．少なくともニーウェンテイトの方法論よりも上に置いていることは上記の引用からも察せられるだろう．ヘルマンも，ライプニッツ流の無限小解析擁護の立場に立ちながら，決してニュートンの方法論に目をつぶっているのではない．17世紀末に起きた無限小量をめぐる論争は，無限小解析の基礎的な原理に関する議論を強固にしていった．同時期にニュートン，ライプニッツ両派による先取権論争が起きていたにもかかわらず，我々が想像する以上に両者のアイデアが巧みに融合されようとしていたのである．

---

[39] [Hermann 1700], p. 56.

[40] ニーウェンテイトは，彼の1695年の著作『無限解析』で「古典的幾何学の厳密性」を保つための設定を施す．すなわち，無限小量の導入を避け，ユークリッド『原論』第5巻の量の枠組の中で議論を展開しようとする．そうした基礎のもとで，少なくともバロウが『幾何学講義』(1670年刊）で論じた接線問題は再構成できることをニーウェンテイトは示している．より詳細な分析は [林 1999]，210-216頁または [林 2000]，185ff 頁参照．

[41] ニーウェンテイトは自分の方法論がユークリッド『原論』に基準にかなっていることを強調した上で，ニュートンの「消えゆく量の究極の比」を「非常に学識に富んだ方 [ニュートン] が，立場上，比ではない（esse non rationem）と願わくば証明してくださればよかったのに」と述べている．[Nieuwentiijt 1696], p. 33.

[42] [Hermann 1700], pp. 45f.

5.2 ヘルマンの書簡から

ライプニッツとヘルマンとの交信は1704年に始まる．その後，ヘルマンはバーゼルからパドゥア，フランクフルトと活動の場を移したが，両者の書簡のやり取りは続いた．1716年11月2日（ライプニッツは同年11月14日死去）の，ライプニッツのヘルマン宛書簡までゲルハルト版『ライプニッツ数学著作集』には合計78通が所収されている．

両者が書簡を通じて論じ合った内容は多岐にわたる．彼ら自身や（ニュートンを含めた）彼らをとりまく数学者の成果についての論評が大半であるが，中には，ヘルマンが1716年に刊行する著作『運動学，あるいは立体と流体の力と運動に関して』を発刊の前年にライプニッツが批評したものも含まれる．[43] しかし，我々の関心である無限小解析の基礎に関して，両者が論じ合っているものはほとんどない．[44] 元来，ヘルマンの1700年の著作はライプニッツの発想を基本的になぞったものだけに，彼らが違いの考えをぶつけ合う余地はなかったのかもしれない．現有の1次資料からはその程度の推測しかできない．

ライプニッツとの直接の書簡中には，我々の議論を補強するための言説は見出しにくい．そこで，ヘルマンがライプニッツ以外の（特にイタリアの）数学者たちへ表明したもの（その他）を通じて補いとしよう．幸い，マッゾーネとロエロは，未完であったヘルマンのいくつかの書簡を公にした．我々にとって注意に値するのは以下の書簡である．

1. パドゥア大学での講義からの抜粋（1707年11月）．
2. バーネット宛書簡（1709年11月）．
3. ガリアーニ宛書簡（1710年3月11日付）．

1では，17世紀の無限小解析の発展を簡潔に総括している．デカルト流の幾何学に対して，フェルマー，バロウ，ウォリス，スリューズといった人々が無限小を用いた幾何学を開始し，さらにカヴァリエリは不可分量による幾何学を見出していたとする．しかし，以上の誰も「幾何学のあらゆる完璧さへ向けて十分でなかった．[中略] ただライプニッツの無限小の方法のみが，残りのすべてに比して完璧さの頂点を極めたと理解される」と述べている．[45] ヘルマンがイタリアにおけるライプニッツ流数学の普及を目指していたことを思えば当然の言説である．ただし，これまでの我々の理解によれば，これを単純に先取権論争の延長として，数学上の「派閥主義」の表明と受け取るべきではない．

2，3はつながりのある書簡である．すなわち，ヘルマン，バーネット，ガリアーニの3人が互いに書簡を回覧しながら，接線問題，求積問題について論じ合っている．それに関連する形で無限小量の利用が話題にされ，ヘルマンのニーウェンテイトへの反論を綴った著作にも言及がなされている．1709年11月16日付のガリアーニ宛書簡の中で，バーネットは接線問題において無限小

---

[43] ヘルマンの著作は，1715年9月には印刷されていたようで，彼はそれをライプニッツにあらかじめ送って批判を仰いだのである．ライプニッツは通読して，細かに意見を述べている（1715年9月17日付）．[Leibniz GM], S. 398-402.

[44] 例外的にヘルマンが無限小まつわる内容を記しているのは，1712年7月7日付書簡である．そこでヘルマンは，イタリア人数学者グランディの「無限に大きな無限（De Infinitis Infinitorum）」に関する著作へのヴァリニョンの書評に言及する．ヴァリニョンがライプニッツの説，すなわち，「無限または無限小は仮想的なものであるが，それは真理へと導き，また真なるものが生じる」ことを紹介しているのに対し，賛意を表している（「実際極めて正しい（sane verissima)」）．[Leibniz GM], S. 373.

[45] [Mazzone and Roero 1997], pp. 330f.

量の使用を回避できると述べている．図3で，ACcを放物線とし，それぞれ$TB = z$，$AB = x$，

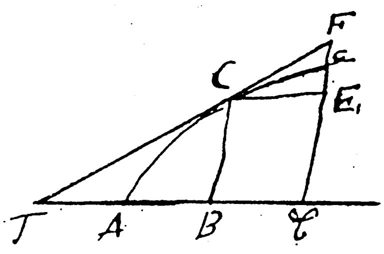

図3: バーネット，ガリアーニ宛書簡

$BC = y$，$Bb = dx$，$cE = dy$とする．このとき彼は，「dxもdyもどうしても無限小と想定はせず，どんな量であろうとも問題ではない」としている．実際，放物線の方程式を$ax = y^2$とすると

$$a \times \overline{x + dx} = \overline{y + dy}^2$$

が成立する．曲線の方程式を利用して整理すると次のようになる．

$$adx = 2ydy + dy^2 \tag{2}$$

となる．また「三角法により」，すなわち相似である三角形における比を用いて，$z : y = dx : FE$が成立する．他方，FEはFがCに一致するとき，$FE = cE = dy$となる．したがって，

$$FE = dy = \frac{ydx}{z}$$

となる．これを式2に代入して，

$$a = \frac{2y^2}{z} + y^2\frac{dx}{z^2}$$

となる．ここで，「C，c，F，E，すべての点が一致する場合」$dx = 0$となる．以上より，

$$z = \frac{2y^2}{a} = 2x$$

となって接線影zが求まる．議論としては，特別独創的といえるものではない．しかし，バーネットは上記の推論によって無限小量の導入を避けるという（ニュートンと共通する）主張を試みているかのようである．バーネットはヘルマンの著作にふれているが，無論，ヘルマンよりもニーウェンテイトへ共感を持っていると見るべきだろう．[46] この推論についてバーネットは以下のように述べる．

[46] *Ibid.*, pp. 453f. バーネットはパドゥアでヘルマンと十日間ともに過ごし，ヘルマンの著作のコピー（筆写）を譲り受けたことを述べている．

> すべての点C，c，F，Eが一致する場合のみしか，この[相似な]三角形は利用できないのです．だからこそニュートンが消えゆく量と名づけるのです．なぜなら，証明したいことはみな，すべての量が0になるという想定のもとでのみ真となるからです．私が微分の正確な幾何学的証明を誤らず，そして通常の考え以外の何ものも要求しなければです．ヘルマン氏は私が彼にそのことを示すと納得したように見えました．[47]

バーネットの言によれば，ヘルマンがニュートン流の説明（「消えゆく量の究極の比」）に一定の理解を示していることの傍証となろう．

以上の内容に関連して，書簡2でヘルマンはバーネットに対して，微分法と古代ギリシアの取り尽くし法との比較を訴える．

> この方法[微分法]は，差が止まることなく減少するようなものを等しい量と見なします．$x+dx=x$とする以上，まさに微分計算の前提または原理に属することです．というのも，dxは決定された量ではなく，決定できるどんな量よりも小さな量だからです．現代人の方法（la methode des Modernes）は根本的に古代人のものと異ならないのです．だから，最初のものを拒むことは同時に後者を捨ててしまうことになるでしょう．反対に，前者の厳密性や確実性を再認識すると後者も受け入れることができるでしょう．[48]

ヘルマンはライプニッツの論法をふまえながら応戦している．

書簡3で，ヘルマンは直接1700年の著作の内容にふれる．その第6章で論じられていた無限小量の公理化にふれ，次のように再度定式化する．

- M：無限量とすると，単位1はMに対して「指示不可能（inassignabilis）」である．このとき，

$$x:dx=M:1 \iff x+dx:x=M+1:M, \Rightarrow x+dx=x$$

  が成立する．

この前提の下に，微分算は古代人たちの方法（「取り尽し法」）と同じ原理にもとづくという主張が繰り返される．[49] ヘルマンはヴァリニョンと比較して，ライプニッツの議論により忠実なことはすでに明らかである．ただし両者に共通する発想もある．それは微分量を固定，または決定された量と見ていないということである．ニュートンの『プリンキピア』に現れる「消えゆく量の究極の比」は運動を前提し，ある種の動的プロセスの中で無限小量を考える．その意味で（ヘルマンにとっても）好都合な論理なのである．つまりヘルマンが十分に理解を示す余地があると我々には見えるのである．

---

[47] *Ibid.*, pp. 454f.
[48] *Ibid.*, pp. 457f.
[49] *Ibid.*, pp. 463-466.

6 結論

ライプニッツが1690年代以降，無限小をめぐって論争を発生したとき，彼は彼の研究の過程の中から引き出された発想を十二分に披露した．それはライプニッツの数学を受容し，発展させようとしていた人々にとって，一定の支えになるものだったに違いない．しかし，虚量とのアナロジー（数学上の有用性の強調）や形而上学的原理の系としての連続律の援用といった発想はどれほど説得力をもっただろうか．ヴァリニョンのように無限小量のア・プリオリな実在を想定するものには，自己の議論により都合の良い，他の論理を利用することも可能だったのであろう．すなわち，ニュートン『プリンキピア』第1巻，第1部，補題11注で展開されたアイデアである．自然学上の問題に積極的に無限小解析を応用しようとするならば，その方がライプニッツに比べて基礎として一層理解が容易だっだかもしれない．

一方ヘルマンは，1700年に発刊されたニーウェンテイトへの反論の書で，無限小の正当化の論理をライプニッツの論により忠実に添いながら展開した．このヘルマンの書は，従来数学史家によって，あまり取り上げることのない著作であった．実際，その評価には少し難しい点がある．確かにヴァリニョンに比べれば，ライプニッツにはっきり言及し，議論をなぞっているところが見受けられる．しかしそれに止まらず，独自性（無限小量の公理化）をライプニッツの議論の延長上に打ち出していることも確かである．そしてヴァリニョン同様，ニュートン『プリンキピア』の論に一定の共鳴を示していると考えられる．以上の我々の考察によれば，ライプニッツ流の数学を受容し，発展させていった人々は18世紀の初頭には予想以上にニュートン，ライプニッツの両者の議論に通じていたことがわかる．またそれを自分自身の議論に「上手に」取り込んで，融合していたことが確認できる．

18世紀初頭から，ライプニッツの最晩年に至るまで，ニュートン，ライプニッツ両派の先取権論争は泥沼の様相を呈していった．しかし，数学史家が両者の対立点にばかり注目するのは，この時代における数学の発展史の記述として十分ではないと考える．今後の課題として，ヴァリニョン，ヘルマン（さらにはヨハン・ベルヌーイも含めて）が自然学上の問題へ無限小解析を応用した成果を分析することを通じて，無限小を正当化する論理がどのように機能しているかを見極めていきたい．さらに，大陸，イギリス双方の研究がオイラーの業績へどのように結びついていくかを探求のテーマとしていきたい．

参考文献（1次文献）

[Bernoulli JHO] *Johannis Bernoulli Opera Omnia tam sparsim edita, quam hactenus inedita*(1742), curavit J. E. Hofmann(Hildesheim: Georg Olms Verlagshandlung, 1968)(rep.).

[Bernoulli BJH] *Der Briefwechsel von Johann* I *Bernoulli*, herausgegeben von Otto Spiess, bearbeitet und kommentiert von Pierre Costabel und Jeanne Peiffer(Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag, 1955-92).

[Hermann 1700] Hermann, Jakob, *Responsio ad Clarißimi Viri Bernh. Nieuwentiit Considerationes secundas circa calculi differentialis principia; editas*(Basileae, 1700).

[Hermann 1716] Hermann, Jakob, *Phoronomia sive de viribus et motibus corporum solidorum et fluidorum libri duo*(Amstelaedami, 1716).

[L'Hospital 1696] L'Hospital, Guillaume- François- Antoine de, *Analyse des infiniment petits sur l'intelligence des lignes courbes*(Paris, 1696).

[Leibniz A] *Gottfried Wilhelm Leibniz Sämtliche Schriften und Briefe*, herausgegeben von Der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin(Berlin: Akademie Verlag, 1923-).

[Leibniz GM] *G. W. Leibniz Mathematische Schriften*, herausgegeben von Carl Immanuel Gerhardt (1849-1863)(Hildesheim, New York: Georg Olms Verlag, 1971) (rep.).

[Leibniz GP] *G. W. Leibniz Die philosophischen Schiriften* herausgegeben von Carl Immanuel Gerhardt (1875-1890)(Hildesheim, Zürich, New York: Georg Olms Verlag, 1996) (rep.).

[Leibniz LB] *Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern*, herausgegeben von Carl Immanuel Gerhardt (1899)(Hildesheim, Zürich, New York: Georg Olms Verlag, 1987) (rep.).

[Leibniz QA] *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis*, kritisch herausgegeben und kommentiert von Eberhard Knobloch(Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1993).

[MacLaurin 1742] MacLaurin, Colin, *A Treatise of Fluxions in Two Books*(Edinburgh, 1742).

[Newton 1687] Newton, Isaac, *Philosophiae naturalis principia mathematica*(3rd ed., 1726), assembled and edited by Alexandre Koyré and I. Bernard Cohen(Cambridge: Harvard University Press, 1972).

[Newton MP] *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, edited by D. T. Whiteside (Cambridge: Cambridge University Press, 1967-81).

[Nieuwentiijt 1695] Nieuwentijt, Bernhard, *Analysis infinitorum seu curvilineorum proprietates ex polygonorum natura deductae*(Amstelaedami, 1695).

[Nieuwentiijt 1696] Nieuwentijt, Bernhard, *Considerationes secundae circa calculi differentialis principia; et responsio ad Virum Nobilissimum G. G. Leibnitium*(Amstelaedami, 1696).

[Reyneau 1700-1701] (Reyneau, Charles- René), "Extrait des Réponses faites par Mr Varignon en 1700 et 1701 aux objections que Mr Rolle avait faites contre le calcul différentiel," in [Bernoulli BJH], Band 3, S. 351-376.

[Varignon 1707] Varignon, Pierre, "Des mouvemens variés à volonté, comparés entr'eux et avec les uniformes," *Mémoires de l'Academie Royale des sciences*, (1707), pp. 222-275.

参考文献（2次文献）

[Andersen 1985] Andersen, Kirsti,"Cavalieri's Method of Indivisibles," *Archive for History of Exact Sciences*, 31(1985), pp. 291-367.

[Blay 1993] Blay, Michel, *Les raisons de l'infini: Du monde clos à l'univers mathématique* (Paris: Gallimard, 1993).

[Bos 1974] Bos, Henk J. M., "Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus, " *Archive for History of Exact Sciences*, 14(1974), pp. 1-90.

[Costabel 1988] Costabel, Pierre, "Leibniz et la notion de 'fiction bien fondée'," in [Heinekamp et al. 1988], pp. 174-180.

[Earman 1975] Earman, John, "Infinities, Infinitesimals, and Indivisibles: The Leibnizian Labyrinth," *SL*, 7(1975), pp. 236-251.

[Grabiner 1981] Grabiner, Judith, *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*(Cambridge: The MIT Press, 1981).

[Grabiner 1997] Grabiner, Judith, "Was Newton's Calculus a Dead End ?: The Continental Influence of Maclaurin's *Treatise of Fluxions*," *The American Mathematical Monthly*, 104(1997), pp. 393-410.

[Guicciardini 1999] Guicciardini, Niccolò, *Reading the Principia: The Debate on Newton's Mathematical Methods for Natural Philosophy from 1687 to 1736*(Cambridge: Cambridge University Press, 1999).

[Heinekamp et al. 1988] Heinekamp et al., *Leibniz Tradition und Akutualität*, V. Internationaler Leibniz- Kongreß Vorträge, Honnover, 14. -19. November 1988.

[Horvath 1982] Horváth, Miklós, "The Problem of Infinitesimal Small Quantities in the Leibnizian Mathematics, " *SL*, Supplementa 22(1982), pp. 149-157.

[Horvath 1986] Horváth, Miklós, "On the Attempts made by Leibniz to Justify his Calculus,"*SL*, 18(1986), S. 60-71.

[Jesseph 1998] Jesseph, Douglas, "Leibniz on the Foundations of the Calculus: The Question of the Reality of Infinitesimal Magnitudes," *Perspectives on Science*, 6(1998), pp. 6-40.

[Jesseph 1999] Jesseph, Douglas, *Squaring the Circle: The War between Hobbes and Wallis* (Chicago: The University of Chicago Press, 1999).

[Kitcher 1973] Kitcher, Philip, "Fluxions, Limits and Infinite Littleness: A Study of Newton's Presentation of the Calculus," *Isis*, 64(1973), pp. 33-49.

[Kitcher 1981] Kitcher, Philip, "Mathematical Rigor: Who Needs it?," *Nôus*, 15(1981), pp. 469-493.

[Knobloch 1990] Knobloch, Eberhard, " L'infini dans les mathématiques de Leibniz, " in [Lamarra 1990], pp. 33-51.

[Knobloch 1999] Knobloch, Eberhard, "Galileo and Leibniz: Different Approaches to Infinity," *Archive for History of Exact Sciences*, 54(1999), pp. 87-99.

[Lamarra 1990] Lamarra, Antonio, *L'infinito in Leibniz: Problemi e terminologia*, a cura di Antonio Lamarra(Roma: Edizioni dell'Ateneo, 1990).

[Malet 1996] Malet, Antoni, *From Indivisibles to Infinitesimals: Studies on Seventeenth-Century Mathematizations of Infinitely Small Quantities*(Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona, 1996).

[Malet 1997] Malet, Antoni, "Barrow, Wallis, and the Remaking of Seventeenth Century Indivisibles," *Centaurus*, 39(1997), pp. 67-92.

[Mancosu 1996] *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*(New York, Oxford: Oxford University Press, 1996).

[Mancosu and Vailati 1990] Mancosu, Paolo and Vailati, Ezio, "Detleff Clüver: An Early Opponent of the Infinitesimal Calculus," *Centaurus*, 33(1990), pp. 325-344.

[Mazzone and Roero 1997] Mazzone, Silvia and Roero, Clara Silvia, *Jacob Hermann and the Diffusion of the Leibnizian Calculus in Italy*(Firenze: Leo S. Olschki, 1997).

[Moll 1982] Moll, Konrad, *Der junge Leibniz II: Der Übergang vom Atomismus zu einem mechanistischen Aristotelismus; Der revidierte Anschluß an Pierre Gassandi*(Stuttgart-Bad Canstaat: frommann-holboog, 1982).

[Peiffer 1988] Peiffer, Jeanne, "La conception de l'infiniment petit chez Pierre Varignon, lecteur de Leibniz et de Newton," in [Heinekamp et al. 1988], pp. 710-717.

[Peiffer 1990] Peiffer, Jeanne, "Pierre Varignon, lecteur de Leibniz et de Newton, " *SL*, Supplementa 27(1990), pp. 244-266.

[Robinet 1991] Robinet, André, *L'empire leibnizien: La conquête de la chaire de mathématiques de L'Université de Padoue*(Trieste: Edizioni Lint, 1991).

[Roero 1989] Roero, Clara Silvia, "The Passage from Descartes' Algebraic Geometry to Leibniz's Infinitesimal Calculus in the Writings of Jakob Bernoulli," *SL*, sonderheft 17(1989), S. 140-150.

[Vermij 1989] Vermij, Rienk H., "Bernard Nieuwentijt and the Leibnizian Calculus, " *SL*, 21(1989), pp. 69-86.

[林 1999] 林　知宏「ライプニッツ数学思想の形成」(東京大学大学院総合文化研究科博士論文，1999年)．

[林 2000] 林　知宏「17，18世紀における無限小をめぐる論争：ライプニッツを中心に」,『数学の思考』(『現代思想』2000年10月増刊号)(青土社) 所収，176-195頁.

[ニュートン 1979] ニュートン，アイザック『自然哲学の数学的諸原理』河辺六男訳(中公バックス世界の名著31)(中央公論社，1979年)．

[ライプニッツ 1997]『ライプニッツ著作集』2『数学論・数学』原亨吉・佐々木力・三浦伸夫・馬場郁・斎藤憲・安藤正人・倉田隆訳(工作舎，1997年)．

[ライプニッツ 1999]『ライプニッツ著作集』3『数学・自然学』原亨吉・横山雅彦・三浦伸夫・馬場郁・倉田隆・西敬尚・長嶋秀男訳(工作舎，1999年)．