数理解析研究所講究録
1197 巻 2001 年 176-188

A Principle of Symmetric Criticality in Banach Spaces*

早大理工 小林純 (Jun KOBAYASHI)

Department of Applied Physics
School of Science and Engineering
Waseda University

1 Introduction

変分問題がある種の対称性を持つとき, 言い換えれば, ある変換群 G の作用の下で不変なとき, 同じ対称性を持つ critical point の存在がしばしば問題になる.

X を Banach 空間で G が線形に作用しているものとし, $J:X\to\mathbb{R}$ を G-不変 (任意の $g\in G$ と $u\in X$ に対して $J(gu)=J(u)$) な C^1 級の汎関数とする. また, Σ を 対称な点 (G の作用の下で不変な点) から成る部分空間, すなわち $\Sigma=\{u\in X\,|\,gu=u\ \forall g\in G\}$ とする. J の対称な critical point を探す場合, J を Σ に制限して critical point を構成するという方法が考えられる. しかし, そのようにして構成された critical point がもとの J の critical point になっているかどうかは明らかではない. 実際, これが成立しない反例が挙げられる (2.1 節を見よ). Palais [6] はより一般的な枠組 (G-manifold setting) でこの問題を考察し, 多くの場合 (例えば上の枠組では G がコンパクトな場合) これが成立することを示した. この事実は Principle of Symmetric Criticality と呼ばれる.

本論の目的は, この原理を変分不等式にも適用できるよう, 汎関数が滑らかではない場合へ拡張することにある.

$\varphi:X\to(-\infty,+\infty]$ を G-不変な下半連続凸関数とする. 我々は次の原理

$$\partial(\varphi|_\Sigma)(u)+(J|_\Sigma)'(u)\ni 0 \Longrightarrow \partial\varphi(u)+J'(u)\ni 0 \tag{1}$$

について考察する. 粗っぽく言えば「Σ に制限された汎関数 $\varphi+J$ の critical point はもとの $\varphi+J$ の critical pont である」ということである.

---

* 本論は早大理工・大谷光春教授との共同研究である.

本論ではまず, 2 章において C^1 級の汎関数に対する“原理”を考察し, 次に 3 章でそれを (1) の形へ拡張する (実際は (1) をより扱いやすい形に書き換えたものを扱う). いずれの章でも G の作用が等距離的である場合と G がコンパクトな場合を考える. これらの条件は, 多くの応用例において両方とも満たされていることに注意されたい.

2 Principle for Smooth Functions

この章は 2.2 節 を除いて Palais [6] の結果である. しかし, 我々の目的である“原理”の拡張に向け, ここではその証明まで紹介する.

X を実 Banach 空間 X^* をその双対空間とする. X, X^* のノルムをそれぞれ $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_*$ で表すことにする. ${}_{X^*}\langle\cdot,\cdot\rangle_X$ で X と X^* の双対性内積を表し, 混乱の恐れが無い場合は単に $\langle\cdot,\cdot\rangle$ と書く.

G を群とし, π を G の X 上の表現とする. すなわち, 任意の $g \in G$ に対し, $\pi(g)$ は X 上の有界線形作用素で

$$\begin{aligned}&\pi(e) = \mathrm{Id}_X,\\ &\pi(g_1 g_2) = \pi(g_1)\pi(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G\end{aligned}$$

を満たすとする (e は G の単位元). G の X^* 上の表現 π_* が次の関係式により自然に定義される:

$$\langle \pi_*(g)f, u\rangle = \langle f, \pi(g^{-1})u\rangle \quad g \in G,\ f \in X^*,\ u \in X.$$

以後, 混乱の恐れが無い場合は簡単のため π や π_* を省略して gu, gf のように書くことにする. X 上の (または X^* 上の) 汎関数 f は

$$f(gu) = f(u) \quad \forall g \in G,\ \forall u \in X(\text{or } X^*)$$

を満たすとき G-不変であるといい, X の (または X^* の) 部分集合 M は

$$gM\Big(= \{gu \mid u \in M\}\Big) \subset M \quad \forall g \in G$$

となるとき G-不変であるという.

$$\Sigma = \{u \in X \mid gu = u \quad \forall g \in G\},$$

$$\Sigma_* = \{f \in X^* \mid gf = f \quad \forall g \in G\}$$

とおく．すなわち，Σ, Σ_* は，それぞれ X, X^* の対称な点から成る部分空間である．従って，$f \in X^*$ が対称である事とそれが G-不変な汎関数である事が同値となる．Σ, Σ_* はそれぞれ X, X^* の G-不変な閉部分空間になっていることを注意しておく．

$J : X \to \mathbb{R}$ を G-不変な C^1 級の汎関数とする．この章では次の原理

$$(\mathrm{P}_0) \qquad (J|_\Sigma)'(u) = 0 \Longrightarrow J'(u) = 0,$$

について考察する．ここで $J|_\Sigma$ は J の Σ への制限，$'$ は Fréchet 微分を意味する．

次の命題は (P_0) の成立に関する 1 つの判定条件を与えている．

PROPOSITION **2.1** ([6, PROPOSITION 4.2]) 原理 (P_0) が成立するのは，次の条件

$$\Sigma_* \cap \Sigma^\perp = \{0\}$$

が満たされるとき，またそのときに限る．ここで

$$\Sigma^\perp = \{f \in X^* \mid \langle f, x\rangle = 0 \quad \forall x \in \Sigma\}.$$

Proof. まず $\Sigma_* \cap \Sigma^\perp = \{0\}$ を仮定し，原理 (P_0) が成立することを証明する．

u_0 を $J|_\Sigma$ の critical point とせよ．$J'(u_0) = 0$ を示さなければならない．J は G-不変であるから

$$\begin{aligned}
\langle J'(gu), v\rangle &= \lim_{t\to 0} \frac{J(gu + tv) - J(gu)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{J(u + tg^{-1}v) - J(u)}{t} \\
&= \langle J'(u), g^{-1}v\rangle \\
&= \langle gJ'(u), v\rangle \qquad \forall g \in G\ \forall u,\ v \in X,
\end{aligned}$$

すなわち

$$J'(gu) = gJ'(u) \quad \forall g \in G,\ \forall u \in X \tag{2}$$

が成立する．特に $u_0 \in \Sigma$ であるから $gJ'(u_0) = J'(u_0)$ が任意の $g \in G$ について成立する．これは $J'(u_0) \in \Sigma_*$ を意味する．

一方

$$_{X^*}\langle J'(u_0), v\rangle_X = {}_{\Sigma^*}\langle (J|_\Sigma)'(u_0), v\rangle_\Sigma = 0 \quad \forall v \in \Sigma$$

が成立する．ここで ${}_{\Sigma^*}\langle\cdot,\cdot\rangle_\Sigma$ は Σ とその双対空間 Σ^* の双対性内積である．これは $J'(u_0) \in \Sigma^\perp$ を意味する．以上により $J'(u_0) = 0$ が示された．

次に $\Sigma_* \cap \Sigma^\perp = \{0\}$ が原理 (P_0) の成立に必要であることを証明する.

零元でない $\Sigma_* \cap \Sigma^\perp$ の元 f が存在すると仮定しよう. $f \in \Sigma_*$ であるから, これは G-不変な C^1 級の汎関数である. 従って J として, この f をとることができる.

任意の $u \in X$ に対して $J'(u) = f$ であるから J にはcritical point がない. しかし $u \in \Sigma$ とすると

$$_{\Sigma^*}\langle (J|_\Sigma)'(u), v\rangle_\Sigma = \langle f, v\rangle = 0 \quad \forall v \in \Sigma$$

であるから, u は $J|_\Sigma$ の critical point である. 以上より, 条件 $\Sigma_* \cap \Sigma^\perp = \{0\}$ が (P_0) の成立に必要であることが示された. □

2.1 A Counter Example

次の例 ([6, 3.2]) は (P_0) が一般には成立しない事を示している.

$X = \mathbb{R}^2$, $G = \mathbb{R}$ とし $\mathbb{R}$ の $\mathbb{R}^2$ への作用を

$$\pi(t)(x, y) = (x + ty, y) \quad t \in \mathbb{R},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

と定義する. Σ は x 軸 $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ と一致し, よって $\Sigma^\perp$ は y 軸 $\{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ となる. また, Σ_* も y 軸と一致することが容易に確かめられる. 従って $\Sigma_* \cap \Sigma^\perp \neq \{(0, 0)\}$ であり, Proposition 2.1 より (P_0) は成立しない.

より具体的には, 関数 $J(x, y) = y$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ を考えると, これは G-不変である. 任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $J'(x, y) = (0, 1)$ であるから J は critical point を持たない. しかし $J|_\Sigma$ は恒等的に 0 であるから, Σ (x 軸) 上のすべての点が $J|_\Sigma$ の critical point となってしまい, (P_0) が成立しないことが確かめられる.

2.2 The Isometric Case

この節では, 次の 2 つを仮定する.

(A.1) X は回帰的で狭義凸.

(A.2) G の X への作用が等距離的, すなわち

$$\|gu\| = \|u\| \quad \forall g \in G,\ \forall u \in X.$$

(A.2) より G の X^* への作用も等距離的になる.

F を X から X^* への duality map とする. (A.1) により F^{-1} は X^* から X への duality map で, しかも 1 価写像となる. さらに (A.2) により $F^{-1}(\Sigma_*) \subset \Sigma$ となる.

実際, $f \in \Sigma_*$ ならば, 任意の $g \in G$ に対し次が成立する:

$$\|gF^{-1}(f)\| = \|F^{-1}(f)\| = \|f\|_*.$$

$$\langle f, gF^{-1}(f)\rangle = \langle f, F^{-1}(f)\rangle = \|f\|_*^2.$$

従って, $gF^{-1}(f) = F^{-1}(f)$ であり, これは $F^{-1}(f) \in \Sigma$ を意味する.

REMARK (2) を用いて $F^{-1}(\Sigma_*) \subset \Sigma$ を示すこともできる.

$J(f) = 1/2\|f\|_*^2$ ($f \in X^*$) とおくと, これは Gâteaux 微分可能で, f における Gâteaux 微分 $\delta J(f)$ は $F^{-1}(f)$ と一致する (Barbu [8, Chapter 1] を見よ). J は X^* 上の G-不変な汎関数であるから (2) より

$$F^{-1}(gf) = gF^{-1}(f) \quad \forall g \in G$$

が成立する ((2) の証明に用いたのは J の Gâteaux 微分可能性であって, Fréchet 微分可能性は用いていないことに注意). よって, $f \in \Sigma_*$ ならば $F^{-1}(f) \in \Sigma$ となる.

THEOREM **2.2** 仮定 (A.1), (A.2) の下で原理 (P_0) は成立する.

Proof. PROPOSITION 2.1 により $\Sigma_* \cap \Sigma^\perp = \{0\}$ が成立することを示せばよい.

$f \in \Sigma_* \cap \Sigma^\perp$ とせよ. $f \in \Sigma_*$ より $F^{-1}(f) \in \Sigma$. これと $f \in \Sigma^\perp$ により, $\|f\|_*^2 = \langle f, F^{-1}(f)\rangle = 0$, すなわち $f = 0$ を得る. □

2.3 The Compact Case

この節では, 次を仮定する.

(A.3) G はコンパクトな位相群で, π は連続表現, すなわち $G \times X$ から X への写像 $(g, u) \mapsto gu$ が連続.

(A.3) より G 上の正規化された Harr 測度 μ が一意的に存在する. 任意の $u \in X$ に対し, 一意に $Au \in X$ が存在し

$$\langle f, Au\rangle = \int_G \langle f, gu\rangle d\mu(g) \tag{3}$$

を満たす.

$$Au := \int_G gud\mu(g)$$

と書く. 作用素 A は次の性質を持つ.

- A は 線形かつ連続で, X から Σ への射影となっている.
- C を X の G-不変な閉凸集合とすると $A(C) \subset C$ が成り立つ.

(3) を満たす Au の存在, 及びこれらの性質については Vanderebauwhede [1, Section 2.5] または Rudin [9, Chapter 3] を参照されたい.

THEOREM **2.3** ([6, THEOREM 5.1]) 仮定 (A.3) の下で原理 (P_0) は成立する.

Proof. $\Sigma_* \cap \Sigma^{\perp} = \{0\}$ を背理法によって示す.

$f \in \Sigma_* \cap \Sigma^{\perp}$ とする. $f \neq 0$ と仮定しよう. $f \in \Sigma_*$ であるから, 超平面 $H = \{u \,|\, \langle f, u\rangle = 1\}$ は X の G-不変な閉凸集合となる. $u \in H$ とせよ ($f \neq 0$ より $H \neq \emptyset$). 上記のことから $Au \in H \cap \Sigma$ となる. $Au \in \Sigma$, $f \in \Sigma^{\perp}$ より $\langle f, Au\rangle = 0$ となるが, これは $Au \in H$ に矛盾する. □

3 Principle for Subdifferentials

φ を X から $(-\infty, +\infty]$ への, 適正 ($\varphi \not\equiv +\infty$) 下半連続凸関数とする. $u \in X$ における φ の劣微分 $\partial\varphi(u)$ が

$$\partial\varphi(u) = \{f \in X^* |\ \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle f, v-u\rangle \quad \forall v \in X\}$$

により定義される. $\partial\varphi$ は X から X^* への極大単調作用素である.

さて, さらに φ が G-不変であると仮定し, 2 章と同様 J を G-不変な C^1 級の汎関数とする. 1 章で述べたように, この章では (P_0) を変分不等式へ応用できる形へ拡張する.

(1) の条件 $\partial(\varphi|_\Sigma)(u)+(J|_\Sigma)'(u)\ni 0$ は Σ の双対空間 Σ^* におけるものなので扱いにくい. まず, これを書き換えよう. この条件は

$$u\in D(\varphi|_\Sigma) \quad \text{and} \quad \varphi|_\Sigma(v)-\varphi|_\Sigma(u)\geq {}_{\Sigma^*}\langle -(J|_\Sigma)'(u), v-u\rangle_\Sigma \quad \forall v\in\Sigma$$

ということであり,

$$u\in \Sigma\cap D(\varphi) \quad \text{and} \quad \varphi(v)-\varphi(u)\geq {}_{X^*}\langle -J'(u), v-u\rangle_X \quad \forall v\in\Sigma$$

と同値である. これは Σ の 指示関数 I_Σ を用いて $\partial(\varphi+I_\Sigma)(u)+J'(u)\ni 0$ と書ける (これは X^* における条件である).

以上により (1) は次の形に書き換えられた:

$$(\mathrm{P}_1) \quad \partial(\varphi+I_\Sigma)(u)+J'(u)\ni 0 \Longrightarrow \partial\varphi(u)+J'(u)\ni 0.$$

以下, この原理 (P_1) について考察する.

Fréchet 微分と同様に, G-不変な凸関数の劣微分についても次が成立する:

$$\partial\varphi(gu)=g\partial\varphi(u) \quad \forall g\in G,\ \forall u\in X. \tag{4}$$

まず $\partial\varphi(gu)\subset g\partial\varphi(u)$ を示そう. $f\in\partial\varphi(gu)$ とすると

$$\begin{aligned}\varphi(v)-\varphi(u) &= \varphi(gv)-\varphi(gu)\\ &\geq \langle f, gv-gu\rangle\\ &= \langle g^{-1}f, v-u\rangle \qquad \forall v\in X\end{aligned}$$

となる. これは $g^{-1}f\in\partial\varphi(u)$ を意味し, 従って $f\in g\partial\varphi(u)$.

逆向きの包含関係については, 上で $g\in G$, $u\in X$ は任意だったので

$$g\partial\varphi(u)=g\partial\varphi(g^{-1}gu)\subset gg^{-1}\partial\varphi(gu)=\partial\varphi(gu).$$

従って (4) は示された.

Remark (4) により, $u\in\Sigma$ ならば $\partial\varphi(u)$ は X^* の G-不変な $*$ 弱閉凸集合である事がわかる. 特に $\partial\varphi$ が 1 価ならば $\partial\varphi(u)\in\Sigma_*$ となる. しかし, 一般には $\partial\varphi(u)$ の各元が対称であるとは限らない. これは Fréchet 微分の場合の (2) と異なり, 原理 (P_1) の成立を示すときの困難な点となる.

Proposition 2.1 により, 原理 (P_1) の成立に関しても $\Sigma_*\cap\Sigma^\perp=\{0\}$ は必要である. さらに, 上で述べた点を克服するため, 次の性質 (α) を満たす X^* から Σ_* への射影 P を考える:

(α) C を G-不変な $*$ 弱閉凸集合とすると $P(C) \subset C$ が成り立つ.

PROPOSITION **3.1** $\Sigma_* \cap \Sigma^\perp = \{0\}$ とし, 条件 (α) を満たす X^* から Σ_* への線形な射影 P が存在するとする. さらに $\partial(\varphi + I_\Sigma) = \partial\varphi + \partial I_\Sigma$, すなわち $\partial\varphi + \partial I_\Sigma$ が極大単調であれば, 原理 (P_1) は成立する.

Proof.

$$\partial\varphi(u) + \partial I_\Sigma(u) + J'(u) \ni 0 \tag{5}$$

を仮定して $\partial\varphi(u) + J'(u) \ni 0$ を示せばよい.

(5) より $u \in \Sigma$ であり, また $f \in \partial\varphi(u)$ と $h \in \partial I_\Sigma(u)$ が存在して $f+h+J'(u) = 0$ を満たす. この式に P を作用させて $Pf+Ph+PJ'(u) = 0$ を得る. $u \in \Sigma$ であるから $PJ'(u) = J'(u)$. また, 条件 (α) より $Pf \in \partial\varphi(u)$. よって, あとは $Ph = 0$ を示せば十分である.

∂I_Σ の値域は $\Sigma^\perp$ と一致するので, $h \in \Sigma^\perp$ である. $\Sigma^\perp$ は X^* の G-不変な閉部分空間, よって $*$ 弱閉凸集合であるから (α) により, $Ph \in \Sigma^\perp$ となる. もちろん $Ph \in \Sigma_*$ であるから, 仮定 $\Sigma_* \cap \Sigma^\perp = \{0\}$ により $Ph = 0$ を得る.

以上で $\partial\varphi(u) + J'(u) \ni 0$ が示された. □

3.1 The Isometric Case

この節では 2.1 節と同様に次の (A.1$'$) と (A.2) を仮定する.

(A.1$'$) X と X^* は回帰的でともに狭義凸.

(A.1$'$) により duality map F は X から X^* への全単射となる. また, 2.1 節と同じ議論により

$$F(gu) = gF(u) \quad \forall g \in G,\ \forall u \in X \tag{6}$$

従って $F(\Sigma) = \Sigma_*$ を得る.

THEOREM **3.2** 仮定 (A.1$'$), (A.2) の下で原理 (P_1) は成立する.

Proof. THEOREM 2.2 (の証明) により $\Sigma_* \cap \Sigma^\perp = \{0\}$ は成立する. そこでまず, 条件 (α) を満たす射影 $P : X \to X^*$ の存在, 次に $\partial\varphi + \partial I_\Sigma$ の極大性を示す.

LEMMA **3.3** $\Sigma^\perp$ は Σ_* の位相的補空間である. すなわち

$$X^* = \Sigma_* \oplus \Sigma^\perp.$$

Proof of LEMMA 3.3. $f_0 \in X^*$ とせよ. Σ_*, $\Sigma^\perp$ は閉で $\Sigma_* \cap \Sigma^\perp = \{0\}$ であるから, f_0 が Σ_* と $\Sigma^\perp$ の元の和として表される事を示せばよい.

まず, 次式で定義される関数 $\rho : X^* \to \mathbb{R}$ を考える:

$$\rho(h) := \frac{1}{2}\|h - f_0\|_*^2.$$

X^* は回帰的で狭義凸なので, $\rho|_{\Sigma^\perp}$ の minimizer h_0 が一意に存在する (h_0 は $\Sigma^\perp$ における f_0 からの nearest point である). ρ は Gâteaux 微分可能で $\delta\rho(h_0) = F^{-1}(h_0 - f_0)$ となる (Barbu [8, Chapter 1] を見よ). 従って

$$\langle h - h_0, F^{-1}(h_0 - f_0)\rangle \geq 0 \quad \forall h \in \Sigma^\perp$$

を得る. Σ は部分空間であるから, これは

$$\langle h, F^{-1}(h_0 - f_0)\rangle = 0 \quad \forall h \in \Sigma^\perp$$

を意味する. Brezis [3, PROPOSITION II.12] により $F^{-1}(h_0 - f_0) \in \Sigma$, 従って $h_0 - f_0 \in \Sigma_*$ を得る. 以上より f_0 は次のように分解されたことになる:

$$f_0 = (f_0 - h_0) + h_0, \quad f_0 - h_0 \in \Sigma_*, \ h_0 \in \Sigma^\perp.$$

よって LEMMA 3.3 は示された. □

LEMMA 3.3 により, 連続な射影

$$P : X^* \to \Sigma_*, \quad Q : X^* \to \Sigma^\perp$$

が存在する (実際 Q は上の証明において $f_0 \mapsto h_0$ で定義される作用素であり, $P = \mathrm{Id}_{X^*} - Q$).

LEMMA **3.4** 上記の射影 P は条件 (α) を満たす.

Proof of LEMMA 3.4. C を X^* の G-不変な閉凸集合とする (X は回帰的であるから, これは $*$ 弱閉凸集合). $f_0 \in C$ とせよ. LEMMA 3.3 により, f_0 は次のように分解される:

$$f_0 = l_0 + h_0, \quad l_0 = Pf_0 \in \Sigma_*, \ h_0 = Qf_0 \in \Sigma^\perp.$$

$l_0 \in C$ を示さねばならない.

背理法で示す. $l_0 \notin C$ とせよ. (A.1′) により, 閉凸集合 $C \cap (l_0 + \Sigma^\perp)$ における l_0 からの nearest point f_1 が存在する. f_1 を次のように分解しよう:

$$f_1 = l_0 + h_1, \quad h_1 \in \Sigma^\perp.$$

$l_0 \notin C$ であるから $h_1 \neq 0$, よって $h_1 \notin \Sigma_*$ である ($\Sigma_* \cap \Sigma^\perp = \{0\}$ に注意). 従って $gh_1 \neq h_1$ を満たす $g \in G$ が存在する. そのような g に対し

$$h_2 = \frac{1}{2}(h_1 + gh_1)$$

とおく. $\|gh_1\|_* = \|h_1\|_*$ で X^* は狭義凸であるから $\|h_2\|_* < \|h_1\|_*$ を得る.

$$f_2 = l_0 + h_2$$

とおこう.

$$f_2 = \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}gf_1.$$

と書けるので $f_2 \in C$ であるが, これは f_1 の定義に矛盾する. □

Lemma **3.5** $\partial\varphi + \partial I_\Sigma$ は極大単調である.

Proof of Lemma 3.5. まず次の事実を挙げておく.

$A : X \to X^*$ を極大単調作用素, $\psi : X \to (-\infty, +\infty]$ を適正下半連続凸関数とする.

$$\psi(J_\lambda^A u) \leq \psi(u) + M\lambda \quad \forall u \in D(\psi),\ \forall \lambda > 0$$

が満たされるなら $A + \partial\psi$ も極大単調である. ここで J_λ^A は A のレゾルベント, M は λ と u に依らない定数である. これは X が Hilbert 空間のときにはよく知られた事実である ([4, Theorem 9]). 条件 (A.1′) を満たす Banach 空間の場合にも, 同様の方法で示すことができる ([4, Theorem 8] ではなく [5, Theorem 2.1] を使う).

上記の事実を $A = \partial\varphi$, $\psi = I_\Sigma$ として適用しよう. $\lambda > 0$ を固定し, J_λ を $\partial\varphi$ のレゾルベントとせよ. 従って $J_\lambda(\Sigma) \subset \Sigma$ を示せばよいことになる.

J_λ の定義より

$$F(J_\lambda u - u) + \lambda\partial\varphi(J_\lambda u) \ni 0 \quad \forall u \in X.$$

これに $g \in G$ を作用させると, (6) 及び PROPOSITION 4 により次を得る.

$$F(gJ_\lambda u - gu) + \lambda\partial\varphi(gJ_\lambda u) \ni 0 \quad \forall g \in G, \forall u \in X.$$

よって, 再び J_λ の定義により

$$J_\lambda(gu) = gJ_\lambda u \quad \forall g \in G, \forall u \in X$$

を得る. 特に $u \in \Sigma$ ならば, 任意の $g \in G$ に対し $J_\lambda u = gJ_\lambda u$, すなわち $J_\lambda u \in \Sigma$ である.

以上で LEMMA 3.5 は (従って THEOREM 3.2 は) 証明された. □

3.2 The Compact Case

この節では 2.3 節同様 (A.3) を仮定する.

PROPOSITION 3.1 の P として A の随伴作用素 A^* をとることができる. すなわち:

LEMMA **3.6** A^* は X^* から Σ_* への射影である. また C を X^* の G-不変な $*$ 弱閉凸集合とすると $A^*(C) \subset C$.

Proof. まず, $f \in X^*$ ならば $A^*f \in \Sigma_*$ となることを示す.

Harr 測度の左不変性 ([9, THEOREM 5.14]) 及び定義式 (3) により

$$Agu = Au \quad \forall g \in G, \forall u \in X.$$

従って

$$\begin{aligned} \langle gA^*f, u\rangle &= \langle f, Ag^{-1}u\rangle \\ &= \langle f, Au\rangle \\ &= \langle A^*f, u\rangle \quad \forall g \in G, \forall u \in X. \end{aligned}$$

すなわち $A^*f \in \Sigma_*$ である.

次に $A^*(C) \subset C$ を背理法で示す.

$f \in C$ で $A^*f \notin C$ なるものが存在したとせよ. $\sigma(X^*, X)$ を備えた X^* で Hahn-Banach の定理を適用することにより, $u \in X$ と $c \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\langle A^*f, u\rangle < c < \langle h, u\rangle \quad \forall h \in C$$

となることが分かる. 任意の $g \in G$ に対して $g^{-1}f \in C$ となるから

$$\langle f, Au \rangle < c < \langle f, gu \rangle \quad \forall g \in G$$

これは (3) に矛盾する. □

THEOREM 2.3 (の証明) により $\Sigma_* \cap \Sigma^\perp = \{0\}$ は成立する. 従って, 次が示された:

THEOREM **3.7** (A.3) を仮定する. $\partial\varphi + \partial I_\Sigma$ が極大単調ならば (P_1) は成立する.

REMARK 応用において, 2 つの単調作用素の和の極大性を示すことは, 必ずしも簡単ではない. 残念ながら THEOREM 3.2 と違い, $\partial\varphi + \partial I_\Sigma$ の極大性をこの抽象的な枠組で証明することは難しいように思われる.

Acknowledgment 本稿の作成にあたり, 岐阜大学の浅川秀一氏には数々の助言を頂いた. 特に, 非回帰的な場合の記述の不備についての御指摘には感謝申し上げたい.

References

[1] A. VANDERBAUWHEDE *Local bifurcation and symmetry*, Pitman Advanced Publishing Program, Boston, 1982.

[2] J. KOBAYASHI AND M. ÔTANI, *The principle of symmetric criticality for subdifferentials*, preprint.

[3] H. BRÉZIS. *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983.

[4] H. BRÉZIS. *Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations*, Contributions to Nonlinear Functional Analysis, Academic Press (1971), 101-156

[5] H. BRÉZIS. M. CRANDALL, AND A. PAZY, *Perturbations of nonlinear maximal monotone sets in Banach spaces*, Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 123-144.

[6] R. S. PALAIS, *The principle of symmetric criticality*, Commun. Math. Phys. **69** (1979), 19-30.

[7] T. SUZUKI AND K. NAGASAKI, *Lifting of local subdifferentiations and elliptic boundary value problems on symmetric domains*, Proc. Japan Acad., **64**, Ser. A, (1988), 1-7.

[8] V. BARBU, *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Noordhoff, Leyden, 1976.

[9] W. RUDIN, *Functional analysis*, Tata McGraw-Hill, New Delhi, 1973.