

## 双安定型方程式の定常問題に現れる 密集した遷移層とスパイク

早稲田大学理工学部 中島主恵 (Kimie Nakashima)  
Department of Mathematical Science  
Waseda University

### 1 序

本稿では次のような双安定型反応拡散方程式の定常問題について考える。

$$\begin{cases} \varepsilon u_t = \varepsilon u_{xx} + \frac{1}{\varepsilon} W_u(x, u), & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, & t \in (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (1.1)$$

$W$  は  $x$  をとめるごとに  $u$  に関して双安定な (W字型の) ポテンシャルで、2点  $u = \alpha^-(x)$ ,  $u = \alpha^+(x)$  において極小値をとるとする。ここで  $\varepsilon$  は微小パラメータである。

この種の方程式は、物理学における相転移現象などを表すモデルとして知られており、また、数理生態学や集団遺伝学などにもしばしば登場する。しかしこれまでの研究の多くは空間的に一様な場合に限られており、(1.1) のような空間的非一様な場合はあまり扱われてこなかった。

さて、パラメータ  $\varepsilon > 0$  が十分小さいとき、遷移層 (すなわち解の値が  $\alpha^-(x)$  から  $\alpha^+(x)$  まで急激に値を変える部分) をもつ解が現れることはよく知られている。遷移層は、物理的には、異なる相と相との境界部分を表している。本稿では、このような遷移層をもつ解、特に一箇所に折り重なって現れる多重遷移層をもつ解の存在や安定性を論じる。さらに  $W$  がある条件をみたす場合にはスパイク—尖突起—をもつ解が現れる。スパイクも遷移層と同様、一箇所に複数のスパイクが密集した状態で現れることがある。このような解についても考察する。

## 2 状況設定

はじめに2つの井戸の深さが不均衡で、どちらが深いかが場所によって変化する場合を考える。そのため、以下の条件をおく。

**条件 (A).** 適当な点  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$  にたいし

$$\begin{aligned} W(x, \alpha^-(x)) < W(x, \alpha^+(x)) & \quad \text{in } I_0 := (x_0, x_1) \cup (x_2, x_3) \cup \dots, \\ W(x, \alpha^-(x)) > W(x, \alpha^+(x)) & \quad \text{in } I_1 := (x_1, x_2) \cup (x_3, x_4) \cup \dots \end{aligned}$$

特別な場合として、1987年に Angenent, Mallet-Paret, Peletier [3] が扱った次の方程式がある。

$$\begin{cases} \varepsilon u'' + \frac{1}{\varepsilon}(1-u^2)(u-a(x)) = 0 & (0 < x < 1), \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases} \quad (AMP)$$

この場合、 $W$  に関する条件 (A) は  $a(x)$  に関する次の条件と同値である。

$$\begin{aligned} 0 < a(x) < 1 & \quad \text{in } I_0, \\ -1 < a(x) < 0 & \quad \text{in } I_1. \end{aligned}$$

さて、方程式 (1.1) の定常解は、次の汎関数の臨界点として特徴づけられる。

$$E(u) = \int_0^1 \left( \frac{\varepsilon}{2}(u')^2 + \frac{1}{\varepsilon}W(x, u) \right) dx.$$

この汎関数は、物理的には全自由エネルギーを表している。このエネルギーの形からすぐわかるように、もっとも安定性の強いエネルギー最小解  $U_\varepsilon$  は、 $\varepsilon$  が十分小さいとき、 $I_0$  上で  $\alpha^-(x)$  に非常に近い値をとり、一方  $I_1$  上では  $\alpha^+(x)$  に非常に近い値をとり、そして  $I_0$  と  $I_1$  の境界の近くでは遷移層を形成する。

Angenent, Mallet-Paret, Peletier とも [3] において (AMP) を考え、このようなエネルギー最小解をはじめとして、エネルギー極小解を多数構成している。さらにそれらの解の線形化安定性を論じている。

さて本稿では2つの問題を考えるが、はじめに Equal-well-depth とよばれる次のような状況設定を考える。

**問題 1.** 井戸の深さが不均衡なケースにおいては、2つの井戸の深さがちょうど同じである場所に遷移層が現れた。それでは、 $(0, 1)$  上すべての点において2つの井戸の高さが釣り合っている場合、すなわち

$$(EWD) \quad W(x, \alpha^-(x)) = W(x, \alpha^+(x)) \quad \text{for every } x \in (0, 1),$$

がみたされている場合には如何なる解があらわれるのか。

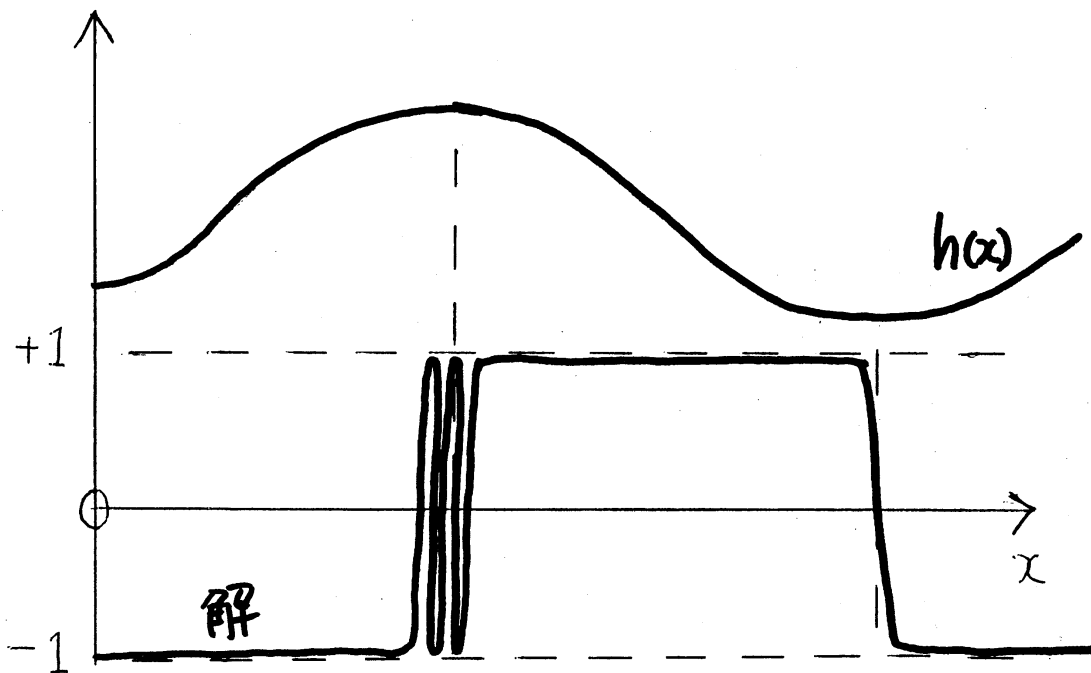
次章ではとくに条件 (EWD) をみたすものとして最も典型的である次の方程式を扱う。

$$\begin{cases} \varepsilon u'' + \frac{1}{\varepsilon} h(x)^2 u(1-u^2) = 0 & \text{in } (0, 1), \\ u'(0) = u'(1) = 0, \end{cases} \quad (AL)$$

(AL) に関し次のような結果が得られた。

- (1) (AL) の解がもつ遷移層は  $h(x)$  の極点の近傍にのみ現れる。
- (2)  $h(x)$  の極大点の近傍には複数の遷移層が一箇所に多数折り重なって現れうるが、 $h(x)$  の極小点の近傍には高々1つの遷移層しか現れない。
- (3) 遷移層をもつ解はすべて非退化であり、次の関係式が成り立つ。

解のモース指数 =  $h(x)$  の極大点の近傍に現れる遷移層の総数。



当初の予想では条件 (A) よりもわかりにくいと思われた条件 (EWD)のもと、(1.1) の解集合は、上記のような豊かな解構造をもつことが明らかになった。

そこで以下4章ではさらに次のような問題を考える.

**問題 2.** Angenent, Mallet-Paret, Peletier らは (AMP) の安定解を多数構成した. これらの安定解のほかに不安定解が存在するのか. 存在するとすれば, それらの不安定解はどのようなプロファイルをもつのか. 解のもつ遷移層と解の不安定性 (モース指数) の関係はどのようなものか.

### 3 Equal-well depth 条件

はじめに (AL) に対応する反応拡散方程式

$$\begin{cases} \varepsilon u_t = \varepsilon u_{xx} + \frac{1}{\varepsilon} h(x)^2 u(1-u^2) & (0 < x < 1, t > 0) \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0 & (t > 0) \\ u(x, 0) = u_0(x) & (0 < x < 1). \end{cases} \quad (3.1)$$

に関する既存の結果を述べる.

(3.1) については Ei, Iida, Yanagida [4] が空間多次元の場合を扱っており, 解が形成する界面の挙動を論じている. また Norbury, Yeh [9] は定常問題 (AL) の形式的漸近解析と数値実験により定常解の存在に関する結果を得ている. また do Nascimento [8] は空間多次元の場合の安定定常解についての結果を得ている.

以上の結果においては, 遷移層が単独に現れる場合が扱われてきた. しかし遷移層は単独で現れるのみでなく, 複数の遷移層が折り重なって現れる場合がある. 以下では複数個折り重なった遷移層をさまざまな箇所にもつ定常解の存在, 形状, 安定性などについて調べる.

はじめに (AL) の  $n$ -モード解を定義し, その基本的な性質を紹介する.

**定義 3.1**  $u$  が  $(0, 1)$  上  $n$  個の零点をもつ (3.1) の解であるとき  $u$  を  $n$ -モード解であるという.

分岐理論により次の補題がえられる.

**命題 3.2** 任意の  $n \in \mathbf{N}$  にたいし,  $\varepsilon_n > 0$  が存在して  $0 < \varepsilon < \varepsilon_n$  にたいし, (AL) は少なくとも2つの  $n$ -モード解をもつ.

本章では  $n \in \mathbf{N}$  を任意に固定し,  $\varepsilon$  を十分小さくしたときの任意の  $n$ -モード解を  $u_\varepsilon$  と記すことにする.

**命題 3.3** (遷移層の形)  $x_\varepsilon$  を  $\frac{d}{dx}u_\varepsilon(x_\varepsilon) > 0$  をみたす  $u_\varepsilon$  の零点であると  
 する.  $v_\varepsilon(z) = u_\varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{h(x_\varepsilon)}z + x_\varepsilon\right)$  と定義すると  $v_\varepsilon(z)$  は次の  $\phi(z)$  に  $\mathbf{R}$  上  
 広義一様収束する. ここで  $\phi(z)$  は

$$\begin{cases} \phi'' + \phi(1 - \phi^2) = 0 & (-\infty < z < \infty), \\ \phi(-\infty) = -1, \quad \phi(\infty) = 1, \\ \phi(0) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

の一意解である.

すなわち,  $u_\varepsilon$  の零点の近傍にあらわれる遷移層は,  $\phi$  を水平方向に  
 $\varepsilon/h(x_\varepsilon)$  倍したものに非常に近いかたちをしている.

次の補題は  $S_\varepsilon = \{x \in (0, 1); u_\varepsilon(x) = 0\}$  から離れた場所において  $u_\varepsilon$   
 が 1 あるいは  $-1$  に非常に近い値をとることを主張している.

**命題 3.4** ある定数  $0 < C_1 < C_2$  と  $0 < K_2 < K_1$  が存在して十分小さい  
 $\varepsilon > 0$  にたいし次の不等式のうちどちらかが成り立つ.

$$C_1 \exp\left(-\frac{K_1 d(x)}{\varepsilon}\right) \leq u_\varepsilon(x) + 1 \leq C_2 \exp\left(-\frac{K_2 d(x)}{\varepsilon}\right) \quad (3.3)$$

$$C_1 \exp\left(-\frac{K_1 d(x)}{\varepsilon}\right) \leq 1 - u_\varepsilon(x) \leq C_2 \exp\left(-\frac{K_2 d(x)}{\varepsilon}\right) \quad (3.4)$$

ここで  $d(x) = \text{dist}(x, S_\varepsilon)$ .

### 3.1 遷移層はどこにあらわれるか

$\mathcal{M}$  を  $h(x)$  の極点の集合とする.

$$\mathcal{M} = \{x \in (0, 1); h'(x) = 0\}.$$

$\mathcal{M}$  は次をみたすとする.

(M1)  $\mathcal{M}$  は有限集合;

(M2) すべての  $x \in \mathcal{M}$  にたいし  $h''(x) \neq 0$ .

以下では  $n \in \mathbf{N}$  を任意に固定し,  $\varepsilon$  を微小としたときの  $n$ -モード解  
 の形状について論じる.

命題 3.3 と命題 3.4 により,  $u_\varepsilon$  の遷移層と  $u_\varepsilon$  の零点とは対応している  
 ことがいえる. 以下の定理は遷移層の現れる位置について述べている.

**定理 1** (遷移層の位置)  $(M1)$ ,  $(M2)$  を仮定する. 定数  $C_0 > 0$  が存在して十分小さい  $\varepsilon > 0$  にたいし  $u_\varepsilon$  の任意の零点は  $M \cup \{0, 1\}$  の  $C_0\varepsilon|\log \varepsilon|$  近傍に現れる.

上記の定理より遷移層は  $h(x)$  の極点の近傍あるいは境界の近傍においてのみ現れる. 以下の定理では遷移層の多重度について考えるが「遷移層の個数」と言った場合,  $u_\varepsilon(x)$  のグラフの中でほぼ  $-1$  の値とほぼ  $1$  の値を結ぶ単調な部分をそれぞれ  $1$  個の遷移層とみなして数え上げたものをさす.

**定理 2** (遷移層の多重度)  $(M1)$  と  $(M2)$  を仮定する. 十分小さい  $\varepsilon > 0$  にたいし,  $u_\varepsilon$  は  $h(x)$  の各極小点の近傍に高々  $1$  つしか遷移層をもちえない.

上記の定理よりつぎのことがいえる.  $n$  が  $h(x)$  の極点の総数よりも大きければ, 複数の折り重なった遷移層が  $h(x)$  のある極大点の近傍に必ず現れる. また 定理 2 の証明と同様の議論により次の系がえられる.

**系 3.5** 境界点  $x = 0$  が  $h(x)$  の極小点ならば, 十分小さい  $\varepsilon > 0$  にたいし,  $x = 0$  に解の遷移層は現れえない. 同様のことが  $x = 1$  についてもいえる.

### 3.2. 遷移層をもつ解の安定性

本節では次を仮定する.

$$(H1) \quad h'(0) = h'(1) = 0.$$

次の定理において, 解の安定性は遷移層の位置と個数の情報から完全に決定される.

**定理 3**  $u_\varepsilon$  を十分小さい  $\varepsilon > 0$  にたいする  $(AL)$  の  $n$ -モード解であるとし,  $u_\varepsilon$  の遷移層のうち,  $h(x)$  の極大点の近傍に現れる遷移層の総数を  $m$  とする.  $u_\varepsilon$  は非退化であり,  $u_\varepsilon$  のモース指数は  $m$  である.

**系 3.6**  $u_\varepsilon$  を十分小さい  $\varepsilon > 0$  にたいする  $(AL)$  の  $n$ -モード解であるとする.  $u_\varepsilon$  の遷移層が,  $h(x)$  の極小点の近傍にのみ現れるならば  $u_\varepsilon$  は安定である.

ここで  $u$  のモース指数は次のように定められる:

$$Lw = \varepsilon^2 w_{xx} + h(x)^2(1 - 3u^2)w, \quad (3.5)$$

とおき, 次の固有値問題を考える.

$$\begin{cases} Lw = -\lambda w & \text{in } (0, 1), \\ u_y(0) = u_y(1) = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

**定義 3.7** (3.6) は 0 固有値をもたず, ちょうど  $m$  個の負の固有値をもち, 他の固有値はすべて正であるとき,  $u$  のモース指数は  $m$  であるという.

### 3.3. 遷移層をもつ解の存在

本節では定理 1, 定理 2 より期待できるプロファイルをもつ解がすべて存在することを示す. すなわち  $h(x)$  の極大点には任意の数,  $h(x)$  の極小点には 0 または 1 を遷移層の数として指定し,  $\varepsilon$  を十分小さくすれば, 指定したプロファイルをもつ解が実際に存在することを示す.

$\mathcal{M}_0 = \{x_i\}_{i=1}^k$  を  $\mathcal{M}$  の任意の部分集合とする.

$$I^+ = \{i \in \{1, 2, \dots, k\}; x_i \text{ is a local maximum point of } h \},$$

$$I^- = \{i \in \{1, 2, \dots, k\}; x_i \text{ is a local minimum point of } h \},$$

とおき, 以下のような正の整数列を遷移層の数としてあたえる.

$$\mathcal{P} = \{(p_i)_{i=1}^k \in (\mathbf{N})^k; \begin{array}{l} p_i = 1 \text{ if } i \in I^- \text{ and} \\ p_i \text{ is a positive integer if } i \in I^+ \end{array}\}.$$

このとき次が成立する.

**定理 4** 任意の  $(p_i)_{i=1}^k \in \mathcal{P}$  にたいし, 十分小さい  $\varepsilon_0 > 0$  が存在して,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  をみたす  $\varepsilon$  にたいし,  $x_i$  の近傍にちょうど  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) 個の遷移層をもつ (AL) の解が存在する.

**注意 3.8**  $(p_i)_{i=1}^k \in \mathcal{P}$  にたいし, 定理 4 をみたす解は少なくとも 2 つずつ存在する.  $x = 0$  において  $-1$  に近い値をとる解も,  $x = 0$  において  $1$  に近い値をとる解も共に存在する.

以上の定理の詳しい証明については [7] を参照.

## 4 2つの井戸の高さが不均衡な場合

ここでは [3] と同様に、一般形の方程式 (1.1) ではなく、(AMP) を扱うことにする。この場合、方程式 (AMP) の非線形項 (方程式 (1.1) では  $W_u(x, u)$ ) は、各  $x$  を固定するごとに3つの零点  $-1 < a(x) < 1$  をもち、 $u = a(x)$  はポテンシャルの2つの井戸  $-1, 1$  の間の極大点に他ならない。さらにこの章をとおして条件 (A) および次を仮定する。

$$(C) \quad a'(x_i) \neq 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

はじめに Equal-well-depth の場合と同様  $n$ -モード解の概念を導入する。

**定義 4.1**  $n$  を任意の自然数とするとき、(SP) の解でそのグラフが関数  $a(x)$  のグラフをちょうど  $n$  回横断するものを  $n$ -モード解と呼ぶことにする。

本節以降、任意に  $n$  を固定し、 $n$ -モード解について考える。 $\varepsilon > 0$  を十分小さくすると、 $n$ -モード解  $u$  は  $u(x) = a(x)$  をみたす  $n$  個の点の近傍において遷移層、あるいはスパイクを形成し、それ以外の部分においては、1 あるいは  $-1$  に非常に近い値をとる。よりくわしくは

**命題 4.2** (遷移層の形)  $x_\varepsilon$  は任意の  $\frac{d}{dx}u(x_\varepsilon) > 0$  をみたす  $u_\varepsilon$  の零点であるとする。 $v(z) = u(\varepsilon z + x_\varepsilon)$  と定義すると  $v(z)$  は  $\psi(z)$  に  $\mathbf{R}$  上広義一様収束する。ここで  $\psi(z)$  は以下の方程式の一意解のうちいずれかである。

$$\begin{cases} \psi'' + (1 - \psi^2)(\psi - a(x_\varepsilon)) = 0 & (-\infty < z < \infty), \\ \psi(-\infty) = -1, \quad \psi(\infty) = 1, \\ \psi(0) = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} \psi'' + (1 - \psi^2)(\psi - a(x_\varepsilon)) = 0 & (-\infty < z < \infty), \\ \psi(-\infty) = \psi(\infty) = 1, \\ \psi(0) = 0, \quad \psi'(0) > 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} \psi'' + (1 - \psi^2)(\psi - a(x_\varepsilon)) = 0 & (-\infty < z < \infty), \\ \psi(-\infty) = \psi(\infty) = -1, \\ \psi(0) = 0, \quad \psi'(0) > 0. \end{cases} \quad (4.3)$$



(4.1)の解はヘテロクリニック軌道とよばれ, (4.2)と(4.3)の解はともにホモクリニック軌道とよばれる. 上記の補題より  $u$  はその零点の近傍において, (4.1), (4.2), (4.3)のうちいずれかをみたす解  $\psi$  を水平方向に  $\varepsilon$  倍したものに非常に近いかたちをしているが, 下図のように (4.1)の解, すなわちヘテロクリニック軌道を用いて近似されるものを遷移層とよび, (4.2)と(4.3)の解, すなわちホモクリニック軌道を用いて近似されるものをスパイクとよぶ.

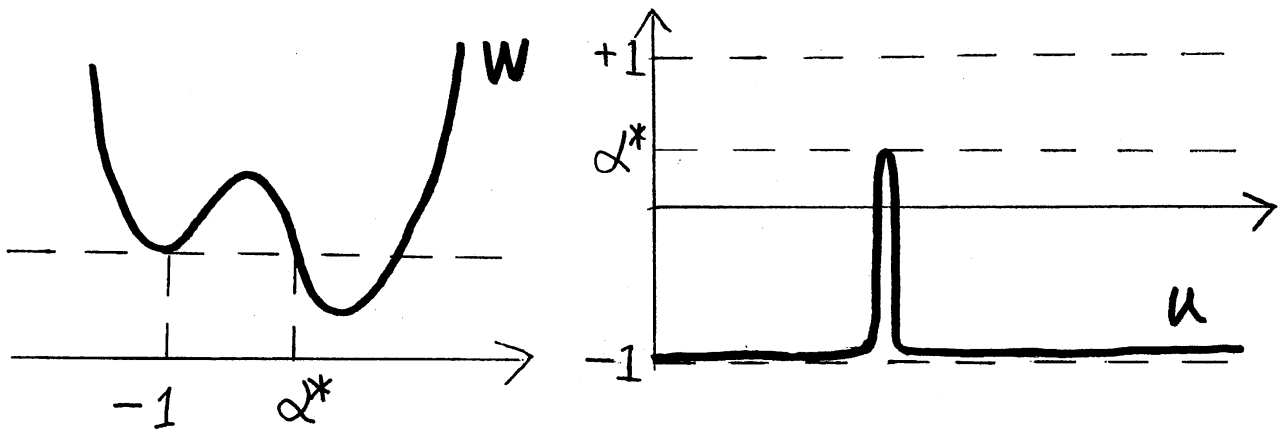


図 1

“突起部分の外側では解は  $u = -1$  (あるいは  $u = 1$ ) に非常に近い. 突起部分の最大 (あるいは最小) 値は以下で定まる値  $\alpha^* \in (-1, 1)$  に非常に近い.”

$$W(-1) = W(\alpha^*) \quad (\text{あるいは } W(1) = W(\alpha^*)).$$

スパイクは2つの遷移層が重なり合っている状態と異なることに注意する.

さらに (AMP) の解はその零点から離れた場所において  $-1$  か  $1$  に非常に近い値をとることが次の補題からわかる.

**命題 4.3** ある定数  $0 < C_3 < C_4$  と  $0 < K_4 < K_3$  が存在して十分小さい  $\varepsilon > 0$  にたいし次の不等式のうちどちらかが成り立つ.

$$C_3 \exp\left(-\frac{K_3 d(x)}{\varepsilon}\right) \leq u(x) + 1 \leq C_4 \exp\left(-\frac{K_4 d(x)}{\varepsilon}\right) \quad (4.4)$$

$$C_3 \exp\left(-\frac{K_3 d(x)}{\varepsilon}\right) \leq 1 - u(x) \leq C_4 \exp\left(-\frac{K_4 d(x)}{\varepsilon}\right) \quad (4.5)$$

ここで  $d(x)$  は  $x$  と  $u_\varepsilon$  の零点との間の距離.

以下ではこれらの遷移層やスパイクがどこに現れるかが問題になるが、まず遷移層のみをもつ解について考察する。

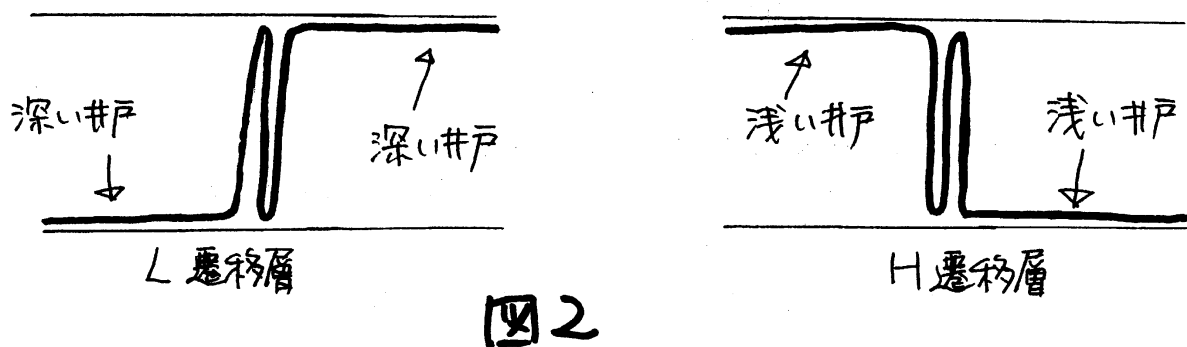
#### 4.1. 遷移層をもつ解について

まず、遷移層の位置については、以下の定理が成り立つ。

**定理 5 (遷移層の位置)** 任意に  $n$  を固定し、 $\varepsilon > 0$  を十分小さくとると、 $n$ -モード解の遷移層は点  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N-1$ ) の近傍、あるいは境界点  $x = 0, x = 1$  の近傍にのみ現れる。

さてここで、「低ポテンシャル遷移層 (L遷移層)」と「高ポテンシャル遷移層 (H遷移層)」を導入する。

点  $-1, 1$  はポテンシャル  $W$  の井戸 (極小点) であるが、どちらの井戸がより深いかは各点  $x_i$  を境に入れ替わる。いま、点  $x_i$  の近傍に単独または多重の遷移層が現れているとする。それら一連の遷移層の両側で  $u(x)$  が深い井戸に近い値をとっているとき、これらの遷移層を低ポテンシャル遷移層 (L遷移層) とよび、両側で浅い井戸に近い値をとっているとき高ポテンシャル遷移層 (H遷移層) とよぶ (図 2)。



以下で「遷移層の個数」と言った場合、 $u(x)$  のグラフの中でほぼ  $-1$  の値とほぼ  $1$  の値を結ぶ単調な部分をそれぞれ 1 個の遷移層とみなして数え上げたものをさす。

**定理 6 (遷移層の個数)** 各  $x_i$  の近傍に現れる遷移層の個数は奇数または 0 であり、さらに L 遷移層の個数は各  $x_i$  の近傍で 1 または 0 である (図 3)。

**注意 4.4** H 遷移層は複数個折り重なって出現しうる (図 4)。

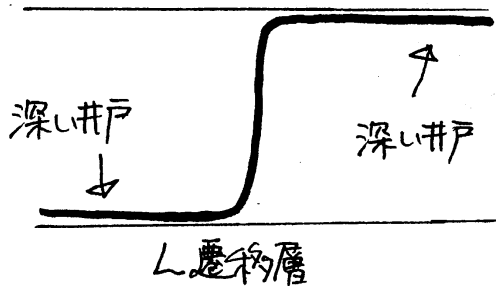


図 3

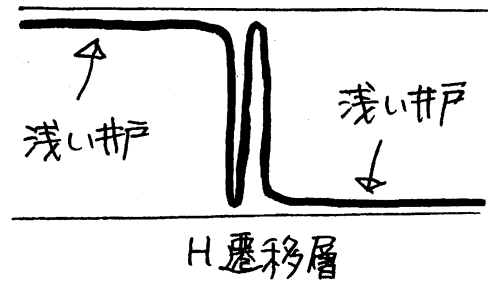


図 4

次の定理は遷移層の配置の仕方から解の安定性が完全に決定されることを示している。

定理 7 (遷移層とモース指数) (AMP) の解  $u$  は内部遷移層のみをもち、スパイクをもたないとする。このとき  $u$  は非退化であり、さらに次の関係式が成り立つ。

解のモース指数 = その解がもつ H 遷移層の総数。

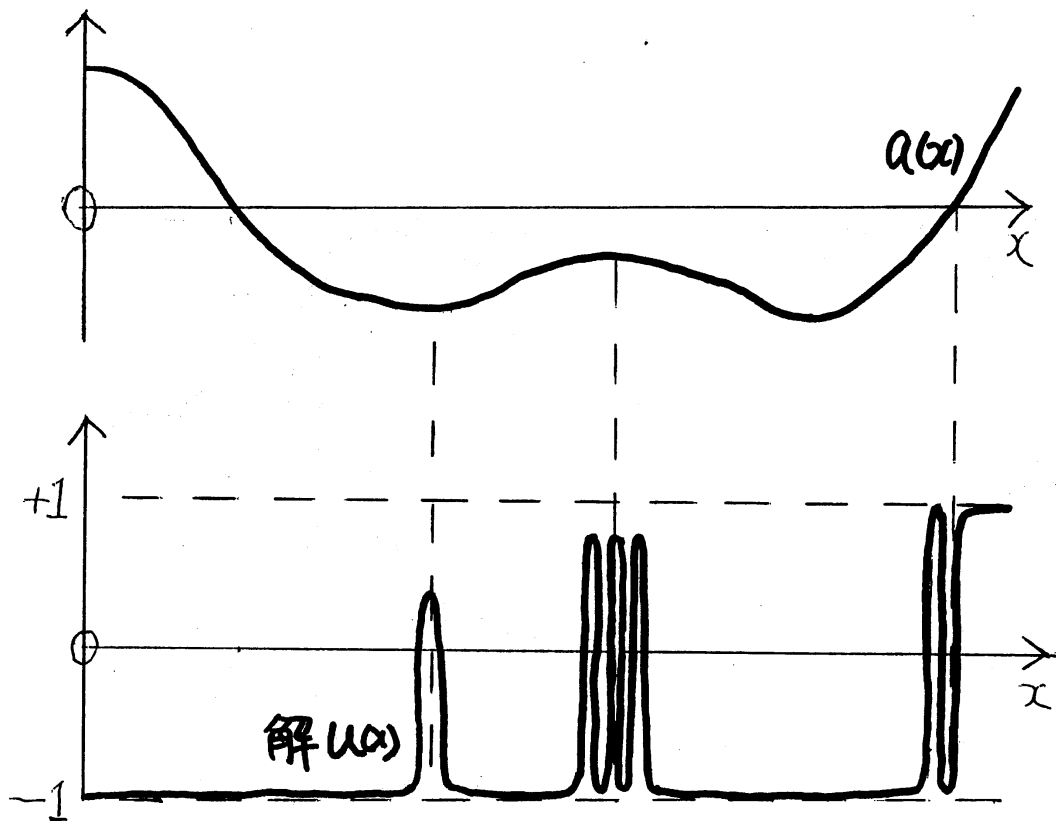
ここでは省略するが定理 5, 定理 6, 定理 7 をみたとすようなすべてのタイプのプロファイルをもつ解を実際に構成することができる。

## 4.2. スパイクをもつ解

次の定理は、 $n$ -モード解のスパイクがどこに現れるかを示している。

定理 8 (スパイクの位置) スパイクが現れるのは  $a(x)$  の極点あるいは境界の近傍のみである。  $A(x) = |a(x)|$  とおき、極点  $x$  において  $A''(x) < 0$  ならば、 $x$  の近傍に現れるスパイクの数は高々 1 つである。

注意 4.5  $x$  において  $A''(x) > 0$  ならば多数の折り重なったスパイクが現れるうる。



最近次のような結果を Ai-Hastings [1] がえていることを知った. 彼らは

$$f(x, u) = -\lambda u + u^3 + \cos x.$$

の場合を考え, 複数の折り重なった遷移層をもつ解の存在を証明している. この場合は条件 (A) すなわち井戸の深さが不均衡な場合に含まれる. 彼らはさらにスパイクが単独に現れるような解の存在も示している.

また最近, 力学系の分野においても類似の特異摂動問題が研究されていることを知った. とくに Gedeon-Kokubu-Mischaikow-Oka[5] では 2 次元ハミルトン系を無限区間  $\mathbf{R}$  の上で考え, 密集したスパイクを持つ解の存在, さらにはカオティックな解の存在について考察している.

## 参考文献

- [1] S. Ai, and S.P. Hastings, *A shooting approach to layers and chaos in a forced duffing equation, I*, preprint.

- [2] N.D. Alikakos, P.W. Bates, and G. Fusco, *Solutions to the nonautonomous bistable equation with specified morse index. Part I: Existence*, Trans.Amer.Math.Soc. **340** (1993), 641-654.
- [3] S.B.Angenent, J.Mallet-Paret and L.A.Peletier, *Stable transition layers in a semilinear boundary value problem*, J. Differential Equations, **67** (1987), 212-242.
- [4] S.I.Ei, M.Iida and E.Yanagida, *Dynamics of interfaces in a scalar parabolic equation with variable diffusion*, Japan.J.Indust.Appl.Math. **14** (1997), 1-23.
- [5] T. Gedeon, H. Kokubu, K. Mischaikow and H. Oka, *Chaotic solutions in slowly varying perturbations of Hamiltonian systems with applications to shallow water sloshing*, Kyoto-Math 99-22 (1999).
- [6] K. Nakashima, *Stable transition layers in a balanced bistable equation*, to appear in Differential and Integral Equations.
- [7] K. Nakashima, *Multi-layered stationary solutions for a spatially inhomogeneous Allen-Cahn equation*, preprint.
- [8] A.S. do Nascimento, *N-dimensional stable transition layers in a diffusion equation: diffusibility versus spatial inhomogeneity*, Preprint.
- [9] J. Norbury and L.-C. Yeh, *The location and stability of interface solutions of an inhomogeneous parabolic problem*, to appear in SIAM J. Appl. Math.