数理解析研究所講究録
1198巻 2001年 68-71

任意次数微分方程式の数値計算

都田　艶子 (Tsuyako Miyakoda) *
Department of Applied Physics
Graduated School of Engineering
Osaka University, Suita 565-0871 Japan

1 はじめに

任意次数の微分をとり扱うために、はじめにN-Fractional Calculusを定義する。[1]

曲線Cと領域Dは、$C=\{C_{-},C_{+}\}$, $D=\{D_{-},D_{+}\}$と書いて、C_{-}またはC_{+}, そしてD_{-}またはD_{+}をとるものとする。C_{-}は2点zと$-\infty+iIm(z)$を結ぶカットに沿った曲線、C_{+}は2点zと$\infty+iIm(z)$を結ぶカットに沿った曲線, D_{-}はC_{-}の内側の領域, D_{+}はC_{+}に囲まれた内側の領域とする。

N-fractional operator N^{ν}を次のように定義する。

$$N^{\nu}=\frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i}\int_{C}\frac{(\cdot)d\zeta}{(\zeta-z)^{\nu+1}} \quad (\nu\notin \mathbf{Z}^{-}), \tag{1}$$

そして

$$N^{-m}=\lim_{\nu\to-m}N^{\nu} \quad (m\in \mathbf{Z}^{+}), \tag{2}$$

そして$f=f(z)$がDで正則な関数とするとき、

$$f_{\nu}(z)=N^{\nu}f(z)=\frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\nu+1}}d\zeta \tag{3}$$

$$(f)_{-m}=\lim_{\nu\to-m}(f)_{\nu} \quad (m\in \mathbf{Z}^{+}), \tag{4}$$

とする。ここで

$$\begin{aligned}-\pi\leq arg(\zeta-z)\leq\pi \quad for\ \mathbf{C}_{-},\\ 0\leq arg(\zeta-z)\leq 2\pi \quad for\ \mathbf{C}_{+},\\ \zeta\neq z,\quad z\in \mathbf{C},\quad \nu\in \mathbf{R},\\ \Gamma; Gamma \quad 関数\end{aligned}$$

*email: miyakoda@ap.eng.osaka-u.ac.jp

である。このとき、 $|(f)_\nu| < \infty$ がなりたつならば、この $(f)_\nu$ を z に関する f の任意次数 ν の Fractional Differintegration と定義する。

演算子 $\circ$ は次のように定義する。

$$N^\beta \circ N^\alpha f = N^\beta N^\alpha f = N^\beta(N^\alpha f) \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{R}), \tag{5}$$

するとさらに次のことがいえて

$$N^\beta(N^\alpha f) = N^{\beta+\alpha} f \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{R}), \tag{6}$$

つぎの集合

$$\{N^\nu\} = \{N^\nu | \nu \in \mathbf{R}\}, \tag{7}$$

は Abelian product group であるといえる。

2 任意次数の微分方程式

いま任意次数 ν は有理数で、$\frac{m}{n}$ と書けるものとしたとき、以下のような微分方程式を考える。

$$\varphi_{m/n} + \varphi \cdot a = f \quad (a \neq 0,\ m < n,\ \ m, n \in \mathbf{Z}^+) \tag{8}$$

このとき定数 a と $f(z)$ は与えられ, 関数 φ は $\varphi \in \wp^\circ = \{\varphi |\ 0 \neq |\varphi_\nu| < \infty, \nu \in \mathbf{R}\}$、そして $f \in \wp^\circ$ であるとする。ここで $\varphi = \varphi_0$ である。

この微分方程式を満たす $\varphi(z)$ は、この式の両辺に対して順次、演算子 $N^{m/n}, N^{2m/n}, \cdots, N^{(n-1)m/n}$ を作用させることにより

$$\varphi_m - \varphi \cdot (-a)^n = g \tag{9}$$

なる m 次の微分方程式を解けばいいことに帰着される [3]. ここで g は

$$g = \sum_{k=0}^{n-1} f_{km/n} \cdot (-a)^{n-1-k}$$

である。

既知関数への Fractional Calculus に変換できたといっても、その定義が複素積分であるため、計算は単純にはいかない。複雑さを避けるために常に主値を取ることにする。そして右辺の既知関数への Fractional Calculus は [1] の結果を適用することを考える。

次の結果（主値）に注目する。

1. $$(e^{ax})_\nu = a^\nu e^{ax},$$

2. $$(e^{-ax})_\nu = e^{-i\pi\nu} a^\nu e^{-ax} \quad for \ \ a \neq 0$$

3.
$$(\cos ax)_\nu = a^\nu \cos(ax + \frac{\pi}{2}\nu) \quad (a \neq 0)$$

4.
$$(\sin ax)_\nu = a^\nu \sin(ax + \frac{\pi}{2}\nu) \quad (a \neq 0)$$

これらを適用することにより、任意の関数が三角多項式、フーリエ級数などに展開されるならば、右辺の既知関数への Fractional Calculus はあらためて積分計算をすることもなく計算できる。

3 数値例

ここで、初期値問題を解くことを試みる。

右辺の既知関数が三角多項式に展開されるとすると

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{N}(a_j \cos jx + b_j \sin jx) \tag{10}$$

と書ける。ν 次の微分は

$$f_\nu(x) = \sum_{j=1}^{N}(a_j j^\nu \cos(jx + \frac{\pi}{2}\nu) + b_j j^\nu \sin(jx + \frac{\pi}{2}\nu)) \tag{11}$$

である。常微分方程式の数値解法としてよく知られた解法 Runge-Kutta 法を用いて、任意次数の微分方程式の解を求める。

(8) 式で、$m/n = 1/2$, $a = 2$, $f(z) = x/2$, $z \in \mathbf{R}$ とする。このとき，解くべき式は

$$\varphi_1 - \varphi \cdot (-2)^2 = g$$

g は

$$g = -a \cdot f + f_{(\frac{1}{2})}.$$

となる。これを初期条件 $\varphi(0) = 0$ として x が 0 から 1 まで解く。

Runge-Kutta 4 次公式による計算結果を表に示す。表中の N は 0 から 1 の間の分点の数、M は既知関数 $f(x)$ の展開項数である。

References

[1] K. Nishimoto, Fractional Calculus, Vol.1(1984),Vol.2(1987),Vol.3(1989), Vol.4(1991), Vol.5(1996),Descartes Press,Koriyama,Japan.

[2] T. Miyakoda and K. Nishimoto, N-method to fractional differential equations, *J.Fractional Calculus*, **15**,7-12 (1999).

Table 1: Runge-Kutta 法 (4 次公式) による結果

x	N=25, M=24	N=50, M=24	N=50, M=30
0.16	0.0937	0.0952	0.0950
0.32	0.2645	0.2725	0.2718
0.48	0.5809	0.6052	0.6036
0.64	1.1739	1.2325	1.2292
0.80	2.2919	2.4184	2.4119
0.96	4.4061	4.6637	4.6513

[3] T. Miyakoda ,Fractional Calculus の数値計算への応用, 数理解析研究所講究録, **1145**,130-134 (2000).

[4] K. Diethelm, An algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order, *Electronic transactions on Numerical Analysis*,**5**, 1-6,(1997).

[5] R. Hilfer(Ed.), Fractional Calculus in Physics , World Scientific, Singapore, (2000).