数理解析研究所講究録
1199 巻 2001 年 192-202

An Efficient Real Root Locating of Polynomial Equations by Linear Separating Maps
線形分離写像による判定を用いた代数方程式の実解の定位

詫間電波高専 近藤 祐史(Yuuji KONDOH) *
上智大学 齋藤 友克(Tomokatsu SAITO) †
富士通研究所 竹島 卓(Tak TAKESIMA) ‡

1 前書き

n 個の変数 $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ に関する s 個の連立代数方程式 $f_1 = 0, ..., f_n = 0$ の実解を所望の絶対誤差で求めることを目的とする。一般に連立方程式の実解を求めることは $\mathbf{x} = \{x_1, ..., x_n\}$ を n 個の不定元の集合とし、$f_1, ..., f_s \in \mathbb{Q}[\mathbf{x}]$ としたとき、ideal$(\{f_1, ..., f_n\})$ の $\mathbb{R}^n$ での零点を求めることである。ここで、ideal$(\{f_1, ..., f_n\})$ は零次元、すなわち解の個数は有限個であることを仮定する。

代数的方法を基礎とした連立代数法的式の解法としては、消去法を用いて与方程式を $g_n(x_n) = 0, ..., g_2(x_2, ..., x_n) = 0, g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,$ の形に三角化し、$g_n(x_n) = 0,$ $g_{n-1}(x_{n-1}, x_n),...,g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ を逆代入の方法で、順次 x_n,x_{n-1},...,x_1 について解くという方法が考えられる。

この方法では、誤差の累積が生じることが問題となる。誤差の累積を避ける方法として、shape lemma[2] や generalized shape lemma (rational univariate representation) による方法 [1, 3] が開発された。これらは、零次元かつ根基イデアルを生成する方程式の場合に、各変数をいわゆる一般の位置にある元の多項式あるいは有理式で表現し、一般の位置にある元の値を各表現に代入することによって、解を定めるものである。誤差の累積は避けられ

*kondoh@dc.takuma-ct.ac.jp
†saito@mm.sophia.ac.jp
‡takesima@flab.fujitsu.co.jp

るが、誤差を定められた範囲に押えようとするとき、代数的数の符号判定問題と同様の処理が必要になる。

別の方法として、各変数の満たすべき最小多項式から各変数についての解を求め、その解の組合せが全体の解となるか否かを判定して解を得る方法 [7] がある。これには、累積誤差の問題はないが解の組合せが多くなるという欠点をもっていた。また、解の組合せから真の解を判定する方法も問題であった。すなわち、方程式の係数や次数が大きい場合、元の方程式に解の候補値を代入して 0 に近いか否かにより真の解を判定するという単純な方法は無力である。これは解の候補値は近似値、もしくは解を含む区間として扱うしかなく、代入による零判定問題が代数的数の符号判定問題としての処理が必要になるためである。浮動小数点数により近似する場合には、必要となる精度に見合った大きな表現長のデータを処理するという負担が避けられない。

本論文では、後者の枠組の中で組合せ爆発を避け、かつ少ない計算量で精度の保証も容易な方法を提示する。

2 分離写像

2.1 用語と諸定義

$I=[l,r]\subset\mathbb{R}$ を区間、すなわち, $I=\{a\,|\,l\le a\le r\}\subset\mathbb{R}$ とする. $L(I)$ と $R(I)$ でそれぞれ $l=\min I$ と $r=\max I$、すなわち区間の左端と右端とを表す. 区間 I の幅を $\mathrm{Width}(I)=r-l$ と表す。

k 個の区間の集合 $\mathbf{I}=\{I_1,I_2,...,I_k\},k\in\mathbb{N}$ に対して、その左端と右端とを $L(\mathbf{I})=\min\{\bigcup_{1\le i\le k}I_i\}$、と $R(\mathbf{I})=\max\{\bigcup_{1\le i\le k}I_i\}$ によって定義する。

さらに、区間集合 $\mathbf{I}$ の *covering interval* $\bar{\mathbf{I}}=\overline{\{I_1,I_2,...,I_k\}}$ を $\bar{\mathbf{I}}=[L(\mathbf{I}),R(\mathbf{I})]$ により定義する。また、$\mathbf{I}$ の *span* を $\mathrm{Span}(\mathbf{I})=\mathrm{Width}(\bar{\mathbf{I}})=R(\mathbf{I})-L(\mathbf{I})$ により定義する。

また、記号の簡略のために、$\mathbf{I}$、$\mathbf{J}$ を区間の有限集合とするとき、その「組合せ直積 (pairing direct product)」(と仮に呼ぶ) を $\mathbf{I}\bowtie\mathbf{J}=\{I\times J|I\in\mathbf{I},J\in\mathbf{J}\}$ と書くことにする。これは、$\mathbf{I}$ と $\mathbf{J}$ の各要素区間のペアごとに直積、すなわち長方形の領域、を作ったとき、それらの長方形領域の全てからなる集合である。

ふたつの区間 I と J とは $I\cap J=\emptyset$ のとき *disjoint* であると言い、そうでないとき *overlapped* であると言う。

ある区間 I は $R(I)<L(J)$ であるとき 区間 J の **左にある**という。I が J の左にあるとき J は I の**右にある**という。この状況を $I<J$ あるいは $J>I$ と書く。

この関係 $<$ はつぎのように区間の集合に対しても拡張して用いる。すなわち、区間のふたつの集合 $\mathbf{I}=\{I_1,...,I_r\}$ と $\mathbf{J}=\{J_1,...,J_r\}$ とに対して、「$\mathbf{I}<\mathbf{J}$ とは、任意の $I\in\mathbf{I}$ と $J\in\mathbf{J}$ とに対して $I<J$ となること」と定義する。

ふたつの disjoint な区間 I と J とについてその、**間隙** $\mathrm{Gap}(I,J)$ を

$$\begin{aligned}\mathrm{Gap}(I,J) &= L(J)-R(I) \text{ if } I<J\\ &= L(I)-R(J) \text{ if } J<I\\ &= \text{undefined otherwise.}\end{aligned}$$

により定義する。

2.2　2 次元の場合

まず、2 変数の場合を考察する。

パラメータ $0<\alpha\in\mathbb{R}$ をもつ線形写像 $\psi(x,y)=x+\alpha y$、$\psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を考える。

$X\subset\mathbb{R}$ と $Y\subset\mathbb{R}$ とを区間とするとき、これらの直積 $X\times Y\subset\mathbb{R}^2$ は長方形領域となる。ここで α が正であることから ψ は各変数について単調増加な写像である。よって、ψ による長方形領域の像は左端と右端とがそれぞれ $\psi(L(X),L(Y))$ および $\psi(R(X),R(Y))$ となる 区間となる。すなわち、$\psi(X\times Y)=[\psi(L(X),L(Y)),\psi(R(X),R(Y))]\subset\mathbb{R}$ は 1 次元の区間である。

$\mathbf{X}=\{X_1,...,X_m\}$ と $\mathbf{Y}=\{Y_1,...,Y_n\}$ とを disjoint なふたつの区間とし、$X_1<X_2<\cdots<X_m$ および $Y_1<Y_2<\cdots<Y_n$ のように配列されているものとしよう。

このとき、$S_x=\mathrm{Span}(\mathbf{X})$、$W_y=\max_{Y\in\mathbf{Y}}\mathrm{Width}(Y)$、$G_x=\min_{X,X'\in\mathbf{X}}\mathrm{Gap}(X,X')$、$G_y=\min_{Y,Y'\in\mathbf{Y}}\mathrm{Gap}(Y,Y')$ とおくとつぎの命題が成り立つ。

定理 1 パラメータ $\alpha>0$ が条件

$$\frac{S_x}{G_y}<\alpha<\frac{G_x}{W_y}. \tag{1}$$

を満たすとき、すべての長方形領域は $m\times n$ 個の *disjoint* な区間に写像され、しかもつぎのように配列されている。

$$\begin{array}{ccccccccc} & \psi(X_1\times Y_1) & < & \psi(X_2\times Y_1) & < & \cdots & < & \psi(X_m\times Y_1)\\ < & \psi(X_1\times Y_2) & < & \psi(X_2\times Y_2) & < & \cdots & < & \psi(X_m\times Y_2)\\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots\\ < & \psi(X_1\times Y_n) & < & \psi(X_2\times Y_n) & < & \cdots & < & \psi(X_m\times Y_n)\end{array} \tag{2}$$

証明 最初に、各 j $(1\le j\le n)$ に対して、パラメータ $\alpha>0$ が条件 (1) の右側の不等式を満たす、すなわち、

$$0<\alpha<\frac{G_x}{W_y}. \tag{3}$$

ならば

$$\psi(X_1\times Y_j)<\psi(X_2\times Y_j)<\cdots<\psi(X_m\times Y_j) \tag{4}$$

となることを示す。

不等式 (3) が成立しているものとする。一対の水平に相隣り合う長方形領域がその位置に関する順序関係を保存すること、すなわち、

$$R(\psi(X_i \times Y_j)) < L(\psi(X_{i+1} \times Y_j)) \quad (1 \leq i < m). \tag{5}$$

であることを示したい。これを示すために目的の不等式 (5) の右辺から左辺を引いて差を計算する。

$$\begin{aligned} G &= L(\psi(X_{i+1} \times Y_j)) - R(\psi(X_i \times Y_j)) & (6)\\ &= \psi(L(X_{i+1}), L(Y_j)) - \psi(R(X_i), R(Y_j)) & (7)\\ &= (L(X_{i+1}) + \alpha \cdot L(Y_j)) - R(X_i) + \alpha \cdot R(Y_j) & (8)\\ &= (L(X_{i+1}) - R(X_i)) - \alpha \cdot (R(Y_j) - L(Y_j)) & (9)\\ &= \mathrm{Gap}(X_i, X_{i+1}) - \alpha \cdot \mathrm{Width}(Y_j). & (10) \end{aligned}$$

ここで $\mathrm{Gap}(X_i, X_{i+1}) \geq G_x > 0$ と $\mathrm{Width}(Y_j) \leq W_y$ とから

$$\begin{aligned} G &\geq G_x - \alpha \cdot W_y & (11)\\ &> 0. & (12) \end{aligned}$$

を得る。最後の不等号は仮定した条件 (3) による。これにより、水平方向に配列された長方形領域の像について目的とする不等式が成立することは証明された。

命題の証明を完成するには、ある水平方向に配列された長方形領域の行の最も右側の領域が、その直上に配列された長方形領域の行の最も左側よりも左に写像されることを示せばよい。

パラメータ $\alpha > 0$ が条件 (1) の左側の不等式を満たす、すなわち、

$$\frac{S_x}{G_y} < \alpha, \tag{13}$$

とする。すると任意の $1 \leq j < n$ となる j について、$R(\psi(X_m \times Y_j)) < L(\psi(X_1 \times Y_{j+1}))$ を示せばよい。

前と同様右辺から左辺を引いて差を計算する。

$$\begin{aligned} G' &= L(\psi(X_1 \times Y_{j+1})) - R(\psi(X_m \times Y_j)) & (14)\\ &= \psi(L(X), L(Y_{j+1})) - \psi(R(X), R(Y_j)) & (15)\\ &= (L(X) + \alpha \cdot L(Y_{j+1})) - R(X) + \alpha \cdot R(Y_j) & (16)\\ &= \alpha \cdot (L(Y_{j+1}) - R(Y_j)) - (R(X) - L(X)) & (17)\\ &= \alpha \cdot \mathrm{Gap}(Y_j, Y_{j+1}) - S_x. & (18) \end{aligned}$$

ここで、 $\mathrm{Gap}(Y_j, Y_{j+1}) \geq G_y > 0)$ であるから、

$$\begin{aligned} G' &\geq \alpha \cdot G_y - S_x & (19) \\ &> 0. & (20) \end{aligned}$$

最後の不等号は仮定した条件 (13) による。

これにより命題は証明された。 ∎

注意 2 証明の中に現れた G および G' はいずれも、像の空間での区間の Gap であることを注意しておく。

2.3 3 次元以上の場合

3 変数以上の場合にはつぎのように、再帰的に分離写像を定義する。

変数の個数を N とし、各変数を順に $x_1, x_2, ..., x_N$ とする。各変数についての区間の集合をそれぞれ順に $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_n$ とする。$\mathbf{X}_i = \{X_i^{(1)} < X_i^{(2)} < \cdots < X_i^{(n_i)}\}$ $(n_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2, ..., N)$ である。

まず、$i = 2, 3, ..., N$ について、パラメータ $\alpha_i > 0$ $(i = 2, 3, ..., N)$ をもつ線形写像 ψ_i を

$$\psi_i(x, y) = x + \alpha_i y \tag{21}$$

とする。つぎに、$i = 1, 2, ..., N$ に対する新しい変数 u_i $(i = 1, 2, ..., N)$ をつぎのように導入する。

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1, & (22) \\ u_i &= \psi_i(u_{i-1}, x_i). & (23) \end{aligned}$$

新しい変数 u_i についての区間集合はつぎのように定義する。

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1 &= \mathbf{X}_1, & (24) \\ \mathbf{U}_i &= \psi_i(\mathbf{U}_{i-1} \bowtie \mathbf{X}_i). & (25) \end{aligned}$$

ここで、組合せ直積 $\mathbf{X} \bowtie \mathbf{Y}$ に ψ を作用させた結果は

$$\psi(\mathbf{X} \bowtie \mathbf{Y}) = \{\psi(X \times Y) | X \in \mathbf{X}, Y \in \mathbf{Y}\}$$

である。

この区間集合をもつ新しい各変数 u_i について区間集合の Span および最小の Gap を

$$\begin{aligned} S_{u_i} &= \mathrm{Span}(\mathbf{U}_i), & (26) \\ G_{u_i} &= \min_{U, U' \in \mathbf{U}_i} \mathrm{Gap}(U, U'). & (27) \end{aligned}$$

と書くことにする。

ここで、各 α_i $(i = 2, 3, ..., N)$ について

$$\frac{S_{u_{i-i}}}{G_{x_i}} < \alpha_i < \frac{G_{u_{i-1}}}{W_{x_i}} \tag{28}$$

が満たされるならば、2 次元の場合の**命題** 1 により、上記、S_{u_i} および G_{u_i} は、それぞれ次の式により逐次計算できることが容易に分かる。(G_{u_i} については、**注意** 2 を参照。)

$$S_{u_i} = S_{u_{i-1}} + \alpha_i S_{x_i}, \tag{29}$$

$$G_{u_i} = \min\{G_{u_{i-1}} - \alpha_i W_{x_i}, \alpha_i G_{x_i} - S_{u_{i-1}}\}. \tag{30}$$

ここに、$i = 1, 2, ..., N$ について、

$$G_{x_i} = \min_{X, X' \in \mathbf{X}_i} \mathrm{Gap}(X, X'), \tag{31}$$

$$W_{x_i} = \max_{X \in \mathbf{X}_i} \mathrm{Width}(X), \tag{32}$$

である。

全ての i $(i = 2, 3, ..., N)$) について α_i についての条件 (28) が満たされているとき、$(x_1, x_2, ..., x_N) \mapsto U_N = \Psi(x_1, x_2, ..., x_N) = x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots \alpha_N x_N$ によって線形写像 $\Psi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ が構成できる。

この写像 Ψ を N 次元の分離写像、条件式 (28) を分離係数条件、と呼ぶことにする。

条件式 (28) が成立するような α_i がとれるとき、分離写像 Ψ はその構成法から、R^N に格子状に配列された $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_N$ 個の超直方体領域 $X_1^{(j_1)} \times X_2^{(j_2)} \times \cdots \times X_N^{(j_N)}$ を、その添字の辞書式順序で配列される重なりのない 1 次元の区間達 $\Psi(X_1^{(j_1)} \times X_2^{(j_2)} \times \cdots \times X_N^{(j_N)})$ に写像する。

3　連立方程式の解

連立方程式の解は各変数の満たす最小多項式の解の組合せの中に存在する。実解の組合せのうち、どの組み合わせが真の実解をあたえるかを判定するために前節の分離写像が利用できる。

3.1　基本的事項

零次元イデアルを生成する連立方程式の (有限個の) 解の個数がそのイデアルの $\mathbb{Q}$-線形次元に一致することは良く知られている。

とくに零次元根基イデアルについては次の Shape Lemma [2] が成立する。

定理 3 (Shape Lemma) $\mathcal{I} \subset \mathbb{Q}[x_1, ..., x_N]$ を根基イデアルとする。有限個の例外を除く整数の組み $(a_1, a_2, ..., a_N)$ に対して、$\mathcal{I} \cup \{u - (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_Nx_N)\}$ の変数順序を $\{x_1, ..., x_N\} > u$ とした項順序でのグレブナ基底はつぎの形をしている。

$$\{x_1 - g_1, x_2 - g_2, ..., x_N - g_N, h\}.$$

ここに、$h, g_i \in \mathbb{Q}[u]$ $(i = 1, 2, ..., N)$、すなわちこれらは u の一変数多項式である。

この定理により、零次元根基イデアルについてはその零点 $(\xi_1^{(j_1)}, \xi_2^{(j_2)}, ..., \xi_N^{(j_N)}) \in \mathbb{C}^N$ が h の零点 $v^{(j_1, j_2, ..., j_N)} \in \mathbb{C}$ に 1 対 1 対応する。この定理を満たすような元 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_Nx_N$ あるいは u を「複素数上一般の位置にある元」、あるいは、「複素分離元」と通例とは違うが「複素」を付して呼ぶ。h は u の最小多項式である。

$u = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_Nx_N$ が複素分離元であるか否かはつぎのよく知られた命題により判別できる。

命題 4 (複素分離元の判定) 定理 *3* と同様の記号と条件の下で、u が複素分離元 $\Leftrightarrow$ $\deg h = \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{I}$.

3.2 実解の判定

方程式を構成する多項式の生成するイデアルを $\mathcal{I}$ とする。今、変数 x_i $(i = 1, 2, ..., N)$ の各々についての実解の区間のすべてが $\Xi_i^{(1)}, ..., \Xi_i^{(t_i)}$ と計算されており、分離係数条件が成立して分離写像 Ψ が構成され、u_N の最小多項式 $h_N(u_N)$ も計算されているものとする。

繁雑さを避けるため、区間の組 $(\Xi_1^{(j_1)}, \Xi_2^{(j_2)}, ..., \Xi_N^{(j_N)}) \in (\mathbb{R}^2)^N$ を指定するのに、単に添字の組 $(j_1, j_2, ..., j_N)$ を用いることにする。

イデアル $\mathcal{I}$ が零次元かつ根基である場合には、$\mathbb{C}^N$ における $\mathcal{I}$ の真の零点はすべて単純 (重複なし) である。さらに、定理 3 により、真の零点は $h_N(u_N)$ の零点と 1 対 1 に対応するし、しかも、容易に分かるように、分離係数 α_i が複素分離元与える、すなわち (命題 4) が成立している、場合には、$\mathcal{I}$ の実零点も u の実零点に 1 対 1 に対応する。[1)]

これにより次の命題を得る。

命題 5 $\mathcal{I}$ が零次元かつ根基であるとする。さらに、分離係数 α_i 達が複素分離元を与えるものとする。すると、組 $(j_1, j_2, ..., j_N)$ が $\mathcal{I}$ の実零点であることの必要十分条件は、$h_N(u_N)$ のある零点が区間 $\Psi(j_1, j_2, ..., j_N)$ すなわち、$\Psi(\Xi_1^{(j_1)}, \Xi_2^{(j_2)}, ..., \Xi_N^{(j_N)})$ に落ちる *(*含まれる*)* ことである。

[1)] 分離係数条件が成立していても、$\mathcal{I}$ の複素零点が u の実零点に対応する場合がある。イデアルが根基ならば、そのような事態が生じているか否かを確かめることは命題 4 により可能で、生じている場合には α_i を変更すればよい。

$h_N(u_N)$ の実零点は精度保証さえあれば数値的に求めても良いが、必ずしも計算量的に有利とは即断できない。本論文では、$h_N(u_N)$ の零点も区間で求めることになるのでつぎの命題のほうがより実際的である。

命題 6 命題 *5* と同様 $\mathcal{I}$ が零次元かつ根基であるとする。さらに、分離係数 α_i 達が複素分離元を与えるものとする。すると、組 $(j_1, j_2, ..., j_N)$ が $\mathcal{I}$ の実零点であることの必要十分条件は、$h_N(u_N)$ の零点を唯一含むある区間 v が存在し、$\Psi(j_1, j_2, ..., j_N)$ と共通部分をもち、かつ、これ以外の組み $(j_1', j_2', ..., j_N')$ の像 $\Psi(j_1', j_2', ..., j_N')$ とは共通部分を持たないことである。

もし、v の区間幅を Ψ による超直方体達の像 $\mathbf{U}_N$ の最小の区間の間隙 G_{u_N} より小さく取るならば、$L(v)$ か $R(v)$ のどちらか一方がある像 $\Psi(j_1, j_2, ..., j_N)$ に含まれることを確認するだけでもよい。

3.3 分離係数条件

ここで分離係数 α_i の存在について吟味しよう。

方程式の実解を求める目的で分離写像を使う際には、各変数 x_i についての区間 $\mathbf{X}_i$ とは各変数の満たす最小多項式 $\phi_i(x_i)$ の実根を唯一含む区間のことになる。今、ψ_i を作る、すなわち α_i を決める段階を考えよう。

まず、、式 (28) に現われる区間の幅 W_{x_i} は、例えば Sturm 列を使う方法などによって、必要に応じていくらでも小さく取ることができることは明らかである。

一方、式 (28) の G_{x_i} は根を含む区間の間の間隙の最小値であるから W_{x_i} を小さくとるとき増加して行き、変数 x_i の最小多項式 $\phi_i(x_i)$ の根の差の最小値に近付く。

このとき、式 (28) の $S_{u_{i-1}}$ と $G_{u_{i-1}}$ はすでに定まっているままで遡って変更する (つまり $W_{x_{i-1}}$ を小さく取り直すことをしない) とすれば、式 (28) の左辺は正の一定値に近付き、右辺は任意に大きくできることが分かる。

このことから、x_i の最小多項式 ϕ_i の根の存在区間を必要に応じて小さくとることで、式 (28) を満足する α_i をいつでも、特に正整数の中から、見付けるようにすることが可能である。

さらに、そのような正整数 α_i で複素分離元を与えないものは定理 3 により高々有限個であるので、必要に応じて $W_{x_{i-1}}$ を小さく取ることにより、分離写像を与えかつ複素分離元を与える 分離係数 α_i を見付けることができる。

3.4 アルゴリズム

これまで考察したことがらを用いて零次元根基イデアルの実零点を求めるアルゴリズムが構築できる。

アルゴリズム 7

入力: 多項式の集合 $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, ..., f_r\}$、および区間幅の上限 ε. ただし ideal($\mathcal{F}$) は零次元根基イデアル.

出力: 実零点を丁度 *1* 個含む R^N の超直方体 $\{(\Xi_1^{(j_1)}, \Xi_2^{(j_2)}, ..., \Xi_n^{(j_N)})\}$. の集合.

Step 1 $\mathcal{F}$ のグレブナ基底 $G = \mathrm{GB}(\mathcal{F})$ を求める。

Step 2 G を用い、各 i について x_i の最小多項式 $\phi_i(x_i)$ を求める。

Step 3 各 i について $\phi_i(x_i))$ の実根を精度 ε 以下の区間幅で求める。

Step 4 分離係数条件 *(28)* が成立するように分離写像 Ψ を求める。この際、必要であれば精度をあげるために *Step 3* に戻る。

Step 5 $u = \Psi(x_1, x_2, ..., x_N)$ とし、u_N の最小多項式 $h_N(u_N)$ を求める。

Step 6 $h_N(x_N)$ の実解を区間で求め、解の判定により *(Step 3)* で求めた各変数の根区間のどの組合せが真の根になっているか決定する。

注意 8 *(1)* $\mathcal{I} = \mathrm{ideal}(\mathcal{F})$ が零次元かどうかは *(Step 1)* の結果のグレブナ基底 G により判定できる。また、$1 \in G$ の場合は「解なし」と決定できる。

(2) (Step 2) で得られる各変数に対する最小多項式 $\phi_i(x_i)$ の既約因子を $g_i(x_i)$ としたとき、多項式集合 $G \cup \{g_1(x_1), g_2(x_2), ..., g_N(x_N)\}$ が生成するイデアルは素イデアルで、特に根基となる。これらの組合せのすべてを改めてアルゴリズムの入力としてやれば、入力イデアルが根基でない場合にも対応できる。

(3) さらに、G を用いて $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{I}$ が容易に分かるので、*(Step 5)* で計算する h_N の次数がこの $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{I}$ に一致するかどうかで、分離元であることの確認ができる。そうでなかった場合にも *(Step 4)* に戻ればよい。

4 実例

以下の実行例に用いた計算機環境はつぎのとおりである。

計算機: FreeBSD 4.2/Pentium III 800MHz/256MBytes Memory.// ソフト: asir2000.// 1 変数多項式の求解アルゴリズム: Hilano's Code. *cf.* Hilano, T., Finding Real Zeros of Polynomial with Rational Coefficients.

上記タイミングデータ採取時の分離写像は次の表のとおり。

表 6: Katsura-N (N=4,5,6) のタイミングデータ

許容誤差 $< 10^{-50}$, 時間単位: CPU(秒)+GC(秒)

	Katsura 4	Katsura 5	Katsura 6
実解個数/全解個数	12/16	16/32	32/64
Gröbner 基底	0.024+0.024	0.271+0.224	2.96+2.38
各変数の最小多項式	0.138+0.087	1.277+0.776	11.89+5.74
各変数の求解	0.450+0.038	2.660+1.487	16.98+8.90
分離写像の構成	0.044+0.038	0.079+0.042	0.176+0.057
像の最小多項式	0.101+0.053	1.325+0.515	23.10+4.36
解の判定	0.226+0.156	1.325+0.515	10.08+3.89
全計算時間	1.023+0.599	7.012+3.847	65.19+25.33

表 7: Katsura-N (N=4,5,6) の分離写像

	分離写像 (Ψ)
Katsura-4	$u_0 + 222930u_4 + 50268452u_3 + 16552394309u_2 + 5255214791142u_1$
Katsura-5	$u_0 + 1689u_5 + 1798378u_4 + 2438193864u_3$ $+ 686932631846u_2 + 8192041686253927u_1$
Katsura-6	$u_0 + 16122u_6 + 692801818u_5 + 1907509944054u_4$ $+ 3160345973524626u_3 + 5734589495681955695 2u_2$ $+ 4555115633249552410908 60u_1$

5 結言

分離写像を用いて連立代数方程式の実解を指定された絶対誤差の範囲で求めるアルゴリズムを提案してきた。今回は根の判定を改良し、1 変数多項式の根の分離および精密化に Hilano の Code を用いて高速化を行った。厳密には分離写像が複素分離元を与えない場合のチェックが必要であるが、プログラムには未反映である。根の判定や精度の上げ方についてはまだいくつかの代替案が考えられる。これらについては今後検討したい。

参 考 文 献

[1] Alonzo, M. E., Becker, E., Roy, M.F., Wörmann, T.: Zeros, multiplicities and idempotents for zero dimensional systems, In Gonz/'alez-Vega, L. *et al.* (ed.), *Algorithms in Algebraic Geometry and Applications*, Birkhäuser, Basel, pp.1-16 (1996).

[2] Becker, E., Marinari, M. G., Nora, T., Traverso, C.: The shape of the Shape Lemma, *Proc. ISSAC'91*, ACM Press, 129-133, (1994).

[3] Noro,M., Yokoyama, K.: A Modular Method to Compute the Rational Univariate Representation of Zero-Dimensional Ideals, *J. Symbolic Computation*, Vol.11, (1999).

[4] Yokoyama,T.,Noro,M.,Takeshima,T.: Solutions of Systems of Algebraic Equations and Linear Maps on Residue Class Ring, *J.Symbolic Computatin* Vol.14, pp. 399-417, (1992).

[5] 齋藤 友克, 野田 松太郎: 代数方程式系のゼロ次元の解の存在位置の判定, 数式処理, Vol.6, No.1, pp.4-5, (1997).

[6] 齋藤 友克, 野田 松太郎: 2 変数代数方程式の実特異点を含む区間の決定, *Proc. 2nd Risa Consortium*, pp. 131-139, (1998).

[7] 沢田 浩之: 新たな条件式の導入による多変数連立代数方程式の解法, 情報処理学会論文誌, Vol.36, No.12, pp.2761-2770, (1995).