数理解析研究所講究録
1199 巻 2001 年 149-159

連立多項式の近似根の計算法について

山口大学教育学部　北本　卓也(Takuya KITAMOTO) *

1　序論

$\boldsymbol{x} = \left[\begin{array}{ccc} x_1 & \cdots & x_n \end{array} \right]^T$ を変数、α をパラメータとする多項式系 $f_i(\boldsymbol{x})$ $(i = 1, ..., n)$ が与えられたとする. このとき、$f_1(\boldsymbol{x}) = \cdots = f_n(\boldsymbol{x}) = 0$ の根、$\boldsymbol{x} = \left[\begin{array}{ccc} \eta_1(\alpha) & \cdots & \eta_n(\alpha) \end{array} \right]^T$ は α の代数関数となるが、関数 $\eta_i(\alpha)$ の $\alpha = \alpha_0$ での級数展開を考える. $f_i(\boldsymbol{x})$ $(i = 1, .., n)$ に $\alpha = \alpha_0$ を代入したときの $\boldsymbol{x}$ の根が 0 次元であり、その 1 つを $\boldsymbol{x} = \left[\begin{array}{ccc} \eta_{1,0} & \cdots & \eta_{n,0} \end{array} \right]$ とするとき、次の Jacobian J

$$J = \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right] \tag{1}$$

が正則である正則点の級数展開は、整数べきでの展開となり、第 2 章で述べるように多変数のニュートン法を用いて計算できる.

Jacobian J が正則でない点、つまり特異点での展開は分数べきの級数 (Puiseux 級数) となることが知られている. 第 3 章では、このような特異点での級数展開の計算法を述べる.

2　正則点での展開

$f_i(\boldsymbol{x})$ $(i = 1, .., n)$ に $\alpha = \alpha_0$ を代入したときの $\boldsymbol{x}$ の根が 0 次元であり、その 1 つを $\boldsymbol{x} = \left[\begin{array}{ccc} \eta_{1,0} & \cdots & \eta_{n,0} \end{array} \right]$ とするとき、次の Jacobian J

$$J = \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right] \tag{2}$$

*kitamoto@po.cc.yamaguchi-u.ac.jp

が正則であるとする. このとき、$f_1(\boldsymbol{x}) = \cdots = f_n(\boldsymbol{x}) = 0$ の根、$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \eta_1(\alpha) & \cdots & \eta_n(\alpha) \end{bmatrix}^T$ は α の代数関数となるが、関数 $\eta_i(\alpha)$ の $\alpha = \alpha_0$ での級数展開は、次のアルゴリズムで計算できることが知られている.

アルゴリズム 1

多変数多項式の正則点での近似根の計算法

入力 : $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$ を変数、
α をパラメータとする多項式 $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} f_1 & \cdots & f_n \end{bmatrix}^T$
正則点 $\boldsymbol{x} = \Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)} = \begin{bmatrix} \eta_{1,0} & \cdots & \eta_{n,0} \end{bmatrix}^T$、
この正則点をとる時のパラメータ α の値 α_0
出力 : 連立多項式の k 次の近似根 $\eta_i^{(k)}$ $(i = 1, ..., n)$;
条件 : Jacobian J が展開点において正則である.

Step 1 $J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})$ の逆行列 P を計算する. $m \leftarrow 0$, $\boldsymbol{\eta}^{(0)} \leftarrow \begin{bmatrix} \eta_{1,0} & \cdots & \eta_{n,0} \end{bmatrix}$ とおく.

Step 2 次式より $\boldsymbol{\eta}^{(m+1)}$ を計算する. ただし、$\lfloor F(\boldsymbol{\eta}^{(m)}) \rfloor_{m+1}$ は $F(\boldsymbol{\eta}^{(m)})$ の α^{m+1} の係数からなる定数ベクトルである.

$$\boldsymbol{\eta}^{(m+1)} \leftarrow \boldsymbol{\eta}^{(m)} + \alpha^{m+1} P \lfloor F(\boldsymbol{\eta}^{(m)}) \rfloor_{m+1}$$

Step 3 $m = k$ ならば $\boldsymbol{\eta}^{(m)}$ を返す. そうでなければ、$m \leftarrow m+1$ とおいて *Step* 2 へ行く.

3 特異点での展開

3.1 定義

F を要素が関数 $f_i(x_1, ..., x_n)$ $(i = 1, ..., n)$ である n 次元ベクトル $\begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) & \cdots & f_2(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}^T$ とする. 作用素 $\Phi(z)$, $(z = \begin{bmatrix} z_1 & \cdots & z_n \end{bmatrix}^T \in \mathbf{C}^n)$ を

$$\Phi(z) \stackrel{\text{def}}{=} z_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + z_n \frac{\partial}{\partial x_n} \tag{3}$$

のように定義する. 容易に確かめられるように作用素 $\Phi(z)$ は次の性質を満たす.

(P1) $\Phi(\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2) = \alpha_1 \Phi(\boldsymbol{u}_1) + \alpha_2 \Phi(\boldsymbol{u}_2)$ (ただし $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{C}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in \mathbf{C}^n$)

(P2) $\Phi(\boldsymbol{u}_1)\Phi(\boldsymbol{u}_2) = \Phi(\boldsymbol{u}_2)\Phi(\boldsymbol{u}_1)$ (ただし $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in \mathbf{C}^n$)

(P3) $\Phi(\alpha \boldsymbol{u})^k = \alpha^k \Phi(\boldsymbol{u})^k$ (ただし $\alpha \in \mathbf{C}, \boldsymbol{u} \in \mathbf{C}^n$)

(P4) $\Phi(\boldsymbol{u}_1)F(\boldsymbol{u}_2) = J(\boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_1$ (ただし、$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in \mathbf{C}^n$ で $J(\boldsymbol{u})$ は (i,j) 要素が $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{u})$ で与えられる行列)

標準的な微積分のテキストあるように $F(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})$ は次のようにテイラー展開できる.

$$F(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}) + \Phi(\Delta\boldsymbol{x})F(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2!}\Phi(\Delta\boldsymbol{x})^2 F(\boldsymbol{x}) + \cdots + \frac{1}{k!}\Phi(\Delta\boldsymbol{x})^k F(\boldsymbol{x}) + \cdots \quad (4)$$

$f_i(\boldsymbol{x})$ は x_i $(i=1,...,n)$ の多項式なので、実際には上式は無限級数とはならずに、ある自然数 q が存在して

$$F(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}) + \Phi(\Delta\boldsymbol{x})F(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2!}\Phi(\Delta\boldsymbol{x})^2 F(\boldsymbol{x}) + \cdots + \frac{1}{q!}\Phi(\Delta\boldsymbol{x})^q F(\boldsymbol{x}) \quad (5)$$

が成り立つ.

3.2 問題設定

$F(\boldsymbol{x}) = 0$ の根 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \eta_1(\alpha) & \cdots & \eta_n(\alpha) \end{bmatrix}^T$ の $\alpha = \alpha_0$ での級数展開を考える. $f_i(\boldsymbol{x})$ $(i = 1,..,n)$ に $\alpha = \alpha_0$ を代入したときの $\boldsymbol{x}$ の根が 0 次元であり、その 1 つを $\boldsymbol{x} = \Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)} = \begin{bmatrix} \eta_{1,0} & \cdots & \eta_{n,0} \end{bmatrix}$ とする. 本節では、以下の条件を満たす場合の Puiseux 級数の計算法を取り扱う.

(i) Jacobian $J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})$ のランクが $n-1$ である.

(ii) ベクトル $\Phi^2(\mathbf{h})F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})$ が、$J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})$ の列ベクトルの線形結合で表されない、すなわち線形独立である. ただし、$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_n \end{bmatrix}^T$ は Jacobian $J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})$ の零空間の基底、すなわち

$$J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})\mathbf{h} = 0$$

を満たすベクトルである ((i) の条件より、このようなベクトルは定数倍を除いて一意である).

後に示すように、この場合には $\eta_i(\alpha)$ は $(\alpha-\alpha_0)^{\frac{1}{2}}$ のべき級数

$$\eta_i(\alpha) = \eta_{i,0} + \eta_{i,1}(\alpha-\alpha_0)^{\frac{1}{2}} + \eta_{i,2}(\alpha-\alpha_0) + \eta_{i,3}(\alpha-\alpha_0)^{\frac{3}{2}} + \cdots \quad (\eta_{i,l} \in \mathbf{C}) \quad (6)$$

の形に展開できる. ここでは (6) の係数 $\eta_{k,l}$ の計算法を述べる. 以下では、次の記法を用いる.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\eta}^{(k)} &= \begin{bmatrix} \eta_1^{(k)}(\alpha) & \cdots & \eta_n^{(k)}(\alpha) \end{bmatrix}^T \\
\eta_i^{(k)} &= \eta_{i,0} + \eta_{i,1}(\alpha-\alpha_0)^{\frac{1}{2}} + \eta_{i,2}(\alpha-\alpha_0) + \cdots + \eta_{i,k}(\alpha-\alpha_0)^{\frac{k}{2}} \quad (\eta_{i,j} \in \mathbf{C}) \\
\Delta\boldsymbol{\eta}^{(j)} &= \begin{bmatrix} \eta_{1,j} & \cdots & \eta_{n,j} \end{bmatrix}^T
\end{aligned}$$

容易に確認できるように

$$\boldsymbol{\eta}^{(k)} = \Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)} + \Delta\boldsymbol{\eta}^{(1)}(\alpha-\alpha_0)^{\frac{1}{2}} + \cdots + \Delta\boldsymbol{\eta}^{(k)}(\alpha-\alpha_0)^{\frac{k}{2}} + \cdots \tag{7}$$

である. また、$\lfloor f \rfloor_{(\alpha-\alpha_0)^{\frac{m}{2}}}$ で f を $(\alpha-\alpha_0)$ のべき級数に展開したときの $(\alpha-\alpha_0)^{\frac{m}{2}}$ の係数を表す. 例えば、上式の $\eta_i^{(k)}$ に対しては

$$\lfloor \eta_i^{(k)} \rfloor_{(\alpha-\alpha_0)^{\frac{m}{2}}} = \eta_{i,m}$$

である. 表記の簡単のため、以下では一般性を失うことなく、$\alpha_0 = 0$ とする.

3.3 アルゴリズム

3.3.1 導出

今、$F(\boldsymbol{x}) = 0$ を満たす根 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \eta_1(\alpha) & \cdots & \eta_n(\alpha) \end{bmatrix}^T$ の級数展開が (6) で与えられ、定数部 $\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}$ は既に求まっているとする. このとき、$\Delta\boldsymbol{\eta}^{(k)}$ $(k = 1, 2, \cdots)$ を次のように計算する.

(4) において $\boldsymbol{x} = \Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}$, $\Delta\boldsymbol{x} = \Delta\boldsymbol{\eta}^{(1)}\alpha^{\frac{1}{2}} + \Delta\boldsymbol{\eta}^{(2)}\alpha$ とおき、両辺の $\alpha^{\frac{1}{2}}, \alpha$ の係数を比較すると、それぞれ

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(1)})F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) && (8)\\ 0 &= \lfloor F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) \rfloor_\alpha + \Phi(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(2)})F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) + \frac{1}{2}\Phi(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(1)})^2 F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) && (9) \end{aligned}$$

を得る. 作用素の性質 P4 より、

$$\Phi(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(1)})F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) = J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})\Delta\boldsymbol{\eta}^{(1)} \tag{10}$$

であるから、これを (8) に代入すると、

$$0 = J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})\Delta\boldsymbol{\eta}^{(1)} \tag{11}$$

となり、$\Delta\boldsymbol{\eta}^{(1)}$ は $J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})$ の零空間に含まれる事がわかる. 問題設定の条件 (i) より $J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})$ の零空間の次元は 1 次元であり、その基底は h であるから $\Delta\boldsymbol{\eta}^{(1)}$ は

$$\Delta\boldsymbol{\eta}^{(1)} = t\mathbf{h} \tag{12}$$

(ただし、t は定数) と書ける. ここで一般性を失うことなく、$h_n \neq 0$ と仮定する（ただし、h_n は $\mathbf{h}$ の第 n 要素である）. (9) については作用素の性質 P3,P4 より

$$\begin{aligned} \Phi(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(2)})F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) &= J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})\Delta\boldsymbol{\eta}^{(2)}\\ \frac{1}{2}\Phi(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(1)})^2 F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) &= \frac{1}{2}t^2\Phi(\mathbf{h})^2 F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) \end{aligned}$$

であるから、

$$J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})\Delta\boldsymbol{\eta}^{(2)}+\frac{1}{2}t^2\Phi(\mathbf{h})^2F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})=-\lfloor F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})\rfloor_\alpha \tag{13}$$

となる. ここで、$h_n\neq 0$ の仮定より、$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_{n-1},\mathbf{h}$ は基底であるので、$\Delta\boldsymbol{\eta}^{(2)}$ を次のように書き表すことができる（ただし、$\xi_{i,2}$ は未知変数）.

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{\eta}^{(2)} &= \xi_{1,2}\boldsymbol{e}_1+\cdots+\xi_{n-1,2}\boldsymbol{e}_{n-1}+\xi_{n,2}\mathbf{h}\\ &= \begin{bmatrix}\xi_{1,2} & \cdots & \xi_{n-1,2} & 0\end{bmatrix}^T+\xi_{n,2}\mathbf{h}\end{aligned}$$

これを (13) に代入し、$J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})\mathbf{h}=0$ に注意すると

$$\begin{bmatrix}J_1(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) & \cdots & J_{n-1}(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) & \frac{1}{2}\Phi(\mathbf{h})^2F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_{1,2}\\ \vdots\\ \xi_{n-1,2}\\ t^2\end{bmatrix}=-\lfloor F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})\rfloor_\alpha \tag{14}$$

を得る（ただし、$J_i(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})$ は $J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})$ の第 i 列である）. 問題設定における仮定より上式の左辺の行列は正則であるので、その逆行列が存在する. よって

$$\begin{bmatrix}u_1 & \cdots & u_n\end{bmatrix}^T=-\begin{bmatrix}J_1(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) & \cdots & J_{n-1}(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) & \frac{1}{2}\Phi(\mathbf{h})^2F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})\end{bmatrix}^{-1}\lfloor F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})\rfloor_\alpha \tag{15}$$

とおけば、

$$\begin{bmatrix}\xi_{1,2} & \cdots & \xi_{n-1,2} & t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1 & \cdots & u_{n-1} & \pm\sqrt{u_n}\end{bmatrix} \tag{16}$$

を得る. 以上より $\boldsymbol{\eta}^{(1)}$ は

$$\boldsymbol{\eta}^{(1)}=\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}+t\alpha^{\frac{1}{2}}\mathbf{h} \tag{17}$$

とかける. また $\Delta\boldsymbol{\eta}^{(2)}$ は

$$\Delta\boldsymbol{\eta}^{(2)} = \mathbf{k}^{(2)}+\xi_{n,2}\mathbf{h} \tag{18}$$

$$\mathbf{k}^{(2)} = \begin{bmatrix}u_1 & \cdots & u_{n-1} & 0\end{bmatrix}^T \tag{19}$$

とかける. ただし、上式右辺の $u_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ は (15) で定義されたものであり、$\xi_{n,2}$ は未知変数である. 次に (4) において $x=\boldsymbol{\eta}^{(1)},\Delta x=\alpha\Delta\boldsymbol{\eta}^{(2)}+\alpha^{\frac{3}{2}}\Delta\boldsymbol{\eta}^{(3)}$ とおくと

$$0=F(\boldsymbol{\eta}^{(1)})+\Phi(\alpha\Delta\boldsymbol{\eta}^{(2)}+\alpha^{\frac{3}{2}}\Delta\boldsymbol{\eta}^{(3)})F(\boldsymbol{\eta}^{(1)})+\frac{1}{2}\Phi(\alpha\Delta\boldsymbol{\eta}^{(2)}+\alpha^{\frac{3}{2}}\Delta\boldsymbol{\eta}^{(3)})^2F(\boldsymbol{\eta}^{(1)})+\cdots \tag{20}$$

となるが、右辺の第 3 項以降は $\alpha^{\frac{3}{2}}$ の係数には影響しない. また、第 1,2 項は作用素の性質

P1〜P4より

$$
\begin{aligned}
\Phi(\alpha\Delta\boldsymbol{\eta}^{(2)} + \alpha^{\frac{3}{2}}\Delta\boldsymbol{\eta}^{(3)})F(\boldsymbol{\eta}^{(1)}) & \qquad\qquad (21)\\
&= \alpha\Phi(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(2)})F(\boldsymbol{\eta}^{(1)}) + \alpha^{\frac{3}{2}}\Phi(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(3)})F(\boldsymbol{\eta}^{(1)})\\
F(\boldsymbol{\eta}^{(1)}) &= F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)} + \alpha^{\frac{1}{2}}t\mathbf{h})\\
&= F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) + \Phi(\alpha^{\frac{1}{2}}t\mathbf{h})F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) + \frac{1}{2}\Phi(\alpha^{\frac{1}{2}}t\mathbf{h})^2F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) + \cdots\\
&= F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) + \alpha^{\frac{1}{2}}t\Phi(\mathbf{h})F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) + \frac{1}{2}\alpha t^2\Phi(\mathbf{h})^2F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) + \cdots\\
\Phi(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(2)}) &= \Phi(\mathbf{k}^{(2)} + \xi_{n,2}\mathbf{h})\\
&= \Phi(\mathbf{k}^{(2)}) + \xi_{n,2}\Phi(\mathbf{h}) \qquad (22)
\end{aligned}
$$

となるので(20)の両辺の $\alpha^{\frac{3}{2}}$ の係数を比較すると

$$
0 = \lfloor F(\boldsymbol{\eta}^{(1)})\rfloor_{\alpha^{\frac{3}{2}}} + \left(\Phi(\mathbf{k}^{(2)}) + \xi_{n,2}\Phi(\mathbf{h})\right)t\Phi(\mathbf{h})F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) + \Phi(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(3)})F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) \qquad (23)
$$

を得る. ここで(14)と同様に $\Delta\boldsymbol{\eta}^{(3)}$ を

$$
\begin{aligned}
\Delta\boldsymbol{\eta}^{(3)} &= \mathbf{k}^{(3)} + \xi_{n,3}\mathbf{h}\\
\mathbf{k}^{(3)} &\overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \xi_{1,3} & \cdots & \xi_{n-1,3} & 0 \end{bmatrix}^T
\end{aligned} \qquad (24)
$$

と表すと

$$
\Phi(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(3)}) = \Phi(\mathbf{k}^{(3)}) + \xi_{n,3}\Phi(\mathbf{h}) \qquad (25)
$$

となる. これを(23)に代入し整理すると

$$
\begin{aligned}
&\xi_{n,2}t\Phi(\mathbf{h})^2F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) + J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})\mathbf{k}^{(3)} + \xi_{n,3}J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})\mathbf{h} \qquad (26)\\
&= -\lfloor F(\boldsymbol{\eta}^{(1)})\rfloor_{\alpha^{\frac{3}{2}}} - t\Phi(\mathbf{k}^{(2)})\Phi(\mathbf{h})F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) \qquad (27)
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{k}^{(2)})\Phi(\mathbf{h})F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) &= \Phi(\mathbf{h})J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})\mathbf{k}^{(2)}\\
J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})\mathbf{h} &= 0
\end{aligned}
$$

に注意すると(26)は

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} J_1(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) & \cdots & J_{n-1}(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) & t\Phi(\mathbf{h})^2F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{1,3} \\ \vdots \\ \xi_{n-1,3} \\ \xi_{n,2} \end{bmatrix}\\
&= -\lfloor F(\boldsymbol{\eta}^{(1)})\rfloor_{\alpha^{\frac{3}{2}}} - t\Phi(\mathbf{h})J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})\mathbf{k}^{(2)} \qquad (28)
\end{aligned}
$$

問題設定の仮定より左辺の行列は正則であり、上式の解 $\xi_{1,3},\ldots,\xi_{n-1,3},\xi_{n,2}$ は一意に定まる. 以上より

$$\boldsymbol{\eta}^{(2)}=\boldsymbol{\eta}^{(1)}+\alpha(\mathbf{k}^{(2)}+\xi_{n,2}\mathbf{h}) \tag{29}$$

が計算された. また $\Delta\boldsymbol{\eta}^{(3)}$ は (28) の解 $\xi_{1,3},\ldots,\xi_{n-1,3}$ を用いて

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{\eta}^{(3)} &= \mathbf{k}^{(3)}+\xi_{n,3}\mathbf{h}\\ \mathbf{k}^{(3)} &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix}\xi_{1,3} & \cdots & \xi_{n-1,3} & 0\end{bmatrix}^T\end{aligned}$$

と書ける（ただし、$\xi_{n,3}$ は未知変数）.

以下同様にして、$\Delta\boldsymbol{\eta}^{(m+1)}$ が

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{\eta}^{(m+1)} &= \mathbf{k}^{(m+1)}+\xi_{n,k}\mathbf{h}\\ \mathbf{k}^{(m+1)} &= \begin{bmatrix}\xi_{1,3} & \cdots & \xi_{n-1,3} & 0\end{bmatrix}^T\end{aligned}$$

（ただし、$\xi_{n,k}$ は未知変数）の形で求まり、$\boldsymbol{\eta}^{(m)}$ も求まったならば、$\Delta\boldsymbol{\eta}^{(m+2)}$ と $\boldsymbol{\eta}^{(m+1)}$ を次のように計算できる.

(I) 線形方程式

$$A\begin{bmatrix}\xi_{1,m+2}\\ \vdots\\ \xi_{n-1,m+2}\\ \xi_{n,m+1}\end{bmatrix} = -\lfloor F(\boldsymbol{\eta}^{(m)})\rfloor_{\alpha^{\frac{m+2}{2}}}-t\Phi(\mathbf{h})J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})\mathbf{k}^{(m+1)} \tag{30}$$

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix}J_1(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) & \cdots & J_{n-1}(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) & t\Phi(\mathbf{h})^2F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})\end{bmatrix} \tag{31}$$

を解いて、$\xi_{1,m+1},\cdots,\xi_{n-1,m+1},\xi_{n,m}$ を求める (問題設定の仮定より、上式は一意解を持つ）.

(II) $\Delta\boldsymbol{\eta}^{(m+2)},\boldsymbol{\eta}^{(m+1)}$ を次式で計算する.

$$\begin{aligned}\mathbf{k}^{(m+2)} &= \begin{bmatrix}\eta_{1,m+2} & \cdots & \eta_{n-1,m+2} & 0\end{bmatrix}^T\\ \Delta\boldsymbol{\eta}^{(m+2)} &= \mathbf{k}^{(m+2)}+\xi_{n,m+1}\mathbf{h}\\ \boldsymbol{\eta}^{(m+1)} &= \boldsymbol{\eta}^{(m)}+\alpha^{\frac{m+1}{2}}(\mathbf{k}^{(m+1)}+\xi_{n,m+1}\mathbf{h})\end{aligned}$$

上の (I),(II) を繰り返すことによって $\boldsymbol{\eta}^{(m)}$ を任意の次数まで計算することが可能である.

3.4 アルゴリズムの記述

アルゴリズム 2

多変数多項式の特異点での近似根の計算法

入力 : $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$ を変数、

α をパラメータとする多項式 $F = \begin{bmatrix} f_1 & \cdots & f_n \end{bmatrix}^T$

特異点 $\boldsymbol{x} = \Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)} = \begin{bmatrix} \eta_{1,0} & \cdots & \eta_{n,0} \end{bmatrix}^T$、

この特異点をとる時のパラメータ α の値 α_0

出力 : 連立多項式の近似根の Puiseux 級数展開;

条件 : 条件 (i),(ii)

Step 1 $J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})$ の零空間の基底 $\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 & \cdots & h_n \end{bmatrix}^T$ を求める. 以下では一般性を失うことなく、$h_n \neq 0$ と仮定する.

Step 2 $J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})$ と $\Phi^2(\mathbf{h})F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})$ を計算し、$\Phi^2(\mathbf{h})F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})$ が $J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})$ の各列と線形かどうかをチェックする. もし、線形独立でなければこのアルゴリズムは適用できないので、「アルゴリズム適用不可」を返す. 以下では $J_i(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})$ は $J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})$ の第 i 列を表すものとする.

Step 3 次の線形方程式を $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^T$ について解く.

$$\begin{bmatrix} J_1(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) & \cdots & J_{n-1}(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) & \frac{1}{2}\Phi^2(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}F(\boldsymbol{\eta}^{(0)}) \end{bmatrix} \boldsymbol{y} = -\lfloor F(\boldsymbol{\eta}^{(0)}) \rfloor_{\alpha-\alpha_0} \tag{32}$$

ベクトル $\mathbf{k}^{(2)}$ を $\mathbf{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_{n-1} & 0 \end{bmatrix}^T$、$t$ を $t = \sqrt{y_n}$ と置く. 上の線型方程式が $\boldsymbol{y}$ に関して唯一解を持つことは、先に述べた条件 (i),(ii) より保証されている.

Step 4 $\boldsymbol{\eta}^{(1)}$ を次のように置き、

$$\boldsymbol{\eta}^{(1)} = \boldsymbol{\eta}^{(0)} + t(\alpha - \alpha_0)^{\frac{1}{2}}\mathbf{h} \tag{33}$$

$m = 1$ と置く.

Step 5 次の線形方程式を $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^T$ について解く.

$$A\boldsymbol{y} = -\lfloor F(\boldsymbol{\eta}^{(m)}) \rfloor_{(\alpha-\alpha_0)^{\frac{m+2}{2}}} - t\Phi(\mathbf{h})J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})\mathbf{k}^{(m+1)} \tag{34}$$

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} J_1(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) & \cdots & J_{n-1}(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) & t\Phi(\mathbf{h})^2F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) \end{bmatrix} \tag{35}$$

ベクトル $\mathbf{k}^{(m+2)}$ を $\mathbf{k}^{(m+2)} = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_{n-1} & 0 \end{bmatrix}^T$、$\xi_{n,m+1}$ を $\xi_{n,m+1} = y_n$ と置く. 上の線型方程式が $\boldsymbol{y}$ に関して唯一解を持つことは、先に述べた条件 (i),(ii) より保証されている.

Step 6 $\boldsymbol{\eta}^{(m+1)}$ を次式で計算する.

$$\boldsymbol{\eta}^{(m+1)} = \boldsymbol{\eta}^{(m)} + (\alpha-\alpha_0)^{\frac{m+1}{2}}\left(\mathbf{k}^{(m+1)} + \xi_{n,m+1}\mathbf{h}\right) \tag{36}$$

Step 7 m が十分大きければ、$\boldsymbol{\eta}^{(m)}$ を近似根として返す. そうでなければ、m を 1 つ増やし、*Step* 5 へ行く.

3.5 数値例

$F(\boldsymbol{x})$ を次のように置き、

$$F(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 + x_1 + \alpha x_1 + x_2 + \alpha - 3 \\ x_2^2 - x_1x_2 - 2 + \alpha x_2 - \alpha \end{bmatrix} \tag{37}$$

3 次の近似根 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} (\eta_1^{(3)}(\alpha) & \eta_2^{(3)}(\alpha)) \end{bmatrix}^T$ の $\alpha_0 = -2.28471$ の級数展開を計算する. $\alpha = \alpha_0$ とおき、$F(\boldsymbol{x}) = 0$ を解くと、$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -0.346817 & -0.335927 \end{bmatrix}^T$ を得る. $\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)} = \begin{bmatrix} -3.46817 & -0.335927 \end{bmatrix}^T$ とおくと、Jacobian J は

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + \alpha + 1 & 1 + x_1 \\ -x_2 & -x_1 + 2x_2 + \alpha \end{bmatrix} \tag{38}$$

であるので、

$$J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) = \begin{bmatrix} -1.62064 & -2.46817 \\ 0.335927 & 0.511604 \end{bmatrix} \tag{39}$$

であるが、上の $J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})$ は正則でないので、$\boldsymbol{x} = \Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}$ は特異点である. よってアルゴリズム 2 を用いて、近似根の Puiseux 級数を計算する.

Step 1 $J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})$ の零空間の基底 $\mathbf{h}$ を求めると

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} -0.835908 & 0.54887 \end{bmatrix}^T \tag{40}$$

を得る.

Step 2 $\Phi^2(\mathbf{h})F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})$ は

$$\begin{aligned} \Phi^2(\mathbf{h})F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 x_2}(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})h_1h_2 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2}(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})h_2^2 \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2}(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 x_2}(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})h_1h_2 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2}(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})h_2^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0.917609 \\ 1.52013 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であるので、$\Phi(\mathbf{h})^2F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})$ と $J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})$ の各列は線形独立である. よってアルゴリズムは適用可能である.

Step 3

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} J_1 & \frac{1}{2}\Phi(\mathbf{h})^2 F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1.62064 & -0.458805 \\ 0.335927 & 0.760063 \end{bmatrix} \\
-\lfloor F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) \rfloor_{(\alpha-\alpha_0)} &= \begin{bmatrix} 2.46817 \\ 1.33593 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{41}
$$

であるから、ベクトル $\boldsymbol{y}$ は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y} &= \begin{bmatrix} -1.62064 & -0.458805 \\ 0.335927 & 0.760063 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2.46817 \\ 1.33593 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2.30953 \\ 2.77841 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{42}
$$

と計算される. $\mathbf{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} -2.30953 & 0 \end{bmatrix}^T$, $t = \sqrt{2.77841} = 1.6685$ と置く.

Step 4 $\boldsymbol{\eta}^{(1)}$ を次のように計算し、$m = 1$ と置く.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\eta}^{(1)} &= \boldsymbol{\eta}^{(0)} + t(\alpha-\alpha_0)^{\frac{1}{2}}\mathbf{h} \\
&= \begin{bmatrix} -3.46817 - 1.39334(\alpha-\alpha_0)^{\frac{1}{2}} \\ -0.335927 + 0.914886(\alpha-\alpha_0)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Step 5

$$
\begin{aligned}
&\Phi(\mathbf{h})J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})\mathbf{k}^{(2)} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})h_1 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 x_2}(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})h_2 & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 x_2}(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})h_1 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2}(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})h_2 \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2}(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})h_1 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 x_2}(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})h_2 & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 x_2}(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})h_1 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2}(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})h_2 \end{bmatrix} \mathbf{k}^{(2)} \\
&= \begin{bmatrix} 0.54887 & -0.835908 \\ 0.287038 & 1.93365 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.30953 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1.2676 \\ -0.66292 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{43}
$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} J_1 & t\Phi(\mathbf{h})^2 F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1.62064 & -1.52952 \\ 0.335927 & 2.53383 \end{bmatrix} \\
-\lfloor F(\boldsymbol{\eta}^{(1)}) \rfloor_{\alpha-\alpha_0}^{\frac{3}{2}} - t\Phi(\mathbf{h})J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})\mathbf{k}^{(2)} &= \begin{bmatrix} 3.5063 \\ -3.02785 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

となり、$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} -1.18388 & -1.03801 \end{bmatrix}^T$ を得る.

よって $\mathbf{k}^{(3)} = \begin{bmatrix} -1.18388 & 0 \end{bmatrix}$, $\xi_{2,2} = -1.18388$ と置く.

Step 6 $\boldsymbol{\eta}^{(2)}$ を次式で計算する.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}^{(2)} &= \boldsymbol{\eta}^{(1)} + \left(\mathbf{k}^{(2)} + \boldsymbol{\eta}_{2,2}\mathbf{h}\right)(\alpha - \alpha_0) \\ &= \begin{bmatrix} -3.46817 - 1.39334(\alpha-\alpha_0)^{\frac{1}{2}} - 1.44185(\alpha-\alpha_0) \\ -0.335927 + 0.914886(\alpha-\alpha_0)^{\frac{1}{2}} - 0.569735(\alpha-\alpha_0) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Step 7 $m \leftarrow 2$ とし、*Step* 5 へ行く.

Step 5

$$-\lfloor F(\boldsymbol{\eta}^{(2)})\rfloor_{(\alpha-\alpha_0)^2} - t\Phi(\mathbf{h})J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})\mathbf{k}^{(3)} = \begin{bmatrix} 3.5063 \\ -3.02785 \end{bmatrix}$$

より、$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} -1.19443 & 0.15184 \end{bmatrix}^T$ となるので、

$$\mathbf{k}^{(4)} = \begin{bmatrix} -1.19443 & 0 \end{bmatrix}^T,\ \xi_{2,3} = 0.15184$$

と置く.

Step 6 $\boldsymbol{\eta}^{(3)}$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}^{(3)} &= \boldsymbol{\eta}^{(2)} + \left(\mathbf{k}^{(3)} + \xi_{2,3}\mathbf{h}\right)(\alpha - \alpha_0)^{\frac{3}{2}} \\ &= \begin{bmatrix} -3.46817 - 1.39334(\alpha-\alpha_0)^{\frac{1}{2}} - 1.44185(\alpha-\alpha_0) - 1.3108(\alpha-\alpha_0)^{\frac{3}{2}} \\ -0.335927 + 0.914886(\alpha-\alpha_0)^{\frac{1}{2}} - 0.569735(\alpha-\alpha_0) + 0.0833405(\alpha-\alpha_0)^{\frac{3}{2}} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

となる.

Step 7 $m = 3$ なので、$\boldsymbol{\eta}^{(3)}$ を近似根として返す.