数理解析研究所講究録 1351 巻 2004 年 41-48

間隙級数の一様型重複対数の法則について

福山 克司（神戸大学理学部）

0. 一様型重複対数の法則の由来

数列 $\{x_n\} \subset [0,1)$ に対して、その漸近分布の一様分布からの隔たりを与える指標として discrepancy という量 (正確には discrepancy の変形) が以下のように与えられる。

$$D_N^* = \sup_{0\le t\le 1}\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\mathbf{1}_{[0,t]}(x_n) - t\right|.$$

点 $x_1, \ldots, x_N$ に等確率を与えて得られる確率測度 $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\delta_{x_n}$ の分布関数 F_N と一様分布の分布関数 F_u を用いると

$$D_N^* = \|F_N - F_u\|_\infty$$

と書けるので、当然 $\{x_n\}$ が一様分布するなら、即ち $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\delta_{x_n}$ の法則が一様分布に収束するならば $D_N \to 0$ であることが判る。

$\{\xi_k\}$ が一様分布に従う独立確率変数列であるときには経験分布 $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\delta_{\xi_n}$ は一様分布に収束することが大数の法則より判り、$\|F_N - F_u\|_\infty \to 0$ 即ち $D_N \to 0$ が導かれるが、Chung-Smirnov の定理 [Chu1949] によればその収束の速さは

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{\sqrt{2N}D_N^*}{\sqrt{\log\log N}} = 1 \quad \text{a.s.}$$

という程度であると判る。

数列 $\{n_k\}$ が与えられたとき、ほとんど全ての x に対する $\{n_k x\}$ の漸近的な性質を調べる研究が Metric Number Theory の名の下でなされているが、そのもっとも古典的な結果は $\inf_{k\ne j}|n_k - n_j| > 0$ なら $\{\langle n_k x\rangle\}$ がほとんど全ての x に対して一様分布することを主張する Weyl の定理 [Wey1916] である。

この Weyl の主張の Chung-Smirnov 式の精密化が Philipp [Phi1975] によりなされており、Hadamard の間隙条件

$$n_{k+1}/n_k \geq 1+\rho \qquad (\rho > 0)$$

をみたす自然数列 $\{n_k\}$ に対して $\{\langle n_k x\rangle\}$ の Discrepancy D_N^* が

$$\frac{1}{4} \leq \limsup_{N\to\infty} \frac{\sqrt{N} D_N^*}{\sqrt{\log\log N}} < 166 + 664((1+\rho)^{1/2}-1)^{-1} \quad \text{a.e.}$$

に従うことを示している。

試みにここで現れる量を書き変えてみると

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\sqrt{2N} D_N^*}{\sqrt{\log\log N}} = \limsup_{N\to\infty} \sup_{0\leq t\leq 1} \left| \frac{\sum_{k=1}^N (\mathbf{1}_{[0,t]}(\langle n_k x\rangle) - t)}{\sqrt{N\log\log N/2}} \right|$$

となるので、この定理は重複対数の法則の上からの評価が函数の族

$$\mathscr{F}_I = \{\mathbf{1}_{[0,t]}(\langle\cdot\rangle) - t \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

上で一様に成り立つことを主張する定理であることが判る。

このような文脈で Kaufman-Philipp [KaP1978] は

$$\Psi[\mathscr{F};\{n_k x\}] = \overline{\lim_{K\to\infty}} \sup_{f\in\mathcal{F}} \frac{\sum_{k=1}^K f(n_k x)}{\sqrt{K\log\log K}}$$

について研究することを試みた。ここで、$\mathscr{F}$ は

$$f(x+1) = f(x), \quad \int_0^1 f(x)^2\,dx < \infty, \quad \text{and} \quad \int_0^1 f(x)\,dx = 0$$

をみたす可測関数 f の族 L_0^2 の部分族である。

Philipp の結果は Hadamard gap の下で $\Psi[\mathscr{F}_I;\{n_k x\}] < C$ a.e. を示したことになるが、Koksma の不等式を用いると $\Psi[\mathrm{BV};\{n_k x\}] < C$ a.e. も導かれる。ここで BV は L_0^2 に属する総変動が 1 以下の有界変動函数全体の族である。

Kaufman-Philipp の結果は以下の通りである。$\{n_k\}$ が Hadamard gap をもつなら $\Lambda_\alpha = \{f \in L_0^2 \mid |f(t+h) - f(t)| \le |h|^\alpha\} \subset \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(\alpha > 1/2)$, に対して

$$\operatorname*{ess\,sup}_x \Psi[\Lambda_\alpha; \{n_k x\}] < \infty$$

が成り立つ。Takahashi [Tak1962] により全ての $\alpha > 0$ に対して

$$\operatorname*{ess\,sup}_x \Psi[\{f\}; \{n_k x\}] < \infty \quad \text{for all} \quad f \in \Lambda_\alpha$$

が示されているにもかかわらず、$\alpha < 1/2$ の時には

$$\operatorname*{ess\,sup}_x \Psi[\Lambda_\alpha; \{n_k x\}] = \infty$$

となることも Kaufman-Philipp は示しており、$\alpha < 1/2$ の時の事情は大変複雑であると知れる。さらに境界の $\alpha = 1/2$ の時にどうなるかは判っていない。

この結果を受けてさらに gap 条件を Hadamard gap より弱める試みもなされた。$\mathscr{F}$ が一つの三角函数よりなるときには中心極限定理のみならず、重複対数の法則も高橋の間隙条件

$$n_{k+1}/n_k \ge 1 + c/k^\beta \qquad (c > 0,\ \beta < 1/2)$$

のもとで成り立つ、即ち

$$\Psi[\{\cos 2\pi\cdot\}; \{n_k x\}] = 1 \quad \text{a.e.}$$

が得られている [Tak1972, Tak1975] ので、その類似を追求したわけである。

S. Dhompongsa は Kaufman-Philipp の結果 $\operatorname{ess\,sup}_x \Psi[\Lambda_\alpha; \{n_k x\}] < \infty$ を $\alpha > 1/2$ の時に示した。Kaufman-Philipp の第二の結果よりこの現象は $\alpha < 1/2$ の時に成り立たないことは判っているが、$\alpha = 1/2$ の場合にも以下のような否定的な「状況証拠」は与えられている。

I. Berkes [Ber1997] は、$f \in \Lambda_{1/2}$ で、任意に与えられた $\rho_k \downarrow 0$ に対して、

$$n_{k+1}/n_k > 1 + \rho_k$$

なる $\{n_k\}$ と $\epsilon_k \in \{-1,+1\}$ とが存在して

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{N} \epsilon_k f(n_k x)}{\sqrt{N \log\log N}} = \infty \quad \text{a.e.}$$

をみたすことをしめした。

Hadamard gap より少しでも弱い条件を仮定すると $\alpha = 1/2$ として挙動不審の f が見つかるという結果である。この結果より、Dhompongsa の結果は $\alpha = 1/2$ を含むように拡張できないことが示唆されるが、本当に符号 ϵ_k の助けを借りずに $\Psi[\{f\};\{n_k x\}] = \infty$ を示し、 Dhompongsa の結果の限界を確定することはまだ達成されていない。

1. 重複対数の法則の最良評価

ところで先の Dhompongsa の論文の記述には難渋なところがあり読者を悩ませる。Takahashi [Tak1988] はその解読の過程で $f \in \Lambda_\alpha$ $(\alpha > 1/2)$ に対して

$$\Psi[\{f\};\{n_k x\}] \le \|f\|_A \quad \text{a.e.}$$

を示し、初めて一般の f に対する具体的な評価を与えた。ここで、$\|f\|_A$ は Fourier 展開 $f(t) \sim \sum(a_\nu \cos 2\pi\nu t + b_\nu \sin 2\pi\nu t) \in L_0^2$ を持つ函数に対してに対して $\|f\|_A = \sum \sqrt{a_\nu^2 + b_\nu^2}$ と与えられる「絶対一様収束ノルム」である。Bernstein の定理によればこの「絶対一様収束ノルム」は $\alpha > 1/2$ なら有限値であると判っている。

我々 [Fuk2002] はこの評価が高橋間隙条件の下で無条件に成り立つことを示した上で、この評価の最良性に関する以下の結果を得た。Fourier 係数 $\{a_\nu, b_\nu\}$ が以下の意味で平行であるとする: ある (a,b) に対して $(a_\nu, b_\nu) = \sqrt{a_\nu^2 + b_\nu^2}\,(a,b)$ が全ての $n \in \mathbf{N}$ に対して成り立つとする。このとき任意の $\epsilon > 0$ に対して Hadamard gap を持つ列 $\{n_k\}$ で

$$\Psi[\{f\};\{n_k x\}] > \|f\|_A - \epsilon \quad \text{a.e.}$$

を満たすものが存在するというのである。即ち Takahashi の評価は Hadamard gap 条件を満たす全ての列に対しての評価としては「平行条件」のもとで最良であると判ったわけで、当然高橋の間隙条件の下でも最良性は揺るがない。

大変乱暴に考えれば $X \subset L_0^2$ に対し $\Psi[X;\{n_k x\}] = \sup_{f\in X} \Psi[\{f\};\{n_k x\}]$ となりそうなものだから、上の結果にてらして考えてみれば $\Psi[X;\{n_k x\}] \le \sup_{f\in X} \|f\|_A$ が成り立ちそうなものである。そしてこの結論はかなり広い範囲で成り立つというのが我々の報告したい結果である。

まず、 $\psi = \{\psi(\nu)\}$ を $\sum 1/\psi(\nu) < \infty$ をみたす正数列とし

$$X_{\psi,M} = \left\{\sum(a_\nu \cos 2\pi\nu t + b_\nu \sin 2\pi\nu t) \in L_0^2 \;\middle|\; \sum(a_\nu^2 + b_\nu^2)\psi(\nu) \le M\right\}$$

と $X_{\psi,M} \subset L_0^2$ を定める。

定理. $X \subset X_{\psi,M}$ **が、ある定数** $M > 0$ **と、** $\sum 1/\psi(\nu) < \infty$ **をみたす正数列** $\psi = \{\psi(\nu)\}$ **に対して成立するとする。このとき高橋間隙条件をみたす任意の自然数列** $\{n_k\}$ **に対して**

$$\Psi[X;\{n_k\}] \le \sup_{f\in X} \|f\|_A \quad \text{a.e.}$$

が成り立つ。さらに X **が以下の意味で「丸い」とする: 任意の** $\sum(a_\nu \cos 2\pi\nu t + b_\nu \sin 2\pi\nu t) \in X$ **に対して「平行な」** $\{a'_\nu, b'_\nu\}$ **で** $a_\nu^2 + b_\nu^2 = (a'_\nu)^2 + (b'_\nu)^2$ **と** $\sum(a'_\nu \cos 2\pi\nu t + b'_\nu \sin 2\pi\nu t) \in X$ **をみたすものが存在するとする。すると上記の評価は以下の意味で最良である。**

(1) **任意の** $\varepsilon > 0$ **に対して** Hadamard gap **を持つ自然数列** $\{n_k\}$ **が存在して** $\Psi[X;\{n_k\}] > \sup_{f\in X} \|f\|_A - \varepsilon$ a.e.

(2) **任意の** $0 < \rho_k \to 0$ **に対して自然数列** $\{n_k\}$ **で間隙条件** $n_{k+1}/n_k \ge 1 + \rho_k$ **をみたすものが存在して** $\Psi[X;\{n_k\}] = \sup_{f\in X} \|f\|_A$ a.e.

ちなみに $f \in L_0^2$ の Fourier 係数が「平行」の時に (2) の意味での最良性が $X = \{f\}$ に対して成り立つことは [Fuk2004] で示してある。

この定理の適用範囲について論じておこう。$\alpha > 1/2$ なら $\Lambda_\alpha \subset X_{\psi,M}$ がある $M > 0$ と $\psi = \{\psi(\nu)\}$ with $\sum 1/\psi(\nu) < \infty$ に対して成り立つことが判り、これは定理の前半の適用範囲にある。しかし、これについて最良性の部分までは適用できるかどうか判らない。しかし、函数空間を定める際に函数の連続率を L^2-norm ではかることにする、即ち

$$\Lambda_\alpha^{L^2} = \{f \in L_0^2 \mid \|f(\,\cdot\, + h) - f(\,\cdot\,)\|_2 \le |h|^\alpha\}$$

と定めるとこれについては $\alpha > 1/2$ の範囲で定理の主張は最良性の部分までこめて全て適用可能となる。

このことは

$$\|f(\cdot+h)-f(\cdot)\|_2^2 = \|f(\cdot+h/2)-f(\cdot-h/2)\|_2^2 = 2\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu^2+b_\nu^2)\sin^2\pi\nu h$$

であることから、 L^2 連続率は純粋に Fourier 係数の対称な条件を持って書けるから「丸い」ことが検証されるのである。このように、この問題に限っては L^2 連続率の方が自然な問題設定を与えているように思える。$\|f\|_A$ という量が根幹をなしていることがその遠因となっているのだろうか。

2. 再び有界変動函数

総変動が 1 以下の有界変動函数の族 BV は L^2 連続率ではかると 1/2 Lipschitz 連続で、

$$\mathrm{BV} \subset \{f \in L_0^2 \mid \|f(\cdot+h)-f(\cdot)\|_2 \le M|h|^\alpha\}$$

がある $M>0$ に対して成り立っている。

Berkes-Philipp は有界変動函数で高橋間隙条件の下で通常の重複対数の法則をみたさないものがあることを示している。このことから BV に対しては Dhompongsa 型の定理は成り立たないことが判る。これはさらに $\Lambda_{1/2}^{L^2}$ に対しても成り立たないことを導くが、我々の定理においては $\sup_{f\in\mathrm{BV}}\|f\|_A = \sup_{f\in\Lambda_{1/2}^{L^2}}\|f\|_A = \infty$ であるから、結論は偶然にせよ成り立ってしまい、結果として極めて自然な状況となっている。

むしろ Hadamard gap の下で重複対数の法則が成り立つことの方が不思議に思えるぐらいであって、どのようなメカニズムが隠れているのか反省する必要が大いにあるように思われる。

参考文献

[Bar1964] N. K. Bari, Treatise of trigonometric series, vol I & II, Pergamon, Oxford, 1964.

[Ber1997] I. Berkes, On the convergence of $\sum c_n f(nx)$ and the Lip 1/2 class, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997) 4143–4158

[Chu1949] K. L. Chung, An estimate concerning the Kolmogoroff limit distribution, Trans. Amer. Math. Soc., **67** (1949) 36-50

[Dho1986] S. Dhompongsa, Uniform laws of the iterated logarithm for Lipschitz classes of functions, Acta Sci. Math. **50** (1986) 105-124.

[Fuk2002] K. Fukuyama, *An asymptotic property of gap series*, Acta Mathematica Hungarica, **97** (2002) 209–216.

[Fuk2004] K. Fukuyama, *An asymptotic property of gap series III*, Acta Mathematica Hungarica, (2004) (to appear)

[Fuk200?] K. Fukuyama, *The concrete upper bound in the uniform law of the iterated logarithm*, (200?) (to appear)

[KaP1978] R. Kaufman and W. Philipp, A uniform law of the iterated logarithm for classes of functions, Ann. Probab., **5** (1978) 930–952.

[Phi1975] W. Philipp, Limit theorems for lacunary series and uniform distribution mod 1, Acta Arith., **26** (1975) 241–251.

[Tak1962] S. Takahashi, An asymptotic property of a gap sequence, Proc. Japan Acad. **38** (1962) 101-104.

[Tak1963] S. Takahashi, The law of the iterated logarithm for a gap sequence with infinite gaps, Tôhoku Math. J., **15** (1963) 281–288.

[Tak1972] S. Takahashi, On the law of the iterated logarithm for lacunary trigonometric series, Tôhoku Math. J., **24** (1972) 319–329.

[Tak1975] S. Takahashi, On the law of the iterated logarithm for lacunary trigonometric series II Tôhoku Math. J., **27** (1975) 391–403.

[Tak1988] S. Takahashi, An asymptotic behavior of $\{f(n_k t)\}$, Sci. Rep. Kanazawa Univ., **33** (1988) 27-36.

[Wey1916] H. Weyl, *Über die Gleichverteilung von Zahlen modulo Eins*, Math. Ann. **77** (1916) 313–352

[Zyg1959] A. Zygmund, Trigonometric series, Vol I., Cambridge University Press, 1959.