数理解析研究所講究録 1351 巻 2004 年 1-24

Multidimensional Brownian local times in the Malliavin calculus

髙信 敏 (Satoshi Takanobu)
金沢大学自然科学研究科 (Graduate School of Natural Science and Technology, Kanazawa University)

1. 問題と結果

(W, P) を r 次元 Wiener 空間 ($r \geq 2$) とする．我々の問題は，次の通り:

問題. $T > 0, x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$ とするとき，局所時間 L_T^x "$=$" $\int_0^T \delta_x(w_s)ds$ はどの一般 Wiener 関数のクラス $\mathfrak{D}_p^{-\alpha}$ に属するのか？

既知のこと この問について，Imkeller-Weisz ([1]) による次の結果がある:

定理. $x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}, T > 0$ とする．このとき $\alpha > r/2 - 1$ に対して

$$\lim_{\varepsilon, \varepsilon' \downarrow 0} \left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s)ds - \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon', x - w_s)ds \right\|_{2,-\alpha} = 0.$$

この定理より

$$L_T^x := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s)ds \quad \text{in } \mathfrak{D}_2^{-\alpha},$$

よって $L_T^x \in \mathfrak{D}_2^{-\alpha}$ ($\alpha > \frac{r}{2} - 1$). しかしながら，彼らの方法では，我々の問題は無理．何となれば，彼らの方法は Itô-Wiener 展開を使うやり方だから．

動機 一般 Wiener 関数のクラス $\mathfrak{D}_p^{-\alpha}$ にこだわる理由(わけ)は次の通り．渡辺 ([4], [5]) による次の事実が知られている:

Fact. $F : W \to \mathbb{R}^r$ が Malliavin の意味で regular のとき，Donsker の δ-関数 $\delta_x(F)$ について次が成り立つ:

$$\delta_x(F) \in \mathfrak{D}_p^{-\alpha} \quad \text{if } \alpha > r\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

さらに F が 1 次の Wiener chaos ならば

$$\delta_x(F) \in \mathfrak{D}_p^{-\alpha} \quad \text{if and only if } \alpha > r\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

$F(w) = w_s$ $(s > 0)$ は明らかに regular な 1 次の Wiener chaos であるから

$$\delta_x(w_s) \in \mathfrak{D}_p^{-\alpha} \underset{\text{必十}}{\Longleftrightarrow} \alpha > r\Big(1 - \frac{1}{p}\Big). \tag{1}$$

局所時間 L_T^x は形式的に

$$L_T^x = \int_0^T \delta_x(w_s)ds$$

となる．各 $\delta_x(w_s)$ について (1) が分かったのだから，次は，これを s について積分した L_T^x に対して，上のようなことが分かってもいいのではないか，というのが，我々がこの問題に手を染めた動機である．

結果 次が我々の結果である:

Theorem. $T > 0, x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$ とする．
(i) $^\forall p \in [1, \infty)$ に対して

$$L_T^x \in \bigcap_{\alpha > (1-\frac{1}{p})(r-2)} \mathfrak{D}_p^{-\alpha}.$$

(ii) $p \in [2, \infty), r = 2$ のときは

$$L_T^x \in \mathfrak{D}_p^{-\alpha} \underset{\text{必十}}{\Longleftrightarrow} \alpha > 0.$$

(iii) $p \in \mathbb{N} \cap [2, \infty), r \geq 3$ のときは

$$L_T^x \in \mathfrak{D}_p^{-\alpha} \underset{\text{必十}}{\Longleftrightarrow} \alpha > (1 - \tfrac{1}{p})(r-2).$$

(iv) 一般に $p \in (2, \infty), r \geq 3$ に対しては

$$L_T^x \notin \mathfrak{D}_p^{-\alpha}, \quad ^\forall \alpha < (1 - \tfrac{1}{p})(r-2).$$

実は，我々が提起した問に対する答えは

「$1 \leq p < \infty, \alpha > 0$ に対して，$L_T^x \in \mathfrak{D}_p^{-\alpha} \underset{\text{必十}}{\Longleftrightarrow} \alpha > (1 - \frac{1}{p})(r-2)$」

であろうと予想している．残念ながら，上の Theorem はこの予想を完全には解決していない．即ち，“$\Longrightarrow$” 部分が，次のように不十分である:

- $p \in [1, 2)$ のときは，完全に open である，
- $p \in [2, \infty) \setminus \mathbb{N}, r \geq 3$ のときは，「$\alpha \underset{\underset{\text{ここ}}{\uparrow}}{\geq} (1 - \frac{1}{p})(r-2)$」と等号が付いてしまう分だけ主張が弱い．即ち，$L_T^x$ が $\mathfrak{D}_p^{-(1-1/p)(r-2)}$ に属するのか or 属さないのかが確定していない．

しかしながら，ここで展開する方法では，この Theorem の主張がベストであろうと思われる．

2. 定理の再証明と２，３の補足

３つの補題を用意する:

補題 1. $T>0$ とする．$\beta>0, \varepsilon>0, x\in\mathbb{R}^r$ に対して

$$
\begin{aligned}
&(I-L)^{-\beta}\int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x-w_s)ds \\
&= \int_0^T ds \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\beta-1}p^{(r)}(\varepsilon+s(1-e^{-2t}), x-e^{-t}w_s)dt.
\end{aligned}
$$

証明 等式

$$
\begin{aligned}
(I-L)^{-\beta}F(w) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\beta-1}T_tF(w)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\beta-1}dt\int_W F(e^{-t}w+\sqrt{1-e^{-2t}}\omega)P(d\omega)
\end{aligned}
$$

より

左辺

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\beta-1}dt\int_W\int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, e^{-t}w_s+\sqrt{1-e^{-2t}}\omega_s-x)ds P(d\omega) \\
&= \int_0^T ds\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\beta-1}dt\int_{\mathbb{R}^r} p^{(r)}(\varepsilon, e^{-t}w_s+\sqrt{1-e^{-2t}}y-x)p^{(r)}(s,y)dy \\
&= \int_0^T ds\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\beta-1}dt\int_{\mathbb{R}^r}\Big(\frac{1}{1-e^{-2t}}\Big)^{r/2}p^{(r)}\big(\tfrac{\varepsilon}{1-e^{-2t}}, \tfrac{x-e^{-t}w_s}{\sqrt{1-e^{-2t}}}-y\big)p^{(r)}(s,y)dy \\
&= \int_0^T ds\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\beta-1}\Big(\frac{1}{1-e^{-2t}}\Big)^{r/2}p^{(r)}\big(\tfrac{\varepsilon}{1-e^{-2t}}+s, \tfrac{x-e^{-t}w_s}{\sqrt{1-e^{-2t}}}\big)dt
\end{aligned}
$$

$=$ 右辺. ■

補題 2. $T>0$ とする．$\beta>0, \delta_1, \delta_2\geq 0, x\in\mathbb{R}^r$ に対して

$$
\begin{aligned}
&E\Big[\Big(\int_0^T ds\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\beta-1}p^{(r)}(\delta_1+s(1-e^{-2t}), x-e^{-t}w_s)dt\Big) \\
&\quad\cdot\Big(\int_0^T ds\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\beta-1}p^{(r)}(\delta_2+s(1-e^{-2t}), x-e^{-t}w_s)dt\Big)\Big] \\
&= \int_0^T sds\int_0^1 d\sigma\frac{1}{\Gamma(2\beta)}\int_0^\infty e^{-v}v^{2\beta-1}dv\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^r\Phi_{\delta_1\delta_2}(s,\sigma,v;x).
\end{aligned}
$$

ここで

$$\Phi_{\delta_1\delta_2}(s,\sigma,v;x)$$
$$= \left(\frac{1}{\delta_1\delta_2+\delta_1\sigma s+\delta_2 s+\sigma s^2-\sigma^2 s^2 e^{-2v}}\right)^{r/2}\exp\left\{-\frac{\delta_1+\delta_2+s+\sigma s-2e^{-v}\sigma s}{2(\delta_1\delta_2+\delta_1\sigma s+\delta_2 s+\sigma s^2-\sigma^2 s^2 e^{-2v})}|x|^2\right\}$$
$$+ \left(\frac{1}{\delta_1\delta_2+\delta_2\sigma s+\delta_1 s+\sigma s^2-\sigma^2 s^2 e^{-2v}}\right)^{r/2}\exp\left\{-\frac{\delta_1+\delta_2+s+\sigma s-2e^{-v}\sigma s}{2(\delta_1\delta_2+\delta_2\sigma s+\delta_1 s+\sigma s^2-\sigma^2 s^2 e^{-2v})}|x|^2\right\}.$$

証明 まず

左辺

$$= E\Big[\int_0^T\int_0^T dsds'\frac{1}{\Gamma(\beta)^2}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t}t^{\beta-1}e^{-t'}(t')^{\beta-1}dtdt'$$
$$p^{(r)}(\delta_1+s(1-e^{-2t}),x-e^{-t}w_s)p^{(r)}(\delta_2+s'(1-e^{-2t'}),x-e^{-t'}w_{s'})\Big]$$

$$= E\Big[\iint_{0<s'<s<T} dsds'\frac{1}{\Gamma(\beta)^2}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t}t^{\beta-1}e^{-t'}(t')^{\beta-1}dtdt'$$
$$\Big(p^{(r)}(\delta_1+s(1-e^{-2t}),x-e^{-t}w_s)p^{(r)}(\delta_2+s'(1-e^{-2t'}),x-e^{-t'}w_{s'})$$
$$+p^{(r)}(\delta_1+s'(1-e^{-2t'}),x-e^{-t'}w_{s'})p^{(r)}(\delta_2+s(1-e^{-2t}),x-e^{-t}w_s)\Big)\Big]$$

$$= \iint_{0<s'<s<T} dsds'\frac{1}{\Gamma(\beta)^2}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t}t^{\beta-1}e^{-t'}(t')^{\beta-1}dtdt'$$
$$\times\Big(E[p^{(r)}(\delta_1+s(1-e^{-2t}),x-e^{-t}w_s)p^{(r)}(\delta_2+s'(1-e^{-2t'}),x-e^{-t'}w_{s'})]$$
$$+E[p^{(r)}(\delta_1+s'(1-e^{-2t'}),x-e^{-t'}w_{s'})p^{(r)}(\delta_2+s(1-e^{-2t}),x-e^{-t}w_s)]\Big)$$

$=: (*)$.

ここで $0<s'<s<\infty,\eta,\eta'\ge 0$ に対して

$$E[p^{(r)}(\eta'+s'(1-e^{-2t'}),x-e^{-t'}w_{s'})p^{(r)}(\eta+s(1-e^{-2t}),x-e^{-t}w_s)]$$
$$=\int_{\mathbb{R}^r}\int_{\mathbb{R}^r} p^{(r)}(\eta'+s'(1-e^{-2t'}),x-e^{-t'}u')p^{(r)}(\eta+s(1-e^{-2t}),x-e^{-t}u)$$
$$\times p^{(r)}(s',u')p^{(r)}(s-s',u-u')dudu'$$
$$=\int_{\mathbb{R}^r} p^{(r)}(\eta'+s'(1-e^{-2t'}),x-e^{-t'}u')p^{(r)}(s',u')du'$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^r} p^{(r)}(\eta+s(1-e^{-2t}),x-e^{-t}u)p^{(r)}(s-s',u-u')du$$

$$= \int_{\mathbb{R}^r} p^{(r)}(\eta' + s'(1-e^{-2t'}), x - e^{-t'}u')p^{(r)}(s', u')du'(e^{2t})^{r/2}$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^r} p^{(r)}(e^{2t}\eta + s(e^{2t}-1), e^t x - u)p^{(r)}(s-s', u-u')du$$
$$= (e^{2t})^{r/2} \int_{\mathbb{R}^r} p^{(r)}(\eta' + s'(1-e^{-2t'}), x - e^{-t'}u')p^{(r)}(s', u')$$
$$\times p^{(r)}(e^{2t}\eta + se^{2t} - s', e^t x - u')du'$$
$$= (e^{2t})^{r/2}(e^{2t'})^{r/2} \int_{\mathbb{R}^r} p^{(r)}(e^{2t'}\eta' + s'(e^{2t'}-1), e^{t'}x - u')p^{(r)}(s', u')$$
$$\times p^{(r)}(e^{2t}\eta + se^{2t} - s', e^t x - u')du'$$
$$= (e^{2t})^{r/2}(e^{2t'})^{r/2} \int_{\mathbb{R}^r} p^{(r)}(A, ax - u')p^{(r)}(B, u')p^{(r)}(C, bx - u')du'$$
$$\left[\text{ここで } A = e^{2t'}\eta' + s'(e^{2t'}-1),\ B = s',\ C = e^{2t}\eta + se^{2t} - s',\ a = e^{t'},\ b = e^t\right]$$
$$= (e^{2t})^{r/2}(e^{2t'})^{r/2}\left(\tfrac{1}{2\pi A}\right)^{r/2}\left(\tfrac{1}{2\pi B}\right)^{r/2}\left(\tfrac{1}{2\pi C}\right)^{r/2} \int_{\mathbb{R}^r} \exp\left\{-\tfrac{|ax-u'|^2}{2A} - \tfrac{|u'|^2}{2B} - \tfrac{|bx-u'|^2}{2C}\right\}du'$$
$$= (e^{2t})^{r/2}(e^{2t'})^{r/2}\left(\tfrac{1}{2\pi A}\right)^{r/2}\left(\tfrac{1}{2\pi B}\right)^{r/2}\left(\tfrac{1}{2\pi C}\right)^{r/2} \exp\left\{-\tfrac{a^2(B+C)+b^2(A+B)-2abB}{2(BC+CA+AB)}|x|^2\right\}$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^r} \exp\left\{-\tfrac{BC+CA+AB}{2ABC}\left|u' - \tfrac{(aC+bA)B}{BC+CA+AB}x\right|^2\right\}du'$$
$$= \left(\tfrac{1}{2\pi}\right)^r \left(\tfrac{e^{2t}e^{2t'}}{BC+CA+AB}\right)^{r/2} \exp\left\{-\tfrac{a^2(B+C)+b^2(A+B)-2abB}{2(BC+CA+AB)}|x|^2\right\}$$
$$= \left(\tfrac{1}{2\pi}\right)^r \left(\tfrac{e^{2t}e^{2t'}}{e^{2t}e^{2t'}(\eta+s)(\eta'+s')-(s')^2}\right)^{r/2} \exp\left\{-\tfrac{e^{2t}e^{2t'}(\eta+s)+e^{2t}e^{2t'}(\eta'+s')-2e^te^{t'}s'}{2(e^{2t}e^{2t'}(\eta+s)(\eta'+s')-(s')^2)}|x|^2\right\}$$
$$= \left(\tfrac{1}{2\pi}\right)^r \left(\tfrac{1}{(\eta+s)(\eta'+s')-(s')^2e^{-2t}e^{-2t'}}\right)^{r/2} \exp\left\{-\tfrac{\eta+s+\eta'+s'-2e^{-t}e^{-t'}s'}{2((\eta+s)(\eta'+s')-(s')^2e^{-2t}e^{-2t'})}|x|^2\right\}.$$

よって

$$(*) = \iint_{0<s'<s<T} dsds' \frac{1}{\Gamma(\beta)^2} \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(t+t')}(tt')^{\beta-1}dtdt'\left(\tfrac{1}{2\pi}\right)^r$$
$$\times \left(\left(\tfrac{1}{(\delta_1+s)(\delta_2+s')-(s')^2e^{-2(t+t')}}\right)^{r/2} \exp\left\{-\tfrac{\delta_1+s+\delta_2+s'-2e^{-(t+t')}s'}{2((\delta_1+s)(\delta_2+s')-(s')^2e^{-2(t+t')})}|x|^2\right\}\right.$$
$$\left. + \left(\tfrac{1}{(\delta_2+s)(\delta_1+s')-(s')^2e^{-2(t+t')}}\right)^{r/2} \exp\left\{-\tfrac{\delta_2+s+\delta_1+s'-2e^{-(t+t')}s'}{2((\delta_2+s)(\delta_1+s')-(s')^2e^{-2(t+t')})}|x|^2\right\}\right)$$
$$=: (**).$$

ここで変数変換 $t = u, t + t' = v$，その後で $s' = s\sigma$ をすると

$$(**) = \int_0^T ds \int_0^s ds' \frac{1}{\Gamma(2\beta)} \int_0^\infty e^{-v}v^{2\beta-1}dv\left(\tfrac{1}{2\pi}\right)^r$$

$$\times\left(\left(\frac{1}{(\delta_1+s)(\delta_2+s')-(s')^2e^{-2v}}\right)^{r/2}\exp\left\{-\frac{\delta_1+s+\delta_2+s'-2e^{-v}s'}{2((\delta_1+s)(\delta_2+s')-(s')^2e^{-2v})}|x|^2\right\}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{(\delta_2+s)(\delta_1+s')-(s')^2e^{-2v}}\right)^{r/2}\exp\left\{-\frac{\delta_2+s+\delta_1+s'-2e^{-v}s'}{2((\delta_2+s)(\delta_1+s')-(s')^2e^{-2v})}|x|^2\right\}\right)$$
$$=\int_0^T sds\int_0^1 d\sigma\frac{1}{\Gamma(2\beta)}\int_0^\infty e^{-v}v^{2\beta-1}dv\left(\frac{1}{2\pi}\right)^r$$
$$\times\left(\left(\frac{1}{\delta_1\delta_2+\delta_1\sigma s+\delta_2 s+\sigma s^2-\sigma^2s^2e^{-2v}}\right)^{r/2}\exp\left\{-\frac{\delta_1+\delta_2+s+\sigma s-2e^{-v}\sigma s}{2(\delta_1\delta_2+\delta_1\sigma s+\delta_2 s+\sigma s^2-\sigma^2s^2e^{-2v})}|x|^2\right\}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{\delta_1\delta_2+\delta_2\sigma s+\delta_1 s+\sigma s^2-\sigma^2s^2e^{-2v}}\right)^{r/2}\exp\left\{-\frac{\delta_1+\delta_2+s+\sigma s-2e^{-v}\sigma s}{2(\delta_1\delta_2+\delta_2\sigma s+\delta_1 s+\sigma s^2-\sigma^2s^2e^{-2v})}|x|^2\right\}\right).\ \blacksquare$$

補題 3. 簡単のため

$$\Phi(s,\sigma,v;x):=\sup_{\substack{(\delta_1,\delta_2)\in[0,1]^2;\\ \delta_1\delta_2=0\text{ or }\delta_1=\delta_2}}\Phi_{\delta_1\delta_2}(s,\sigma,v;x)$$

とおく．このとき ${}^\forall T>0, {}^\forall\beta>\frac{1}{2}(\frac{r}{2}-1), {}^\forall x\in\mathbb{R}^r\setminus\{0\}$ に対して

$$\int_0^T sds\int_0^1 d\sigma\int_0^\infty e^{-v}v^{2\beta-1}\Phi(s,\sigma,v;x)dv<\infty.$$

証明 ${}^\forall x\in\mathbb{R}^r\setminus\{0\}$ を固定する．$0<\varepsilon<1, 0<\eta<1$ とする．(s,σ,v) の積分範囲を

<u>Case 1</u>　$(0,T)\times(0,1-\varepsilon)\times(0,\infty)$,

<u>Case 2</u>　$(0,T)\times[1-\varepsilon,1)\times(\eta,\infty)$,

<u>Case 3</u>　$(0,T)\times[1-\varepsilon,1)\times(0,\eta]$

の３つに分けて考える．

<u>Case 1.</u> このときは

$$\begin{aligned}\delta_1+\delta_2+s+\sigma s-2e^{-v}\sigma s&\geq\delta_1+\delta_2+s+\sigma s-2\sigma s\\&=\delta_1+\delta_2+s(1-\sigma)\\&\geq\delta_1+\delta_2+s\varepsilon\\&\geq\varepsilon(\delta_1+\delta_2+s),\\ \delta_1\delta_2+\delta_1\sigma s+\delta_2 s+\sigma s^2-\sigma^2s^2e^{-2v}&\leq\delta_1\delta_2+\delta_1 s+\delta_2 s+s^2\\&\leq(\delta_1+\delta_2+s)^2,\\ \delta_1\delta_2+\delta_2\sigma s+\delta_1 s+\sigma s^2-\sigma^2s^2e^{-2v}&\leq\delta_1\delta_2+\delta_2 s+\delta_1 s+s^2\end{aligned}$$

$$\leq (\delta_1+\delta_2+s)^2$$

より

$$\frac{\delta_1+\delta_2+s+\sigma s-2e^{-v}\sigma s}{\delta_1\delta_2+\delta_1\sigma s+\delta_2 s+\sigma s^2-\sigma^2 s^2 e^{-2v}}$$
$$=\frac{\delta_1+\delta_2+s+\sigma s-2e^{-v}\sigma s}{\sqrt{\delta_1\delta_2+\delta_1\sigma s+\delta_2 s+\sigma s^2-\sigma^2 s^2 e^{-2v}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\delta_1\delta_2+\delta_1\sigma s+\delta_2 s+\sigma s^2-\sigma^2 s^2 e^{-2v}}}$$
$$\geq \frac{\varepsilon(\delta_1+\delta_2+s)}{\delta_1+\delta_2+s}\frac{1}{\sqrt{\delta_1\delta_2+\delta_1\sigma s+\delta_2 s+\sigma s^2-\sigma^2 s^2 e^{-2v}}}$$
$$=\frac{\varepsilon}{\sqrt{\delta_1\delta_2+\delta_1\sigma s+\delta_2 s+\sigma s^2-\sigma^2 s^2 e^{-2v}}},$$

$$\frac{\delta_1+\delta_2+s+\sigma s-2e^{-v}\sigma s}{\delta_1\delta_2+\delta_2\sigma s+\delta_1 s+\sigma s^2-\sigma^2 s^2 e^{-2v}}\geq\frac{\varepsilon}{\sqrt{\delta_1\delta_2+\delta_2\sigma s+\delta_1 s+\sigma s^2-\sigma^2 s^2 e^{-2v}}}.$$

よって

$$\begin{aligned}\Phi_{\delta_1\delta_2}(s,\sigma,v;x)&\leq\left(\frac{1}{X}\right)^r\exp\left\{-\frac{\varepsilon|x|^2}{2X}\right\}\Bigg|_{X=\sqrt{\delta_1\delta_2+\delta_1\sigma s+\delta_2 s+\sigma s^2-\sigma^2 s^2 e^{-2v}}}\\&\quad+\left(\frac{1}{Y}\right)^r\exp\left\{-\frac{\varepsilon|x|^2}{2Y}\right\}\Bigg|_{Y=\sqrt{\delta_1\delta_2+\delta_2\sigma s+\delta_1 s+\sigma s^2-\sigma^2 s^2 e^{-2v}}}\\&\leq\frac{2^{1+r}(re^{-1})^r}{\varepsilon^r|x|^{2r}}\quad\left[\begin{array}{l}\because\ e^{-a}\leq(\frac{t}{e})^t\frac{1}{a^t},\ {}^\forall a>0,\ {}^\forall t\geq 0\ \text{であるから.}\\ \text{ただし}\ t=0\ \text{のときは}\ (\frac{t}{e})^t=1\ \text{と理解する.}\end{array}\right].\end{aligned}$$

故に

$$\Phi(s,\sigma,v;x)\leq\frac{2^{1+r}(re^{-1})^r}{\varepsilon^r|x|^{2r}}.$$

<u>Case 2.</u> このときは

$$\begin{aligned}\delta_1+\delta_2+s+\sigma s-2e^{-v}\sigma s&=\delta_1+\delta_2+s+\sigma s+2(1-e^{-v})\sigma s-2\sigma s\\&=\delta_1+\delta_2+s(1-\sigma)+2(1-e^{-v})\sigma s\\&\geq\delta_1+\delta_2+2(1-e^{-\eta})(1-\varepsilon)s\\&\geq(1\wedge 2(1-e^{-\eta})(1-\varepsilon))(\delta_1+\delta_2+s)\end{aligned}$$

であるから，Case 1 と同じようにして

$$\Phi(s,\sigma,v;x)\leq\frac{2^{1+r}(re^{-1})^r}{(1\wedge 2(1-e^{-\eta})(1-\varepsilon))^r|x|^{2r}}.$$

Case 3. このときは

$$
\begin{aligned}
&\delta_1+\delta_2+s+\sigma s-2e^{-v}\sigma s\\
&=\delta_1+\delta_2+s(1-\sigma)+2\tfrac{1-e^{-v}}{v}v\sigma s\\
&\geq \delta_1+\delta_2+s(1-\sigma)+2\tfrac{1-e^{-\eta}}{\eta}(1-\varepsilon)vs\\
&\qquad\left[\because v\mapsto \tfrac{1-e^{-v}}{v}\ \text{は decreasing であるから}\right]\\
&=\delta_1+\delta_2+s\Big(1-\sigma+2\tfrac{1-e^{-\eta}}{\eta}(1-\varepsilon)v\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta_1\delta_2+\delta_1\sigma s+\delta_2 s+\sigma s^2-\sigma^2s^2e^{-2v}\\
&=\delta_1\delta_2+\delta_1\sigma s+\delta_2 s+\sigma(1-\sigma)s^2+\tfrac{1-e^{-2v}}{2v}2v\sigma^2s^2\\
&\begin{cases}\geq \delta_1\delta_2+\delta_1(1-\varepsilon)s+\delta_2 s+(1-\varepsilon)(1-\sigma)s^2+\tfrac{1-e^{-2\eta}}{2\eta}(1-\varepsilon)^2 2vs^2\\ \leq \delta_1\delta_2+\delta_1 s+\delta_2 s+(1-\sigma)s^2+2vs^2,\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta_1\delta_2+\delta_2\sigma s+\delta_1 s+\sigma s^2-\sigma^2s^2e^{-2v}\\
&\begin{cases}\geq \delta_1\delta_2+\delta_2(1-\varepsilon)s+\delta_1 s+(1-\varepsilon)(1-\sigma)s^2+\tfrac{1-e^{-2\eta}}{2\eta}(1-\varepsilon)^2 2vs^2\\ \leq \delta_1\delta_2+\delta_1 s+\delta_2 s+(1-\sigma)s^2+2vs^2.\end{cases}
\end{aligned}
$$

ここで $0<\varepsilon<1, 0<\eta<1$ を

$$
2\tfrac{1-e^{-\eta}}{\eta}(1-\varepsilon)>1,\ \tfrac{1-e^{-2\eta}}{2\eta}(1-\varepsilon)^2>\tfrac{1}{2},\ 1-\varepsilon>\tfrac{1}{2}
$$

となるように十分小さくとると[注1]

$$
\delta_1+\delta_2+s+\sigma s-2e^{-v}\sigma s\geq \delta_1+\delta_2+s(1-\sigma+v),
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_1\delta_2+\delta_1\sigma s+\delta_2 s+\sigma s^2-\sigma^2s^2e^{-2v}&\geq \delta_1\delta_2+\delta_1 s\tfrac{1}{2}+\delta_2 s+\tfrac{1}{2}(1-\sigma)s^2+vs^2\\
&\geq \tfrac{1-\sigma+v}{2}\big(\delta_1\delta_2+\tfrac{\delta_1+\delta_2}{2}s+s^2\big)\\
&\geq \begin{cases}\tfrac{1-\sigma+v}{2}s^2 & \text{if}\ \ \delta_1\delta_2=0\\ \tfrac{1-\sigma+v}{4}(\delta+s)^2 & \text{if}\ \ \delta_1=\delta_2=\delta,\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\delta_1\delta_2+\delta_2\sigma s+\delta_1 s+\sigma s^2-\sigma^2s^2e^{-2v}\geq \begin{cases}\tfrac{1-\sigma+v}{2}s^2 & \text{if}\ \ \delta_1\delta_2=0\\ \tfrac{1-\sigma+v}{4}(\delta+s)^2 & \text{if}\ \ \delta_1=\delta_2=\delta,\end{cases}
$$

$$
\frac{\delta_1+\delta_2+s+\sigma s-2e^{-v}\sigma s}{\delta_1\delta_2+\delta_1\sigma s+\delta_2 s+\sigma s^2-\sigma^2s^2e^{-2v}}\geq\frac{\delta_1+\delta_2+s(1-\sigma+v)}{\delta_1\delta_2+(\delta_1+\delta_2)s+2s^2(1-\sigma+v)}
$$

[注1] $1-\varepsilon\geq\frac{1-e^{-\eta}}{\eta}(1-\varepsilon)\geq\frac{1-e^{-2\eta}}{2\eta}(1-\varepsilon)^2$ だから，実は $\frac{1-e^{-2\eta}}{2\eta}(1-\varepsilon)^2>\frac{1}{2}$ だけでよい．

$$\geq \begin{cases} \frac{1}{2s} & \text{if} \quad \delta_1\delta_2 = 0 \\ \frac{1}{2(\delta+s)} & \text{if} \quad \delta_1 = \delta_2 = \delta, \end{cases}$$

$$\frac{\delta_1 + \delta_2 + s + \sigma s - 2e^{-v}\sigma s}{\delta_1\delta_2 + \delta_2\sigma s + \delta_1 s + \sigma s^2 - \sigma^2 s^2 e^{-2v}} \geq \frac{\delta_1 + \delta_2 + s(1-\sigma+v)}{\delta_1\delta_2 + (\delta_1+\delta_2)s + 2s^2(1-\sigma+v)}$$
$$\geq \begin{cases} \frac{1}{2s} & \text{if} \quad \delta_1\delta_2 = 0 \\ \frac{1}{2(\delta+s)} & \text{if} \quad \delta_1 = \delta_2 = \delta. \end{cases}$$

よって $\delta_1\delta_2 = 0$ のときは

$$\Phi_{\delta_1\delta_2}(s,\sigma,v;x) \leq 2\Big(\frac{2}{1-\sigma+v}\frac{1}{s^2}\Big)^{r/2}\exp\Big\{-\frac{|x|^2}{4s}\Big\}$$
$$\leq \frac{2^{1+\frac{5}{2}r}(re^{-1})^r}{|x|^{2r}}\Big(\frac{1}{1-\sigma+v}\Big)^{r/2};$$

$\delta_1 = \delta_2 = \delta$ のときは

$$\Phi_{\delta_1\delta_2}(s,\sigma,v;x) \leq 2\Big(\frac{4}{1-\sigma+v}\frac{1}{(\delta+s)^2}\Big)^{r/2}\exp\Big\{-\frac{|x|^2}{4(\delta+s)}\Big\}$$
$$\leq \frac{2^{1+3r}(re^{-1})^r}{|x|^{2r}}\Big(\frac{1}{1-\sigma+v}\Big)^{r/2}.$$

故に

$$\Phi(s,\sigma,v;x) \leq \frac{2^{1+3r}(re^{-1})^r}{|x|^{2r}}\Big(\frac{1}{1-\sigma+v}\Big)^{r/2}.$$

3つの case を1つにまとめれば

$$\Phi(s,\sigma,v;x)$$
$$\leq \frac{2^{1+r}(re^{-1})^r}{|x|^{2r}}\Big(\frac{1}{\varepsilon^r}\mathbf{1}_{(0,1-\varepsilon)}(\sigma) + \frac{1}{(1\wedge 2(1-e^{-\eta})(1-\varepsilon))^r}\mathbf{1}_{[1-\varepsilon,1)}(\sigma)\mathbf{1}_{(\eta,\infty)}(v)$$
$$+ 4^r\mathbf{1}_{[1-\varepsilon,1)}(\sigma)\mathbf{1}_{(0,\eta]}(v)\Big(\frac{1}{1-\sigma+v}\Big)^{r/2}\Big)$$

という評価を得る．補題3にある積分の収束を見なければならないが，問題になるのはこの評価式の右辺3項目の積分の収束性である．これを

$$\int_{1-\varepsilon}^{1} d\sigma \int_0^\eta e^{-v}v^{2\beta-1}\Big(\frac{1}{1-\sigma+v}\Big)^{r/2}dv$$
$$= \int_0^\varepsilon d\tau \int_0^\eta e^{-v}v^{2\beta-1}\Big(\frac{1}{\tau+v}\Big)^{r/2}dv$$

$$= \int_0^\eta e^{-v} v^{2\beta-1} dv \int_0^\varepsilon \Big(\frac{1}{\tau + v}\Big)^{r/2} d\tau$$

$$= \int_0^\eta e^{-v} v^{2\beta-1} dv \int_0^{\varepsilon/v} v^{-r/2+1} (\theta + 1)^{-r/2} d\theta$$

$$\Big[\because \text{変数変換 } \tau = v\theta \text{ より}\Big]$$

$$= \int_0^\eta e^{-v} v^{2\beta - r/2} dv \int_0^{\varepsilon/v} (\theta + 1)^{-r/2} d\theta$$

と書き直してみる．$r = 2$ のときは

$$\int_0^{\varepsilon/v} (\theta + 1)^{-r/2} d\theta = \log(\tfrac{\varepsilon}{v} + 1) = o(v^{-\kappa}) \quad \text{as } v \downarrow 0,\ {}^\forall\kappa > 0$$

に注意すれば，$\beta > \frac{1}{2}(\frac{r}{2} - 1)$ により $\kappa > 0$ を十分小さくとって $2\beta - \frac{r}{2} - \kappa + 1 > 0$ とできるので，確かに積分は収束する．$r \geq 3$ のときは

$$\int_0^{\varepsilon/v} (\theta + 1)^{-r/2} d\theta \leq \int_0^\infty (\theta + 1)^{-r/2} d\theta = \frac{2}{r - 2} < \infty$$

であるから，やはり $2\beta - \frac{r}{2} + 1 > 0$ より積分は収束する．

以上のことから補題 3 の主張が分かる． ■

定理の証明 $x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}, \alpha > \frac{r}{2} - 1$ とする．補題 2 と 3 より

$$E\Big[\Big(\int_0^T ds \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha/2-1} p^{(r)}(s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t} w_s) dt\Big)^2\Big]$$
$$= \int_0^T s ds \int_0^1 d\sigma \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-v} v^{\alpha-1} dv \big(\tfrac{1}{2\pi}\big)^r \Phi_{00}(s, \sigma, v; x) < \infty.$$

次に補題 1 と 2 より

$$E\Big[\Big((I - L)^{-\alpha/2} \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, w_s - x) ds$$
$$- \int_0^T ds \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha/2-1} p^{(r)}(s(1 - e^{-2t}), x - e^{-t} w_s) dt\Big)^2\Big]$$
$$= \int_0^T s ds \int_0^1 d\sigma \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-v} v^{\alpha-1} dv \big(\tfrac{1}{2\pi}\big)^r$$
$$\times \Big(\Phi_{\varepsilon\varepsilon}(s, \sigma, v; x) - 2\Phi_{\varepsilon 0}(s, \sigma, v; x) + \Phi_{00}(s, \sigma, v; x)\Big).$$

$\varepsilon \downarrow 0$ のとき

$$\Phi_{\varepsilon\varepsilon}(s, \sigma, v; x) - 2\Phi_{\varepsilon 0}(s, \sigma, v; x) + \Phi_{00}(s, \sigma, v; x) \to 0.$$

$0 < {}^\forall\varepsilon \leq 1$ に対して

$$|\Phi_{\varepsilon\varepsilon}(s,\sigma,v;x) - 2\Phi_{\varepsilon 0}(s,\sigma,v;x) + \Phi_{00}(s,\sigma,v;x)| \leq 4\Phi(s,\sigma,v;x).$$

補題 3 より

$$\int_0^T sds \int_0^1 d\sigma \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-v} v^{\alpha-1} \Phi(s,\sigma,v;x) dv < \infty$$

であるから，Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned} &E\Big[\Big((I-L)^{-\alpha/2} \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, w_s - x) ds \\ &\quad - \int_0^T ds \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha/2-1} p^{(r)}(s(1-e^{-2t}), x - e^{-t} w_s) dt\Big)^2\Big] \\ &\to 0 \quad \text{as } \varepsilon \downarrow 0. \end{aligned}$$

これは

$$L_T^x := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, w_s - x) ds \ \text{ exists in } \mathfrak{D}_2^{-\alpha},$$

そして

$$\begin{aligned} &(I-L)^{-\alpha/2} L_T^x \\ &= \int_0^T ds \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha/2-1} p^{(r)}(s(1-e^{-2t}), x - e^{-t} w_s) dt \end{aligned}$$

であることを云っている. ■

定理の主張は次のように少しだけ良くなる.

定理$'$. $T > 0, x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$ とする. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^r)$ with $\int_{\mathbb{R}^r} \varphi(y) dy = 1$ は次をみたすとする:

$$0 < {}^\exists\delta < \infty \quad \text{s.t.} \quad \sup_{y \in \mathbb{R}^r} |\varphi(y) e^{\delta|y|^2}| < \infty.$$

このとき ${}^\forall\alpha > r/2 - 1$ に対して

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_0^T \varphi_\varepsilon(x - w_s) ds = L_T^x \quad \text{in } \mathfrak{D}_2^{-\alpha}.$$

ここで

$$\varphi_\varepsilon(y) := \frac{1}{\varepsilon^r} \varphi\Big(\frac{y}{\varepsilon}\Big).$$

証明 まず次のことに注意:

$$|\varphi(y)| \le cp^{(r)}\big(\tfrac{1}{2\delta}, y\big), \quad {}^\forall y \in \mathbb{R}^r. \tag{2}$$

ここで $c := (\pi/\delta)^{r/2} \sup_{y\in\mathbb{R}^r} |\varphi(y)e^{\delta|y|^2}|$. 簡単のため

$$F_\varepsilon(w) := \int_0^T \varphi_\varepsilon(x - w_s)ds$$

とおく．ここで $T > 0, x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}, \varepsilon > 0$. 補題 1 と全く同じようにして

$$\begin{aligned}
&(I-L)^{-\beta}F_\varepsilon(w)\\
&= \int_0^T ds \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty e^{-t}t^{\beta-1}dt \int_{\mathbb{R}^r} \varphi_\varepsilon(y)p^{(r)}(s(1-e^{-2t}), x - e^{-t}w_s - y)dy.
\end{aligned} \tag{3}$$

(2) より

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{\mathbb{R}^r} \varphi_\varepsilon(y)p^{(r)}(s(1-e^{-2t}), x - e^{-t}w_s - y)dy\Big|\\
&\le c\int_{\mathbb{R}^r} p^{(r)}\big(\tfrac{\varepsilon^2}{2\delta}, y\big)p^{(r)}(s(1-e^{-2t}), x - e^{-t}w_s - y)dy\\
&= cp^{(r)}\big(\tfrac{\varepsilon^2}{2\delta} + s(1-e^{-2t}), x - e^{-t}w_s\big)
\end{aligned} \tag{4}$$

今，$\beta > \frac{1}{2}(\frac{r}{2} - 1)$ とする．次を示せばよい:

$$\begin{aligned}
&E\Big[\Big|(I-L)^{-\beta}F_\varepsilon(w) - \int_0^T ds\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\beta-1}p^{(r)}(s(1-e^{-2t}), x - e^{-t}w_s)dt\Big|^2\Big]\\
&\to 0 \quad \text{as } \varepsilon \downarrow 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

左辺は (3) より 2 乗を展開し，そのあとで平均 E と積分 ds, dt を入れ換えることにより次のようになる:

$$\begin{aligned}
\text{左辺} = &\int_0^T\int_0^T dsds' \frac{1}{\Gamma(\beta)^2}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t}t^{\beta-1}e^{-t'}(t')^{\beta-1}dtdt'\\
&\times E\Big[\int_{\mathbb{R}^r} \varphi_\varepsilon(y)p^{(r)}(s(1-e^{-2t}), x - e^{-t}w_s - y)dy\\
&\quad\cdot\int_{\mathbb{R}^r} \varphi_\varepsilon(y)p^{(r)}(s'(1-e^{-2t'}), x - e^{-t'}w_{s'} - y)dy\Big]\\
&-2\int_0^T\int_0^T dsds' \frac{1}{\Gamma(\beta)^2}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t}t^{\beta-1}e^{-t'}(t')^{\beta-1}dtdt'\\
&\times E\Big[\int_{\mathbb{R}^r} \varphi_\varepsilon(y)p^{(r)}(s(1-e^{-2t}), x - e^{-t}w_s - y)dy
\end{aligned}$$

$$\cdot\, p^{(r)}(s'(1-e^{-2t'}), x-e^{-t'}w_{s'})\Big]$$

$$+\int_0^T\int_0^T dsds'\frac{1}{\Gamma(\beta)^2}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t}t^{\beta-1}e^{-t'}(t')^{\beta-1}dtdt'$$

$$\times E\Big[p^{(r)}(s(1-e^{-2t}), x-e^{-t}w_s)p^{(r)}(s'(1-e^{-2t'}), x-e^{-t'}w_{s'})\Big].$$

ここで，各 $s, s' \in (0, T)$, $t, t' \in (0, \infty)$ に対して

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} E\Big[\int_{\mathbb{R}^r}\varphi_\varepsilon(y)p^{(r)}(s(1-e^{-2t}), x-e^{-t}w_s-y)dy$$

$$\cdot\int_{\mathbb{R}^r}\varphi_\varepsilon(y)p^{(r)}(s'(1-e^{-2t'}), x-e^{-t'}w_{s'}-y)dy\Big]$$

$$=\lim_{\varepsilon\downarrow 0} E\Big[\int_{\mathbb{R}^r}\varphi_\varepsilon(y)p^{(r)}(s(1-e^{-2t}), x-e^{-t}w_s-y)dy$$

$$\times p^{(r)}(s'(1-e^{-2t'}), x-e^{-t'}w_{s'})\Big]$$

$$=E\Big[p^{(r)}(s(1-e^{-2t}), x-e^{-t}w_s)p^{(r)}(s'(1-e^{-2t'}), x-e^{-t'}w_{s'})\Big].$$

また (4) と補題 2 より

$$\Big|E\Big[\int_{\mathbb{R}^r}\varphi_\varepsilon(y)p^{(r)}(s(1-e^{-2t}), x-e^{-t}w_s-y)dy$$

$$\cdot\int_{\mathbb{R}^r}\varphi_\varepsilon(y)p^{(r)}(s'(1-e^{-2t'}), x-e^{-t'}w_{s'}-y)dy\Big]\Big|$$

$$\le c^2E\Big[p^{(r)}\big(\tfrac{\varepsilon^2}{2\delta}+s(1-e^{-2t}), x-e^{-t}w_s\big)p^{(r)}\big(\tfrac{\varepsilon^2}{2\delta}+s'(1-e^{-2t'}), x-e^{-t'}w_{s'}\big)\Big]$$

$$=\tfrac{c^2}{2}\big(\tfrac{1}{2\pi}\big)^r\Phi_{\frac{\varepsilon^2}{2\delta},\frac{\varepsilon^2}{2\delta}}\big(s\vee s', \tfrac{s\wedge s'}{s\vee s'}, t+t'; x\big)$$

$$\le\tfrac{c^2}{2}\big(\tfrac{1}{2\pi}\big)^r\Phi\big(s\vee s', \tfrac{s\wedge s'}{s\vee s'}, t+t'; x\big),$$

$$\Big|E\Big[\int_{\mathbb{R}^r}\varphi_\varepsilon(y)p^{(r)}(s(1-e^{-2t}), x-e^{-t}w_s-y)dy$$

$$\cdot\, p^{(r)}(s'(1-e^{-2t'}), x-e^{-t'}w_{s'})\Big]\Big|$$

$$\le cE\Big[p^{(r)}\big(\tfrac{\varepsilon^2}{2\delta}+s(1-e^{-2t}), x-e^{-t}w_s\big)p^{(r)}(s'(1-e^{-2t'}), x-e^{-t'}w_{s'})\Big]$$

$$\le c\big(\tfrac{1}{2\pi}\big)^r\Phi_{\frac{\varepsilon^2}{2\delta},0}\big(s\vee s', \tfrac{s\wedge s'}{s\vee s'}, t+t'; x\big)$$

$$\le c\big(\tfrac{1}{2\pi}\big)^r\Phi\big(s\vee s', \tfrac{s\wedge s'}{s\vee s'}, t+t'; x\big)$$

となる．ただし $0<\varepsilon\le\sqrt{2\delta}$. よって補題 3 より

$$\int_0^T\int_0^T dsds'\frac{1}{\Gamma(\beta)^2}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t}t^{\beta-1}e^{-t'}(t')^{\beta-1}dtdt'\Phi\big(s\vee s', \tfrac{s\wedge s'}{s\vee s'}, t+t'; x\big)$$

$$= \frac{2}{\Gamma(2\beta)} \int_0^T s ds \int_0^1 d\sigma \int_0^\infty e^{-v} v^{2\beta-1} \Phi(s, \sigma, v; x) dv$$
$$< \infty$$

であるから，Lebesgue の収束定理より (5) が直ぐに分かる． ■

注意 1. $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^r)$ は明らかに定理′の条件をみたすから

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^T \varphi_\varepsilon(x - w_s) ds = L_T^x \quad \text{in } \mathfrak{D}_2^{-\alpha}, \ {}^\forall\alpha > \tfrac{r}{2} - 1.$$

これはすでに植村 ([2]) が注意していることである！

補足として，次の 2 つの claim が成り立つ:

Claim 1. ${}^\forall\alpha > 0$ に対して

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, w_s) ds \right\|_{2,-\alpha} = \infty.$$

証明 補題 1, 2 より

$$\left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, w_s) ds \right\|_{2,-\alpha}^2$$
$$= 2 \int_0^T s ds \int_0^1 d\sigma \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-v} v^{\alpha-1} dv \left(\frac{1}{2\pi}\right)^r \left(\frac{1}{\varepsilon^2 + \varepsilon\sigma s + \varepsilon s + \sigma s^2 - \sigma^2 s^2 e^{-2v}}\right)^{r/2}.$$

よって単調収束定理より

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, w_s) ds \right\|_{2,-\alpha}^2$$
$$= 2 \int_0^T s ds \int_0^1 d\sigma \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-v} v^{\alpha-1} dv \left(\frac{1}{2\pi}\right)^r \frac{1}{s^r} \left(\frac{1}{\sigma(1-e^{-2v}\sigma)}\right)^{r/2}$$
$$= 2 \int_0^T s^{1-r} ds \int_0^1 d\sigma \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-v} v^{\alpha-1} dv \left(\frac{1}{2\pi}\right)^r \left(\frac{1}{\sigma(1-e^{-2v}\sigma)}\right)^{r/2}$$
$$= \infty \quad \left[\because r \geq 2 \text{ だから}\right].$$
■

Claim 2. $T > 0, x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$ とする．このとき

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s) ds \right\|_{2,-(r/2-1)} = \infty.$$

証明 まず $r \geq 3$ のとき．補題 2 と Fatou の不等式より

$$\begin{aligned}
&\liminf_{\varepsilon\downarrow 0}\left\|\int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x-w_s)ds\right\|_{2,-(r/2-1)}^2 \\
&\geq 2\int_0^T sds\int_0^1 d\sigma\frac{1}{\Gamma(r/2-1)}\int_0^\infty e^{-v}v^{r/2-1}dv\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^r \\
&\quad\times\Big(\frac{1}{s}\Big)^r\Big(\frac{1}{\sigma(1-\sigma e^{-2v})}\Big)^{r/2}\exp\Big\{-\frac{1+\sigma-2e^{-v}\sigma}{\sigma(1-\sigma e^{-2v})}\frac{|x|^2}{2s}\Big\} \\
&=: (\star).
\end{aligned}$$

補題 3 の証明のように $0<\kappa<1, 0<\eta<1$ を

$$(1-\kappa)\frac{1-e^{-2\eta}}{2\eta} > \frac{1}{2}$$

となるように選ぶと，$1-\kappa < {}^\forall\sigma < 1, 0 < {}^\forall v < \eta$ に対して

$$\begin{aligned}
&\sigma(1-\sigma e^{-2v})\begin{cases}\leq 2(v+1-\sigma) \\ \geq \frac{1}{2}(v+1-\sigma),\end{cases} \\
&1+\sigma-2e^{-v}\sigma \leq 2(v+1-\sigma).
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
(\star) &\geq 2\int_0^T sds\int_{1-\kappa}^1 d\sigma\frac{1}{\Gamma(r/2-1)}\int_0^\eta e^{-v}v^{r/2-1}dv\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^r \\
&\quad\times\Big(\frac{1}{s}\Big)^r\Big(\frac{1}{2(v+1-\sigma)}\Big)^{r/2}\exp\Big\{-\frac{2|x|^2}{s}\Big\} \\
&= 2\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^r 2^{-r/2}\int_0^T s^{1-r}e^{-2|x|^2/s}ds \\
&\quad\times\frac{1}{\Gamma(r/2-1)}\int_0^\kappa\int_0^\eta e^{-v}v^{r/2-1}\Big(\frac{1}{v+\tau}\Big)^{r/2}dvd\tau \\
&= 2\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^r 2^{-r/2}\int_0^T s^{1-r}e^{-2|x|^2/s}ds \\
&\quad\times\frac{1}{\Gamma(r/2-1)}\int_0^\eta e^{-v}v^{-1}\frac{2}{r-2}\Big(1-\Big(\frac{v}{v+\kappa}\Big)^{r/2-1}\Big)dv \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

次に $r=2$ のとき．Fatou の不等式より

$$\liminf_{\varepsilon\downarrow 0}\left\|\int_0^T p^{(2)}(\varepsilon, x-w_s)ds\right\|_2^2$$

$$= \liminf_{\varepsilon\downarrow 0} 2\int_0^T sds \int_0^1 d\sigma \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{s\sigma(2\varepsilon+s(1-\sigma))+(\varepsilon+s(1-\sigma))\varepsilon}$$
$$\times \exp\left\{-\frac{2\varepsilon+s(1-\sigma)}{2(s\sigma(2\varepsilon+s(1-\sigma))+(\varepsilon+s(1-\sigma))\varepsilon)}|x|^2\right\}$$
$$\geq 2\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^T\int_0^1 \frac{1}{s\sigma(1-\sigma)} e^{-|x|^2/2s\sigma} dsd\sigma$$
$$= \infty.$$

■

定理と Claim 2 をまとめて次の theorem が得られる:

Theorem ($p = 2$ の場合). 各 $T > 0, x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$ に対して

$$L_T^x \in \bigcap_{\alpha > r/2-1} \mathfrak{D}_2^{-\alpha}, \text{ but } \notin \mathfrak{D}_2^{-(r/2-1)}.$$

3. $p = 1$ の場合

Claim 3. $T > 0, x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$ とする.
(i) $\beta > 0$ に対して

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon'\downarrow 0} \left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s)ds - \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon', x - w_s)ds \right\|_{1,-2\beta} = 0.$$

(ii) $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, w_s)ds \right\|_1 = \infty.$

証明 まず補題 1 より

$$\left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s)ds - \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon', x - w_s)ds \right\|_{1,-2\beta}$$
$$= \left\| (I-L)^{-\beta} \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s)ds - (I-L)^{-\beta} \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon', x - w_s)ds \right\|_1$$
$$= E\Big[\Big| \int_0^T ds \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} (p^{(r)}(\varepsilon + s(1-e^{-2t}), x - e^{-t}w_s)$$
$$- p^{(r)}(\varepsilon' + s(1-e^{-2t}), x - e^{-t}w_s))dt \Big|\Big]$$
$$\leq \int_0^T ds \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} E\Big[|p^{(r)}(\varepsilon + s(1-e^{-2t}), x - e^{-t}w_s)$$
$$- p^{(r)}(\varepsilon' + s(1-e^{-2t}), x - e^{-t}w_s)|\Big]dt.$$

$x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$ のとき，$0 < \delta \le 1$ に対して

$$\begin{aligned}
&E[p^{(r)}(\delta + s(1-e^{-2t}), x - e^{-t}w_s)] \\
&= \int_{\mathbb{R}^r} p^{(r)}(\delta + s(1-e^{-2t}), x - e^{-t}y)p^{(r)}(s,y)dy \\
&= (e^{2t})^{r/2}\int_{\mathbb{R}^r} p^{(r)}(e^{2t}\delta + s(e^{2t}-1), e^t x - y)p^{(r)}(s,y)dy \\
&= (e^{2t})^{r/2} p^{(r)}(e^{2t}\delta + se^{2t}, e^t x) \\
&= \left(\frac{1}{2\pi(\delta+s)}\right)^{r/2} \exp\left\{-\frac{|x|^2}{2(\delta+s)}\right\} \\
&\le \left(\frac{r}{2\pi e}\right)^{r/2}\frac{1}{|x|^r}.
\end{aligned}$$

よって Lebesgue の収束定理より (i) は上の２つから従う．

次に (ii) についてであるが，これは

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, w_s)ds \right\|_1 &= \int_0^T E[p^{(r)}(\varepsilon, w_s)]ds \\
&= \int_0^T \left(\frac{1}{2\pi(\varepsilon+s)}\right)^{r/2} ds \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\to} \infty.
\end{aligned}$$

■

この claim より次が得られる:

Theorem ($p = 1$ の場合). 各 $T > 0, x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$ に対して

$$L_T^x \in \bigcap_{\alpha>0} \mathfrak{D}_1^{-\alpha}.$$

注意 2. $p = 2$ のときのように「$L_T^x \notin \mathfrak{D}_1^0 = \mathscr{L}_1$」, i.e.,

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon'\downarrow 0}\left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s)ds - \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon', x - w_s)ds \right\|_1 \neq 0$$

が成り立つと信じているが，今のところまだ出来ていない．(ここで $\mathscr{L}_1$ は L_1-空間を表わす．)

4. $1 < p < 2$ の場合

Claim 4. $T > 0, x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$ とする．$1 < {}^\forall p < 2, {}^\forall\gamma > (1 - \frac{1}{p})(\frac{r}{2} - 1)$ に対して

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon'\downarrow 0}\left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s)ds - \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon', x - w_s)ds \right\|_{p,-2\gamma} = 0.$$

この claim の証明のため，次の補題を用意する:

補題 4. $1 \le p_1 < p_2 < p_3 < \infty, \alpha,\ \beta > 0$ とする．$F : W \to [0,\infty)$ を Borel 可測関数とする．このとき

$$\left\|(I-L)^{-(\frac{p_3-p_2}{p_3-p_1}\frac{p_1}{p_2}\alpha+\frac{p_2-p_1}{p_3-p_1}\frac{p_3}{p_2}\beta)}F\right\|_{p_2}$$
$$\le \frac{\Gamma(\alpha)^{\frac{p_3-p_2}{p_3-p_1}\frac{p_1}{p_2}}\Gamma(\beta)^{\frac{p_2-p_1}{p_3-p_1}\frac{p_3}{p_2}}}{\Gamma(\frac{p_3-p_2}{p_3-p_1}\frac{p_1}{p_2}\alpha+\frac{p_2-p_1}{p_3-p_1}\frac{p_3}{p_2}\beta)}\|(I-L)^{-\alpha}F\|_{p_1}^{\frac{p_3-p_2}{p_3-p_1}\frac{p_1}{p_2}}\|(I-L)^{-\beta}F\|_{p_3}^{\frac{p_2-p_1}{p_3-p_1}\frac{p_3}{p_2}}.$$

ここで

$$(I-L)^{-\kappa}F = \frac{1}{\Gamma(\kappa)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\kappa-1}T_tF\,dt, \quad \kappa > 0$$

は $[0,\infty]$-値 Borel 可測関数，そして $[0,\infty]$-値 Borel 可測関数 G に対して簡単のため

$$\|G\|_q := (E[G^q])^{1/q} \in [0,\infty], \quad 1 \le q < \infty$$

とおく．

証明 簡単のため $P,\ Q > 0$ を

$$P := \frac{p_3-p_1}{p_3-p_2}\frac{p_2}{p_1}, \quad Q := \frac{p_3-p_1}{p_2-p_1}\frac{p_2}{p_3}$$

とおく．このとき $\frac{1}{P}+\frac{1}{Q}=1$ であるから

$$\begin{aligned}
(I-L)^{-(\frac{\alpha}{P}+\frac{\beta}{Q})}F &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/P+\beta/Q)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha/P+\beta/Q-1}T_tF\,dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha/P+\beta/Q)}\int_0^\infty (e^{-t}t^{\alpha-1}T_tF)^{1/P}(e^{-t}t^{\beta-1}T_tF)^{1/Q}dt \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha/P+\beta/Q)}\Big(\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}T_tF\,dt\Big)^{1/P}\Big(\int_0^\infty e^{-t}t^{\beta-1}T_tF\,dt\Big)^{1/Q} \\
&\quad \Big[\because \text{Hölder の不等式より}\Big] \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)^{1/P}\Gamma(\beta)^{1/Q}}{\Gamma(\alpha/P+\beta/Q)}\Big((I-L)^{-\alpha}F\Big)^{1/P}\Big((I-L)^{-\beta}F\Big)^{1/Q}.
\end{aligned}$$

よって再び Hölder の不等式より $P',\ Q' > 0\,;\,\frac{1}{P'}+\frac{1}{Q'}=1$ に対して

$$\begin{aligned}
&E\Big[\Big((I-L)^{-(\frac{\alpha}{P}+\frac{\beta}{Q})}F\Big)^{p_2}\Big] \\
&\le \Big(\frac{\Gamma(\alpha)^{1/P}\Gamma(\beta)^{1/Q}}{\Gamma(\alpha/P+\beta/Q)}\Big)^{p_2}E\Big[\Big((I-L)^{-\alpha}F\Big)^{p_2/P}\Big((I-L)^{-\beta}F\Big)^{p_2/Q}\Big]
\end{aligned}$$

$$\le \left(\frac{\Gamma(\alpha)^{1/P}\Gamma(\beta)^{1/Q}}{\Gamma(\alpha/P+\beta/Q)}\right)^{p_2} E\Big[\Big((I-L)^{-\alpha}F\Big)^{p_2P'/P}\Big]^{1/P'} E\Big[\Big((I-L)^{-\beta}F\Big)^{p_2Q'/Q}\Big]^{1/Q'}.$$

ここで

$$P' := \frac{p_3-p_1}{p_3-p_2},\quad Q' := \frac{p_3-p_1}{p_2-p_1}$$

とすれば

$$\frac{p_2P'}{P} = p_1,\quad \frac{p_2Q'}{Q} = p_3$$

となり，補題の主張は直ちに分かる． ■

Claim 4の証明 $T>0, x\in\mathbb{R}^r\setminus\{0\}$ とする．簡単のため $0<{}^\forall\varepsilon\le 1$ に対して

$$F_\varepsilon := \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x-w_s)ds$$

とおく．補題4より，$1<q<2, \alpha,\ \beta>0$ に対して ($p_1=1, p_2=q, p_3=2$ として)

$$\begin{aligned}&\|(I-L)^{-(\frac{2-q}{q}\alpha+\frac{2(q-1)}{q}\beta)}F_\varepsilon\|_q\\ &\le \frac{\Gamma(\alpha)^{(2-q)/q}\Gamma(\beta)^{2(q-1)/q}}{\Gamma(\frac{2-q}{q}\alpha+\frac{2(q-1)}{q}\beta)}\|(I-L)^{-\alpha}F_\varepsilon\|_1^{(2-q)/q}\|(I-L)^{-\beta}F_\varepsilon\|_2^{2(q-1)/q}.\end{aligned}$$

補題3より

$$\sup_{0<\varepsilon\le1}\|(I-L)^{-\beta}F_\varepsilon\|_2<\infty,\quad {}^\forall\beta>\frac{1}{2}\Big(\frac{r}{2}-1\Big).$$

Claim 3より

$$\sup_{0<\varepsilon\le1}\|(I-L)^{-\alpha}F_\varepsilon\|_1<\infty,\quad {}^\forall\alpha>0$$

であるから

$$\sup_{0<\varepsilon\le1}\|(I-L)^{-(\frac{2-q}{q}\alpha+\frac{2(q-1)}{q}\beta)}F_\varepsilon\|_q<\infty,\qquad \begin{aligned}&1<{}^\forall q<2,\\ &{}^\forall\alpha>0,\\ &{}^\forall\beta>\tfrac{1}{2}(\tfrac{r}{2}-1).\end{aligned}$$

さて $1<p<2, \gamma>(1-\frac{1}{p})(\frac{r}{2}-1)$ とする．$q\searrow p$ のとき $(1-\frac{1}{q})(\frac{r}{2}-1)\searrow(1-\frac{1}{p})(\frac{r}{2}-1)$ であるから

$$1<p<{}^\exists q<2\ \text{ s.t. }\ \gamma>(1-\tfrac{1}{q})(\tfrac{r}{2}-1).$$

次に $\alpha \searrow 0, \beta \searrow \frac{1}{2}(\frac{r}{2}-1)$ のとき $\frac{2-q}{q}\alpha + \frac{2(q-1)}{q}\beta \searrow (1-\frac{1}{q})(\frac{r}{2}-1)$ であるから

$$^{\exists}\alpha > 0,\ ^{\exists}\beta > \tfrac{1}{2}(\tfrac{r}{2}-1) \quad \text{s.t.}\ \ \gamma = \tfrac{2-q}{q}\alpha + \tfrac{2(q-1)}{q}\beta.$$

よって上のことと合わせて

$$\sup_{0<\varepsilon\le 1} \|(I-L)^{-\gamma}F_\varepsilon\|_q < \infty \tag{6}$$

が分かる．ところで Claim 3 より

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon'\downarrow 0} \|(I-L)^{-\gamma}F_\varepsilon - (I-L)^{-\gamma}F_{\varepsilon'}\|_1 = 0 \tag{7}$$

である．(6) は $\{(I-L)^{-\gamma}F_\varepsilon\}_{0<\varepsilon\le 1}$ が L_q-有界であること，(7) は $\varepsilon \downarrow 0$ のとき $(I-L)^{-\gamma}F_\varepsilon$ が L_1-収束することを云っている．故に $(I-L)^{-\gamma}F_\varepsilon$ は L_p-収束する．これは Claim 4 の主張に他ならない． ■

Claim 4 より次が得られる:

Theorem ($1 < p < 2$ の場合). 各 $T > 0, x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$ に対して

$$L_T^x \in \bigcap_{\alpha > (1-1/p)(r-2)} \mathfrak{D}_p^{-\alpha}.$$

注意 3. 次のことが open である: $1 < p < 2$ のとき

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x-w_s)ds \right\|_{p,-(1-1/p)(r-2)} = \infty.$$

5. $p > 2$ の場合

Claim 5. $2 < p < \infty$ とする．各 $T > 0, x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$ に対して
(i) $r = 2$ のときは

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x-w_s)ds \right\|_{p} = \infty.$$

(ii) $r \ge 3$ のときは

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x-w_s)ds \right\|_{p,-\alpha} = \infty, \quad 0 < {}^{\forall}\alpha < \left(1-\frac{1}{p}\right)(r-2).$$

Claim 5 の証明 まず $r = 2$ のとき．Hölder の不等式と Claim 2 より

$$\left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x-w_s)ds \right\|_{p} \ge \left\| \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x-w_s)ds \right\|_{2}$$

$$\to \infty \quad \text{as } \varepsilon \downarrow 0.$$

次に $r \geq 3$ のとき．補題 4 で $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = p > 2$, $F = \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s)ds$ とすると

$$\left\|(I-L)^{-\left(\frac{p-2}{p-1}\frac{\alpha}{2}+\frac{p}{p-1}\frac{\beta}{2}\right)}\int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x-w_s)ds\right\|_2$$
$$\leq \frac{\Gamma(\alpha)^{\frac{p-2}{p-1}\frac{1}{2}}\Gamma(\beta)^{\frac{p}{p-1}\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p-2}{p-1}\frac{\alpha}{2}+\frac{p}{p-1}\frac{\beta}{2}\right)}\left\|(I-L)^{-\alpha}\int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x-w_s)ds\right\|_1^{\frac{p-2}{p-1}\frac{1}{2}}$$
$$\times\left\|(I-L)^{-\beta}\int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x-w_s)ds\right\|_p^{\frac{p}{p-1}\frac{1}{2}}.$$

ここで $0 < \beta < \frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})(r-2) = \frac{1}{2}\frac{p-1}{p}(r-2)$ とする．$\frac{p}{p-1}\frac{\beta}{2} < \frac{r-2}{4}$ であるから $\alpha := 2\frac{p-1}{p-2}(\frac{r-2}{4} - \frac{p}{p-1}\frac{\beta}{2}) > 0$ で

$$\frac{p-2}{p-1}\frac{\alpha}{2} + \frac{p}{p-1}\frac{\beta}{2} = \frac{r-2}{4}.$$

また

$$\left\|(I-L)^{-\alpha}\int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x-w_s)ds\right\|_1 = \left\|\int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x-w_s)ds\right\|_1.$$

よって上の不等式は

$$\left\|\int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x-w_s)ds\right\|_{2,-(r/2-1)}$$
$$\leq \frac{\Gamma(\alpha)^{\frac{p-2}{p-1}\frac{1}{2}}\Gamma(\beta)^{\frac{p}{p-1}\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{r-2}{4})}\left\|\int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x-w_s)ds\right\|_1^{\frac{p-2}{p-1}\frac{1}{2}}$$
$$\times\left\|\int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x-w_s)ds\right\|_{p,-2\beta}^{\frac{p}{p-1}\frac{1}{2}}$$

となる．$\varepsilon \downarrow 0$ とすると

左辺 $\to \infty$ $\left[\because \text{ Claim 2 より}\right]$,

$$\left\|\int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x-w_s)ds\right\|_1 \to \int_0^T \left(\frac{1}{2\pi s}\right)^{r/2} e^{-|x|^2/2s}ds$$

であるから

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\|\int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x-w_s)ds\right\|_{p,-2\beta} = \infty. \qquad \blacksquare$$

Claim 6. $T > 0, x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$ とする．$p \in \mathbb{N}, \beta > \frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})(r-2)$ に対して

$$\sup_{0<\varepsilon\le 1}\left\|(I-L)^{-\beta}\int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x-w_s)ds\right\|_p < \infty.$$

$r \geq 3, p \in \mathbb{N}\cap[2,\infty)$ のときは，Claim 6 の主張の逆が成り立つ:

Claim 7. $r \geq 3, T > 0, x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$ とする．もし，$k \in \mathbb{N}\cap[2,\infty), \beta > 0$ に対して

$$\sup_{0<\varepsilon\le 1}\left\|(I-L)^{-\beta}\int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x-w_s)ds\right\|_k < \infty$$

ならば，$\beta > \frac{1}{2}(1-\frac{1}{k})(r-2)$ でなければならない．

実は，Claim 6 と 7 が我々の計算において一番肝心なところであるが，それらの証明はたくさんの労力 (ページ数) を必要とするので，ここでは省略する (詳細は，[3] に譲ることにする．このプレプリントで，Claim 6 の証明には 36 ページ，Claim 7 の証明には 6 ページを費している)．

Theorem ($p > 2$ の場合). $T > 0, x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$ とする．

(i) $L_T^x \in \bigcap_{\alpha > (1-\frac{1}{p})(r-2)} \mathfrak{D}_p^{-\alpha}$.

(ii) $r = 2$ のときは

$$L_T^x \in \mathfrak{D}_p^{-\alpha} \underset{\text{必十}}{\Longleftrightarrow} \alpha > 0.$$

(iii) $r \geq 3, p \in \mathbb{N}$ のときは

$$L_T^x \in \mathfrak{D}_p^{-\alpha} \underset{\text{必十}}{\Longleftrightarrow} \alpha > (1-\tfrac{1}{p})(r-2).$$

(iv) 一般の $p \in (2,\infty)$ に対しては

$$L_T^x \notin \mathfrak{D}_p^{-\alpha}, \quad {}^\forall\alpha < (1-\tfrac{1}{p})(r-2).$$

(i) の証明 2 段階で示す．

<u>1°</u> $k \in \mathbb{N}, k < q < k+1$ とする．補題 4 より，${}^\forall\alpha, \beta > 0$ に対して

$$\begin{aligned}&\left\|(I-L)^{-\left(\frac{k+1-q}{q}k\alpha+\frac{q-k}{q}(k+1)\beta\right)}F_\varepsilon\right\|_q \\ &\le \frac{\Gamma(\alpha)^{\frac{k+1-q}{q}k}\Gamma(\beta)^{\frac{q-k}{q}(k+1)}}{\Gamma\left(\frac{k+1-q}{q}k\alpha+\frac{q-k}{q}(k+1)\beta\right)}\|(I-L)^{-\alpha}F_\varepsilon\|_k^{\frac{k+1-q}{q}k}\|(I-L)^{-\beta}F_\varepsilon\|_{k+1}^{\frac{q-k}{q}(k+1)}.\end{aligned}$$

ここで簡単のため

$$F_\varepsilon = \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s)ds$$

とする．Claim 6 より $\alpha > \frac{1}{2}(1-\frac{1}{k})(r-2)$, $\beta > \frac{1}{2}(1-\frac{1}{k+1})(r-2)$ のときは

$$\sup_{0<\varepsilon\le 1}\left\|(I-L)^{-\left(\frac{k+1-q}{q}k\alpha+\frac{q-k}{q}(k+1)\beta\right)}F_\varepsilon\right\|_q < \infty$$

となる．ところで

$$\left\{\tfrac{k+1-q}{q}k\alpha + \tfrac{q-k}{q}(k+1)\beta\,;\,\alpha > \tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{k})(r-2), \beta > \tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{k+1})(r-2)\right\}$$
$$= \left(\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{q})(r-2), \infty\right)$$

であるから，$^\forall\gamma > \frac{1}{2}(1-\frac{1}{q})(r-2)$ に対して

$$\sup_{0<\varepsilon\le 1}\|(I-L)^{-\gamma}F_\varepsilon\|_q < \infty.$$

<u>2°</u> $1 \le p < \infty, \gamma > \frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})(r-2)$ とする．

$$\lim_{q\searrow p}\downarrow\left(1-\frac{1}{q}\right)(r-2) = \left(1-\frac{1}{p}\right)(r-2)$$

より

$$p < {}^\exists q < \infty \quad \text{s.t.} \quad \gamma > \frac{1}{2}(1-\frac{1}{q})(r-2).$$

よって Claim 6 と 1° より

$$\sup_{0<\varepsilon\le 1}\|(I-L)^{-\gamma}F_\varepsilon\|_q < \infty.$$

一方，Claim 3 より

$$\|(I-L)^{-\gamma}F_\varepsilon - (I-L)^{-\gamma}F_{\varepsilon'}\|_1 \to 0 \quad \text{as} \quad \varepsilon, \varepsilon' \downarrow 0$$

であるから，上と合わせて

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon'\downarrow 0}\|(I-L)^{-\gamma}F_\varepsilon - (I-L)^{-\gamma}F_{\varepsilon'}\|_p = 0. \qquad \blacksquare$$

(ii) の証明 “$\Longleftarrow$” は (i) より，“$\Longrightarrow$” は Claim 5(i) より従う． $\blacksquare$

(iii) の証明 “$\Longleftarrow$” は (i) より従う．“$\Longrightarrow$” は Claim 7 より次のようにして分かる: $k \in \mathbb{N} \cap [2, \infty)$, $\beta > 0$ に対して

$$\lim_{\varepsilon, \varepsilon' \downarrow 0} \|F_\varepsilon - F_{\varepsilon'}\|_{k,-2\beta} = 0$$

とする．このとき

$$\sup_{0<\varepsilon\leq 1} \left\| (I-L)^{-\beta} \int_0^T p^{(r)}(\varepsilon, x - w_s) ds \right\|_k < \infty$$

となるから，Claim 7 より

$$\beta > \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right)(r-2).$$

これは“$\Longrightarrow$”を示している． ■

(iv) の証明 これは Claim 5(ii) より明らかである． ■

参考文献

[1] P. Imkeller and F. Weisz, The asymptotic behaviour of local times and occupation integrals of the N-parameter Wiener process in $\mathbb{R}^d$, *Probab. Theory Relat. Fields*, **98** (1994), 47–75.

[2] H. Uemura, Plane wave decomposition of odd-dimensional Brownian local times, *J. Math. Kyoto Univ.*, **39** (1999), 365–375.

[3] 植村英明・高信敏, Malliavin 解析における多次元 Brown 運動の局所時間について, 2.00 版, プレプリント (2003 年 9 月).

[4] S. Watanabe, Donsker's δ-functions in the Malliavin calculus, in *Stochastic analysis, Liber amicorum for Moshe Zakai* (ed. by E. Mayer-Wolf, E. Merzbach and A. Shwartz), 495–502, Academic Press, New York, 1991.

[5] S. Watanabe, Fractional order Sobolev spaces on Wiener space, *Probab. Theory Relat. Fields*, **95** (1993), 175–198.

[6] S. Watanabe, Wiener functionals with the regularity of fractional order, in *New trends in stochastic analysis, Proceedings of a Taniguchi International Workshop* (ed. by K.D. Elworthy, S. Kusuoka and I. Shigekawa), 416–429, World Scientific, Singapore, 1997.