

非中性プラズマによる渦糸の二次元運動の実験的研究

伊 藤 清 一

非中性プラズマによる渦糸の二次元運動の実験的研究

伊藤 清一

概要

非中性プラズマとは狭義には単一電荷の粒子群で構成されるプラズマのことであり、電場と磁場を組み合わせることにより閉じ込めることが可能である。このとき、磁場方向の粒子密度が一樣であれば、磁場に垂直な断面内の粒子の巨視的な運動は二次元 Euler 流体 (非粘性, 非圧縮性) の渦運動と等価となる。ここで、密度と渦度, ポテンシャルと流線がそれぞれ対応する。

本研究の目的は電子のみで構成される電子プラズマを用いて二次元 Euler 流体の渦運動, 特に, 断面積がゼロとみなせる程度に細い渦 (渦糸) の相互作用を実験的に検討することである。

渦運動の検討に先立ち, 画像計測により得られる二次元の密度分布からポテンシャル分布を高速に導出する手法を開発した。これにより流体力学を電磁気学に焼き直すことが可能となる。この手法を適用して, 画像計測と静電誘導計測の持つ情報量を初めて定量的に比較し, 静電誘導計測が適用できる限界を示した。

つづいて, 渦糸の運動を詳細に観測・検討した。まず, 真空中に 1~4 本の電子プラズマの渦糸を配置した場合の運動を追跡し, その運動が中性流体の渦糸の運動方程式と良く一致することを初めて確認した。

次に, 空間的に広がった低レベルの渦度分布 (背景渦) と渦糸の相互作用に注目する。近年, 二次元乱流が秩序的な渦構造に緩和する過程において背景渦が重要な役割を負う事が指摘されている。本研究ではその素過程として, 背景渦中の一本の渦糸の運動について検討を行なった。その結果, 渦糸は背景渦度の勾配を登るように運動し, この時背景渦中にらせん状の構造が形成されることを確認した。この構造が渦糸と背景渦の相互作用により誘起されることを示すとともに, 前述の場の高速解法を適用することにより, 渦糸の運動をこの構造が作る速度場から説明した。

また, 勾配を持つ背景渦中において渦糸自身が楕円状に変形することも確認した。楕円度の大きさは数値的には理論モデルからの予測値に近い。変形が大きくなると, 渦紐は大きく引き伸ばされ, 背景渦の中に埋もれてしまう。線形モデルは渦糸が崩壊する条件に関して実験結果を十分説明しえない。渦糸の崩壊の過程を実験的に明らかにした。

目次

第1章 序論	1
1.1 はじめに	1
1.2 非中性プラズマの閉じ込め	2
1.3 電子プラズマの運動と二次元 Euler 流体の渦運動の等価性	4
第2章 電子プラズマ渦の生成と観測	11
2.1 閉じ込め装置	11
2.2 電子プラズマの生成	12
2.3 画像計測システム	13
2.4 二次元 Euler 流体との等価性の評価	15
第3章 渦度分布からの速度場の実験的導出と静電誘導計測との比較	23
3.1 背景と目的	23
3.2 二次元の場の導出法	24
3.2.1 基礎方程式と直接的解放	24
3.2.2 級数展開を用いた高速解法	25
3.3 紐状の電子プラズマの運動により誘起されるプローブ電流	29
3.3.1 電子分布からのプローブ電流導出法	29
3.3.2 紐状プラズマにより誘起されるプローブ信号	30
3.4 複雑な密度分布を持つ電子プラズマが誘起するプローブ電流	32
3.5 検討	36
3.6 まとめ	36
第4章 真空中の離散的な渦糸群の運動	50
4.1 背景と目的	50
4.2 渦糸運動の方程式	51
4.3 1本の渦糸の運動	53
4.4 真空中の2本の渦糸の運動	57
4.5 3本の渦糸の運動	60
4.6 4本の渦糸の運動	61
4.7 真空中の渦糸の運動に関するまとめ	62

第 5 章	背景渦中の渦糸の運動	
5.1	背景と目的	1
5.2	背景渦中の渦糸の運動	1
5.3	勾配をもつ背景渦中の渦糸運動の一般的特性	1
5.4	渦糸が渦度勾配を登る機構	1
5.5	背景渦中の渦糸の運動の線形モデル	1
5.6	実験と線形モデルの比較	1
5.7	渦糸運動の速度の評価	1
5.8	回転座標系で見たポテンシャル分布	1
5.9	長いタイムスケールでの渦度分布の発展	1
5.10	まとめ	1
第 6 章	背景渦中での渦紐の変形と崩壊	1
6.1	背景と目的	1
6.2	渦紐の楕円化	1
6.3	渦紐の伸張と崩壊	1
6.4	二次元 Euler 流体との等価性の検討	1
6.5	まとめ	1
第 7 章	まとめ	1

第1章 序論

1.1 はじめに

放電等に見られるかなりの程度に電離した気体は通常の固体、液体、気体とは著しく異なった性質を持つ物理状態である。Langmuir [1] はこの様な物質状態をプラズマと呼んだ。プラズマは非常に高温の物質の自然状態であり、炎、爆発気体、電光、オーロラ、電離層、Van Allen 帯、太陽、星の外気など宇宙の至る所に存在する。その意味で固体、液体、気体に続く物質の第4の状態とも言われる。プラズマは荷電粒子の集合体であるので Coulomb 力を通じて相互作用することにより、多彩な集団運動を行なうとともに、平均電荷がいたるところでほぼゼロとなるようにその分布を変化させる。この「集団的現象」と「準中性条件」がプラズマの大きな特徴である。

一方、プラズマ状態から準中性条件が除かれたものが広い意味での非中性プラズマであり、典型的には正か負どちらか片方の電荷を持つ粒子で構成された粒子群を指す。当然のことながら、単一極性の電子やイオンのみの集団は粒子間の Coulomb 力で発散してしまう。従って、外部から電磁力を加えて初めて集団の形が維持される。このような単一電荷の集団を非中性プラズマと特定しての研究はカリフォルニア大学サンディエゴ校 (UCSD) において 1970 年代中ごろに始まった。

非中性プラズマの特徴としては、粒子の閉じ込め時間が中性プラズマに比較して圧倒的に長いことが上げられる。閉じ込め時間が数日に及ぶ長時間の粒子捕捉も実現され、荷電粒子を捕捉状態で長距離輸送することも可能となっている。非中性プラズマでは Coulomb 力が反対の電荷で遮蔽されないため、相互作用が長距離まで及び、巨視的には極めてダイナミックな相互作用が起こるのも特徴の一つである。一方で粒子間の Coulomb 衝突は極めて少ないので、衝突による散逸は弱く、散逸的な緩和過程はゆっくりと進行する。従って、非中性プラズマでは粒子緩和時間よりも遥かに短い時間から、数桁長い時間までの広い時間帯に渡る物理現象を追跡することが可能である。また、反対電荷との再結合が無いので低エネルギー状態で系を生成、維持することが可能であり、制御性、再現性が非常に高いなど実験面でも優れた利点を持つ。

前述のように非中性プラズマを捕捉しておくためには外部から電磁場を印加する必要がある。ここで、一様磁場により捕捉された非中性プラズマの運動を考える。強く磁化された非中性プラズマの密度分布が磁場方向に一様であれば、磁場に垂直な断面内での運動は、巨視的には二次元の非圧縮性、非粘性流体 (二次元 Euler 流体) と等価になる [2, 3]。このとき、電子密度 $n(x, y)$ と渦度 $\zeta(x, y)$ 、ポテンシャル $\phi(x, y)$ と流線 $\psi(x, y)$ が対応する。この関係を用いると、二次元 Euler 流体の渦運動と非中性プラズマの巨視的な運動を対応させることが可能となる。

これには次のような利点がある。中性流体の渦については百年以上に及ぶ研究の歴史があり [4, 5, 6]、豊富な知識が蓄積されている。特に二次元 Euler 流体の渦運動については良く研究されてい

るが、現実の流体を用いた実験では近似が難しく、多くは理論的な研究であり、非常に数学的である。一方、非中性プラズマにおいては磁場に垂直な断面内の密度分布は画像計測により詳細計測することが出来る。従って、この等価性を用いることにより中性流体の渦運動を非中性プラズマにおける密度分布の時間発展と言う形で高い精度で実験的に検討することが可能となる。の際、速度の回転微分で与えられ本来はベクトルである渦度を密度というスカラー量として直的に観測できるのも非常に大きな利点である。また、中性流体の渦に対する豊富な知識を利用することにより、実験の見通しが立てやすくなるという恩恵もある。

本研究ではこの等価性を用いて二次元 Euler 流体の渦運動を実験的に検討することを目的とする。その中でも特に断面積がゼロとみなせる程度に細い分布を持つ渦 (渦糸) に注目する。

本論文の構成は次の通りである。まず本章において、代表的な非中性プラズマの閉じ込め方電子プラズマと二次元 Euler 流体の等価性について述べる。次に第 2 章で本研究に用いた実験装置、画像計測系の較正と実験手順等について記す。

第 3 章では渦運動を定量的に検討するために必要となるポテンシャル分布を、観測された径分布から高速に導出する方法について述べる。これにより、流体力学を電磁気学に焼き直すことが可能となる。また、この結果は流体力学における様々な統計量を評価するのにも有効である。に、この手法を適用することにより画像計測と静電誘導計測の情報量を定量的に比較すること試みる。

第 4 章では、真空中に導入された紐状の電子プラズマの運動を詳細に追跡し、その運動が中性流体の渦糸の運動方程式から予測される運動と良く一致することを示す。離散的な渦糸群の運動は力学的な運動方程式で表されることが良く知られているが [7]、このような状況を実在の流体に再現し、その運動を実験的に検証することは極めて困難である。小型、高放出効率の電子源を用いた電子プラズマ実験において初めて可能となった。

第 5 章、第 6 章で空間的に広がったより低レベルの渦度分布 (背景渦) と渦糸の相互作用について検討する。背景渦中に置かれた渦糸の挙動は真空中のそれとは著しく異なったものとなる。次元乱流が秩序的な渦構造に緩和する過程では、背景渦が重要な役割を負っているとの指摘もある [8]。ここでは、その素過程として、背景渦中に導入された 1 本の渦糸運動に注目する。また第 5 章では、背景渦中の渦糸の運動と背景渦中に誘起される渦度構造の変化に注目し、その物機構について理論モデルと比較しつつ、定量的な検討を行なう。反対に、第 6 章では渦糸に誘起される変形について理論モデルと比較・検討する。また、各種の保存量を用いて電子プラズマと二次元 Euler 流体との等価性について検討を行なう。最後に第 7 章で本論文をまとめる。

1.2 非中性プラズマの閉じ込め

この節では、非中性プラズマの代表的な閉じ込め方法と非中性プラズマの閉じ込め時間が中性プラズマに比べて長くなる根拠について示す。真空状態においては、静電場の発散はゼロであるから、ポテンシャルは空間的に極大値、極小値をとることは出来ない。従って、静電場だけでは荷粒子を捕捉することは不可能である (Earnshaw の定理)。定常的な場で閉じ込めるためには、荷

場と定常磁場を組み合わせる必要がある。良く知られているように、荷電粒子は磁場に巻き付いて運動する(サイクロトロン運動)ので、磁場に垂直な方向への運動を抑制することが出来る。一方、磁場に平行な方向には自由に運動することが出来るが、これを静電場で抑制すればよい。Penning Trap [9]はその代表例であり、図 1.1 に模式図を示す。Penning Trap では軸方向の電位障壁を軸の周りを回転する 3 枚の双曲面で作る。図 1.2 に示すように、周囲の輪状の電極を円筒に替え、両端の電極も中空の円筒にして、軸方向に粒子を輸送する空間を確保したものを Malmberg Trap と呼ぶ [10]。中央の円筒に対して両端の円筒の電位を設定することで、軸近くに長い円柱型の非中性プラズマを閉じ込めることが出来る。本研究ではこの配位において実験を行なう。

非中性プラズマは、中性プラズマに比べ閉じ込め時間が圧倒的に長いのがその特徴の一つである。その根拠としては、非中性であることと軸対称性を有することの二つが基本的要素である。一様磁場 B_0 中で N 個の単一種の荷電粒子で構成される系を考える。軸対称系においては全角運動量 P_θ が保存する。

$$P_\theta = \sum_i^N r_i [p_{i\theta} - qA_\theta(r_i, z_i)] = \sum_i^N r_i \left[mv_{i\theta} - \frac{qB_0 r_i}{2} \right]. \quad (1.1)$$

ここで、 $A_\theta = B_0 r/2$ は z 軸方向の均一磁場をつくるベクトルポテンシャルであり、右辺の第二項は Lorentz 力の効果を表わす。 q , m はそれぞれ、荷電粒子の電荷量と質量である。いま、十分に強磁場の場合を考えると、第 2 項は第 1 項に比べ十分に大きくなり第 1 項を無視することが出来るので、

$$P_\theta \approx -qB \sum_i^N \frac{r_i}{2} \quad (1.2)$$

となる。従って、粒子の一部が軸から遠ざかろうとすると、 $P_\theta =$ 一定の拘束条件から他の粒子は軸に近づかなければならず、プラズマの二乗平均半径は保存され、長時間の閉じ込めが保証される。

このように、非中性プラズマ閉じ込めにおいて重要なものは幾何学的な対称性による保存量の確保であり、実用化されている閉じ込め方式は全て軸対称性を持ったものとなっている。閉じ込め時間が数日に及ぶ長時間の粒子捕捉も実現され、荷電粒子を捕捉した状態での長距離輸送も可能となっている。ただし、非中性プラズマでは空間電荷に伴う斥力により、プラズマ密度が比較的低い値に制限される。良く知られているのは Brillouin 限界、

$$n_{BL} = \frac{\varepsilon_0 B_0^2}{2m} \quad (1.3)$$

であり、密度限界は外部磁場の二乗に比例する [11]。ここで、 ε_0 は真空の誘電率である。

磁場を用いずに非中性プラズマを閉じ込める方法としては、高周波電場と静電場を組み合わせる Paul Trap と呼ばれる方法がある。代表的な閉じ込め配位を図 1.3 に示す。平行する 4 本の電極のうち、対向する電極には同位相の、隣の電極には 180 度の位相差を持った高周波電圧を印加する。このような配位では、動重力 (Ponderomotive Force) によって、軸に垂直な断面内の実効的なポテンシャルが極小分布を形成する。後は軸方向に静電ポテンシャル障壁を形成してやれば、荷電粒子を三次元的に閉じ込めることが可能である。この閉じ込め配位は線形 Paul Trap [12] と呼ばれ、Coulomb 結晶や加速器中のビームのシミュレーション、原子物理等の研究に利用される。

1.3 電子プラズマの運動と二次元 Euler 流体の渦運動の等価性

次に, Malmberg Trap 中に閉じ込められた電子プラズマの運動が二次元 Euler 流体の渦運動等価になることを示す [2, 3]. Malmberg Trap に捕捉された電子プラズマは磁力線に沿って往運動をしながら柱状の分布を形成する. Malmberg Trap では磁場 $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$ は一様であり, 電の間隔を長くとることで主たる閉じ込め領域でポテンシャルをほぼ一様とすることが出来る. 従って, プラズマが磁場方向に十分に長いとして端の効果を見捨ると, 軸方向の密度分布は一様なる. この様な条件では電子の柱状分布の運動は磁場に垂直な断面内 (二次元) の運動に限られこのとき, 柱は何本あってもよいし, また断面内の密度分布が一様である必要はない.

さて, 電子の分布により静電場 $\mathbf{E}(x, y) = -\nabla\phi(x, y)$ が発生する. ここで, (x, y) は磁場に垂直な断面内の座標である. この電場により駆動される電子プラズマの運動を考える. いま, 電場の時間変化のスケールは電子のサイクロトロン運動の半径 (Larmor 半径) r_L に比べ十分に長く, 電場分布の時間変化のタイムスケールが電子のサイクロトロン運動の周期に比べ十分に長い場合, 即ちある電子の周りで空間的にも時間的にも電場が一様な場合を考える. この時, 電子のサイクロトロン運動の中心は電場と磁場の両方に直交する方向へと運動し, その速度は次式で与えられる

$$\mathbf{v}_d = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}_0}{B_0^2} \quad (1)$$

これは $E \times B$ ドリフトと呼ばれる運動で, 電荷の正負に関わらず同じ方向に移動する [13]. Larmor 半径が密度分布の拡がりよりも十分に小さければ, 電子の位置をサイクロトロン運動の中心 (案内中心) で置き換えることが出来る.

式 (1.4) で表される案内中心の速度を $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ を使って書き直すと

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_d &= \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}_0}{B_0^2} = \frac{-\nabla\phi \times \mathbf{B}_0}{B_0^2} \\ &= \frac{1}{B_0} \left(-\frac{\partial\phi}{\partial y} \hat{x} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \hat{y} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

を得る. \mathbf{v}_d の発散をとると,

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_d = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{1}{B_0} \left(-\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} \right) = 0 \quad (1)$$

従って, $E \times B$ ドリフトによる電子プラズマの流れは非圧縮性である. 式 (1.5) から案内中心は電位面に沿って動くことがわかる. 流体力学における流れ関数 ψ は流れの速度 \mathbf{v} と $\mathbf{v} = \hat{z} \times \nabla$ の関係にあるから, 式 (1.5) との対応から,

$$\psi(x, y) = \frac{\phi(x, y)}{B_0} \quad (1)$$

の関係にある. 一方, 渦度 ζ は,

$$\zeta = \zeta \hat{z} = \nabla \times \mathbf{v}_d = \hat{z} \nabla^2 \frac{\phi}{B_0} \quad (1)$$

であるから, Poisson 方程式 $\nabla^2\phi = en/\epsilon_0$ を適用すると,

$$\zeta(x, y) = \frac{en(x, y)}{\epsilon_0 B_0} \quad (1)$$

となり、渦度の強さ ζ は電子の密度 n を磁場強度で割った量に比例することが分かる。ただし、 $-e$ は電子の素電荷である。従って、全電子数 N の電子プラズマの循環 Γ は

$$\Gamma = \int_s dx dy \zeta(x, y) = \frac{eN}{\varepsilon_0 B_0 L} \quad (1.10)$$

となる。ここで、 L はプラズマの軸方向の長さである。

電子プラズマの閉じ込められた空間では電子の生成・消滅がないから、その密度 n は連続の式を満たす。

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla n = 0 \quad (1.11)$$

両辺に定数 $e/\varepsilon_0 B_0$ を掛けると、渦度 ζ の連続の式が導かれる。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \zeta = 0 \quad (1.12)$$

以上の結果を図 1.4 にまとめて示す [3].

$E \times B$ ドリフトに注目すると非中性プラズマの運動は、非粘性、非圧縮性の理想流体として振る舞うことが分かった。しかし、そのためにはいくつかの条件が成立していなければならない。最後にそれらについてまとめておく。

まず、空間スケールに関しては次の二つの条件が必要となる。一つは、二次元の近似が成立するために、プラズマの長さ L がプラズマの断面のサイズ r_a よりも十分に長いことである。もう一つは、 $E \times B$ ドリフトが成立するために Larmor 半径 r_L が r_a よりも十分に小さいことである。従って、

$$L \gg r_a \gg r_L \quad (1.13)$$

でなければならない。

時間スケールに対しては次の条件が必要となる。まず、 $E \times B$ ドリフトが成立するために電子のサイクロトロン周波数 f_{ce} に比べ、 $E \times B$ ドリフトの代表的な周波数 f_d が低くなければならない。次に、軸方向の密度の一様性が確保されるためには軸方向の往復運動の周波数 f_b が f_d よりも速くなければならない。以上の条件は先の空間に対する条件を時間に焼き直したものとも考えることも出来る。ただし、時間に関してはもう一つ重要な条件がある。それは現象の進行するタイムスケールが電子間の Coulomb 衝突時間 $T_{co} = 1/f_{co}$ に比べ十分に速いことである。Coulomb 衝突が生じると電子の軌道がずれるため、 $E \times B$ ドリフト近似は成立しなくなる。中性ガスとの衝突も同様であるが、これは真空度を十分に上げることにより T_{co} に比べさらに長いタイムスケールとすることが可能である。以上をまとめると、時間スケールに関する条件は、

$$f_{co} \ll f_d \ll f_b \ll f_{ce} \quad (1.14)$$

となる。以上の式 (1.13), (1.14) が、電子プラズマの巨視的な運動が、理想流体の渦運動と等価であるために必要な条件である。

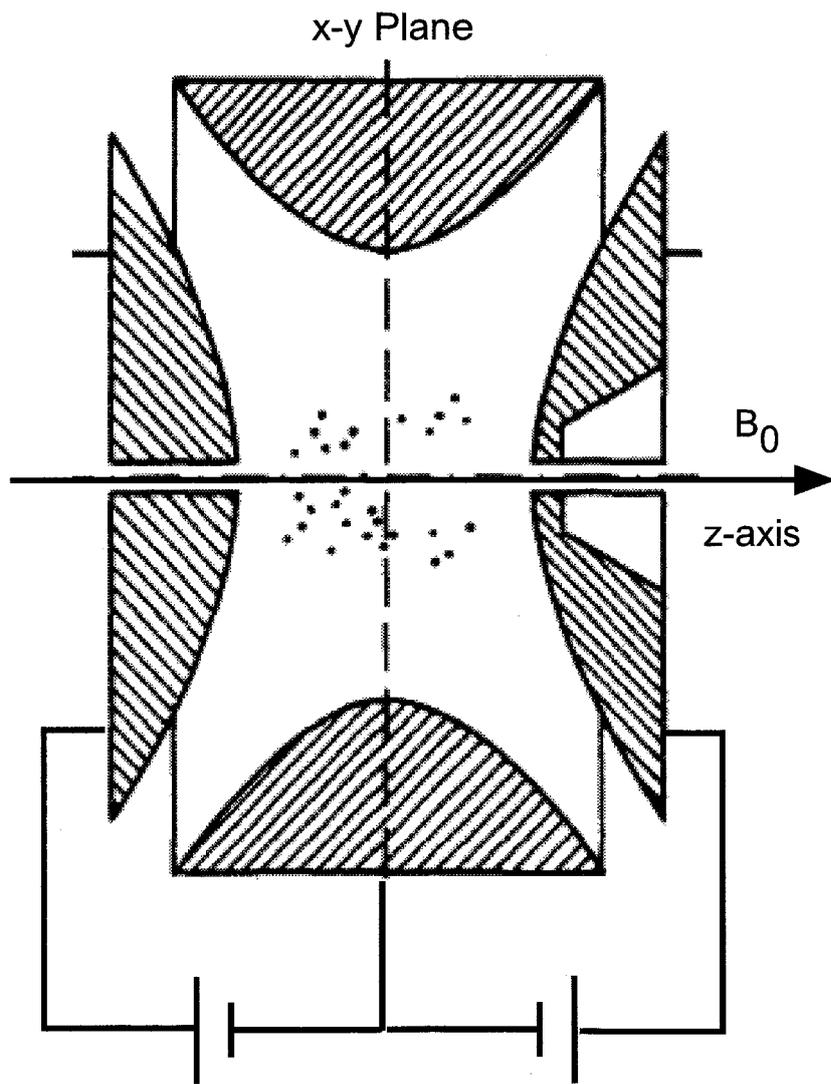


図 1.1: Penning Trap の模式図.

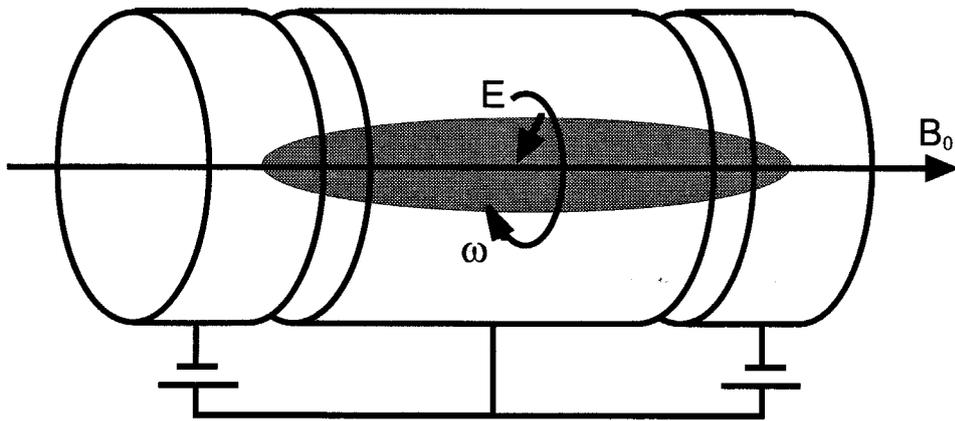


図 1.2: Malmberg Trap の模式図.

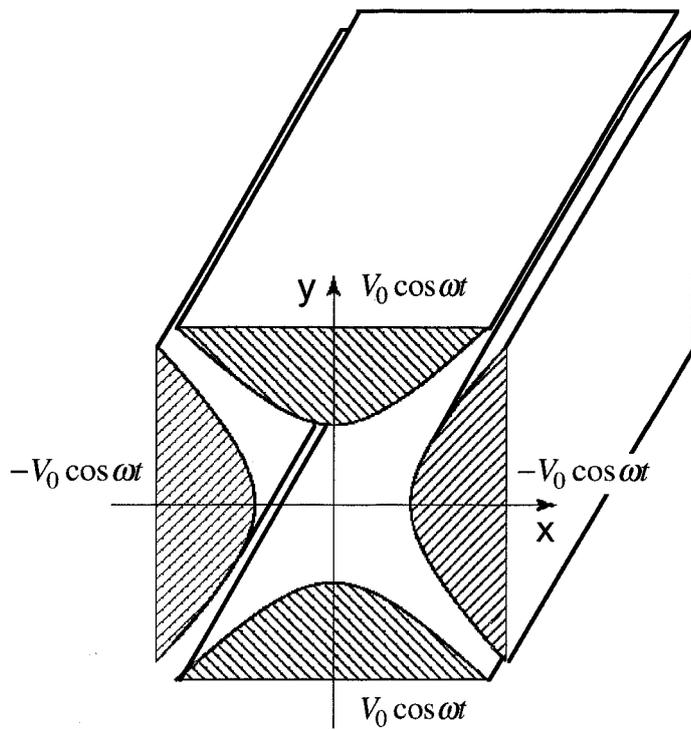


図 1.3: 線形 Paul Trap の模式図.

2D Drift Poisson

$$\nabla \cdot v = 0$$



ExB Drift

$$v = -\nabla\phi \times \hat{z} / B_0$$

Vorticity

$$\begin{aligned}\vec{\zeta} &= \nabla \times v = \frac{\hat{z}}{B_0} \nabla^2 \phi \\ &= \frac{en}{\epsilon_0 B_0} \hat{z} = \frac{\omega_p^2}{\omega_c} \hat{z}\end{aligned}$$



Poisson $\epsilon_0 \nabla^2 \phi = en$

Continuity

$$\frac{\partial n}{\partial t} + v \cdot \nabla n = 0$$



$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + v \cdot \nabla \zeta = 0$$

2D Euler Fluid

$$\nabla \cdot v = 0$$



Stream Function

$$v = -\nabla\psi \times \hat{z}$$

Vorticity

$$\vec{\zeta} = \nabla \times v = \hat{z} \nabla^2 \psi$$

Momentum

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$



図 1.4: 案内中心近似の非中性プラズマの巨視的記述と Euler 流体の記述の対応.

関連図書

- [1] Langmuir, Oscillation in ionized gases, Proc. Nat. Acad. S. **14**, 627 (1928)
- [2] R. H. Levy, Phys Fluids **11**, 920 (1968)
- [3] C. F. Driscoll and K. S. Fine, Phys. Fluids B **2**, 1359 (1990)
- [4] W. T. Kelvin, *Mathematical and Physical Papers* (Cambridge University Press, Cambridge, 1910).
- [5] J. J. Thomson, *A Treaties on the Motion of Vortex Rings* (Macmillian, London, 1883).
- [6] P. G. Saffman, *Vortex Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).
- [7] 巽友正「新物理学シリーズ 21 流体力学」培風館 (1992).
- [8] D. A. Schecter *et al*, Phys. Fluids **11**, 905 (1999).
- [9] F. M. Penning, Physica **3**, 873 (1936).
- [10] J. H. Malmberg and J. S. deGrassie, Phys. Rev. Lett. **35**, 577 (1975).
- [11] R. C. Davidson, *Physics of Nonneutral Plasmas*, Addison-Wesley (1990) Redwood City, CA.
- [12] W. Paul, Rev. Mod. Phys. **62**, 531 (1990).
- [13] F. F. Chen, *Introduction to Plasma Physics*, Plenum Press (1974), New York.

第2章 電子プラズマ渦の生成と観測

本章では、研究に使用した実験装置の構成と性能について報告する。まず、閉じ込め装置全体と閉じ込めのための電磁場分布について記す。次に電子源と電子プラズマの生成、抽出方法について記し、画像計測装置とその較正結果について報告する。最後に、本実験装置において二次元 Euler 流体との等価性が成り立つ範囲について検討する。

2.1 閉じ込め装置

本実験に用いた実験装置の概略図を図 2.1 (a) に示す [1, 2]。実験は円筒形の導体壁に囲まれた真空の空間に電子ビームを導入し、これを半径方向には磁場で軸方向には静電場で閉じ込めることにより行なう。真空容器は円筒形であり、その中心軸が磁気軸と一致するように設置されている。容器内はターボ分子ポンプとロータリーポンプによって 10^{-9} Torr 程度の超高真空に保たれている。ここで、簡単のためつぎのように座標系を定義しておく。閉じ込め領域の中心を原点として、導体壁の中心軸を蛍光面側からカソード側に向かって (図中では左向き) z 軸とする。鉛直下向きを y 軸とし、水平面内に右手系となるように x 軸を定義する。

真空容器には半径 32 mm、長さ 22 mm のアルミ製の円筒電極 11 個が、2 mm の間隙を持って設置されている。その両端には軸方向閉じ込めポテンシャル (プラグポテンシャル) 生成用の長さ 54 mm の円筒電極 (プラグ電極) が設置されている。それぞれの電極は互いに絶縁されており、印加電圧を独立に制御することが可能である。これにより、様々なポテンシャル配位を形成することが出来る [3]。本研究では電子密度の軸方向分布の一様性を確保するため、11 個の円筒電極はすべて接地してプラグ電極にのみ負のバイアス電圧を印加した Malmberg 型の配位で実験を行なう [4]。

図 2.2 に 11 個の円筒電極を接地して、プラグ電極に $V_{plug} = -1$ V の電圧を印加した場合の真空のポテンシャル分布 $\tilde{\phi}^{ext}$ を示す。プラグ電極は $z = \pm(133 \sim 185)$ mm に設置されている。 $\tilde{\phi}^{ext}$ の $r-z$ 平面の分布を図 2.2 (a) に示し、 z 軸上の分布を図 2.2 (b) に示す。ポテンシャルは中心部でほぼゼロであるが、プラグ電極の近くでは z 軸方向に増加し、半径方向に減少する鞍点分布となる。従って、この静電ポテンシャルだけでは電子を軸方向に閉じ込めることは出来るが、半径方向に閉じ込めることは出来ない。本実験で使用した電子プラズマの軸方向温度は数 eV であり、真空場の配位から閉じ込められた電子プラズマの長さは、典型的には $L = 220$ mm になると評価される。

電子を半径方向に閉じ込めるための磁場は、真空容器の外側に設置したソレノイドコイルに電流をパルス的に流すことにより発生させる。閉じ込め領域に置いて半径方向、軸方向とも均一度 1% に収まるように設計されている。本研究では閉じ込め領域の中心部で磁場強度 $B_0 = 0.048$ T

で、 z 軸正の方向に固定して実験を行なう。

2.2 電子プラズマの生成 [1, 2]

電子ビームは真空容器の一端 (図 2.1 (a) 左端) に設置した電子源により生成する。図 2.1 (b) に示すように、電子源には 19 個のカソードが間隔 $d_c = 11$ mm の三角格子状に配置されている。カソードから放出する電子数は、印加する電圧を独立に操作することで個々に制御することができる。使用するカソードの組み合わせにより、様々な電子分布を作ることが出来る。

カソードにはテレビジョン等にも使われる小型で、高い電子放出効率を持つものを使用している。電子はカソードからの熱電子放出で取り出すので、カソードを暖めるための高温のヒーターが必要となる。しかし、高温の物体は赤外から可視にいたる広い波長域で熱輻射を生じる。これは後述の画像計測にとって大きなノイズ源となる。そこで、本実験ではヒーターをカソードの裏側に隠した防熱型の構造を採用している。

前述のように、非中性プラズマは優れた閉じ込め性能をもつが、これは閉じ込め領域に外から非中性プラズマを導入することが困難であることも表している。従って、カソードから放出した電子を閉じ込め領域に導入するためには、閉じ込めのためのポテンシャル配位を壊す必要がある。図 2.3 に実験時における軸上のポテンシャルの変化を模式的に示す。図 2.3 (a) は電極のポテンシャルを模式的に示している。電子プラズマ入射前のポテンシャル分布を図 2.3 (b) に示す。この状態では、カソード側のポテンシャル障壁は十分に深く、カソードは正にバイアスされているので、電子プラズマは捕捉領域に入ることが出来ない。この状態から始めて、入射側のポテンシャル障壁を段階的に浅くし、同時にカソードポテンシャルをそれより深く下げることにより、カソードから放出される電子を磁力線に沿って閉じ込め領域へと導入する (図 2.3 (c))。その後、ポテンシャルを元に戻すと、電子の両端はポテンシャルに押し返され、真空中に浮いた状態となる (図 2.3 (d))。この操作は数 μs 程度の時間で行う。この状態では、外部からの電子の流入はなく、外部から印加された静電場と定常磁場の中で電子間の相互作用が孤立して進展することになる (図 2.3 (d))

カソードの電子放出面が直径 1 mm と非常に小さいため、この操作で作られる電子プラズマの断面積は小さく軸方向に長い紐状に分布する。電子プラズマに含まれる電子数は主にカソードに印加する電圧により制御することが可能である。本実験ではカソード電圧 V_k をカソードと電極間に直列に挿入した可変抵抗器で制御する。図 2.4 に捕捉電子数を抵抗値の関数として示す。E, J はカソードのラベルである。捕捉された紐状の電子プラズマに含まれる電子数は 10^7 個となる。電子の密度分布 $n(x, y)$ は後述の画像計測法により詳細に計測することができ、典型的には $1/e$ 半径が約 0.3 mm の Gauss 分布に近い分布となる。電子プラズマの長さは $L \approx 220$ mm であるので、電子密度は 10^{14} m^{-3} 程度となる。

この様に、カソードから単発で入射した電子プラズマは非常に細い紐状の分布をもつ。しかし複数の電子プラズマの紐を混合、緩和させることで半径方向に大きく広がった電子分布を生じさせることも可能である。電子プラズマの入射と保持のサイクルを抽出なしに繰り返して、合計 1 本程度のプラズマ紐を混合し、1 秒ほど緩和させる。すると、中心軸上で最大密度をもち有限

がりを持つ安定な密度分布をもつ電子プラズマが形成される。電子の入射回数および使用するカソード、緩和時間を変えることにより、密度分布を制御することが可能である。この様にして生成された電子プラズマの電子数は 10^8 個程度であり、紐状分布の数百倍となる。一方、分布が大きく広がる分だけ密度は低く紐状分布の密度の $1/10 \sim 1/100$ 程度になる。広がった電子プラズマを生成した後、カソード側のポテンシャル障壁を瞬間的に浅くすることにより、中心部の電子がカソード側に流出して、中心が凹んだリング状の密度分布を生成することも可能である。この様にして生成した連続密度分布を持つ電子プラズマに、改めて電子プラズマ紐を入射することも可能である。

2.3 画像計測システム [2]

本研究において最も重要でありかつ不可欠な情報は、磁場に垂直な断面内の密度分布 (渦度分布) である。ところが、非中性プラズマの特徴の一つである閉じ込めの良さは、計測においても問題となる。非中性プラズマではプローブ等の異物を挿入すると、系の対称性が崩れ粒子は急速に損失してしまい、系に影響を与えることなく詳細な密度分布を計測することは困難である。

本実験では、計測の際にプラズマを破壊することにより密度分布の詳細な計測を行なう。まず、プラズマを閉じ込めて初期状態から所定の時間を経過させた後に、電子源と反対側のポテンシャル障壁を瞬間的に外して、電子プラズマを磁力線に沿って取り出す (図 2.3 (e))。この電子プラズマを加速して蛍光面へと衝突させることにより、磁力線方向に積分された電子密度の断面方向の分布を蛍光強度の分布へと変換し、Charge-Coupled-Device (CCD) カメラによりその蛍光強度分布を観測する。この方法では詳細な密度分布の情報を得られるが、プラズマは完全に破壊される。そのため、密度分布の時間発展を計測するのに、プラズマの保持時間を少しずつ変えながら実験を何度も繰り返す必要があり、高度な再現性が要求される。本研究で用いた実験装置はその要請を満たしている。

画像計測システムは、電子密度分布を光量分布へと変換する蛍光面と、その光量分布を計測、記録する高感度 CCD カメラシステムで構成される。蛍光面はガラスを基盤として、その捕集面側に蛍光剤が塗布されており、その上に厚さ 20 nm のアルミニウム薄膜が蒸着してある。蛍光剤には使用した CCD カメラの量子変換効率が最も高い 611 nm のラインスペクトルを発光するものを使用した。蛍光面に蒸着されたアルミニウム薄膜には二つの役目がある。一つは蛍光面に電子が蓄積されることを防ぐ役目であり、もう一つは前述のカソードからの熱輻射によるノイズを軽減する役目である。

捕捉領域から磁力線に沿って抽出された電子プラズマは、7.5 kV の高電圧で加速されアルミニウム薄膜を通り抜け蛍光面へと衝突する。発光分布は真空窓を通過した後、大気中におかれた高感度 CCD カメラを用いて、 256×256 の画素上で 16 bit の数値データとしてパーソナルコンピュータに記録する¹。カメラ内部の CCD 素子の直前にはカソードや周囲からの熱輻射によるノイズ

¹今回使用した CCD の画素数は 512×512 pixel であるが S/N を向上させるために 2×2 pixel を 1 pixel として扱い (2×2 binning) 実効的に 256×256 pixel となっている

を軽減するために赤外線を除去するフィルターが挿入されている。

蛍光面に衝突した電子は発光に寄与した後、アルミニウム膜に吸収される。アルミニウム、吸収された電荷を電流として計測することにより、蛍光面に捕集された全電子数を評価することが出来る。

CCD カメラにより観測された発光量の二次元分布の例を図 2.5 (a) に示す。前節で示したにより得た拡がった電子プラズマ分布の観測例である。磁場は紙面に垂直で、手前から奥向き。 x 軸は紙面上では水平右向き、 y 軸は垂直下向き、 z 軸は磁場の方向を向いている。以降像データに関しては磁場の向きと、座標系はこの様に選択する。色調は光量を表しており、なるほど光量は多くなる。画像中心近くの光量の多い部分が電子プラズマによる発光である。像端部のリング状に薄く光っている部分は、蛍光面からの光が真空容器壁に反射した光が観測されたものである。

本研究では密度 (渦度) 分布の絶対計測を行なう必要がある。以下に画像計測システムの較果とその性能について報告する。まず、計測系のノイズの確認を行なった。電子による発光くない状態でも、1 画素あたり 3500 ± 15 count 程度の信号が観測される。この原因としては流や読み出しノイズなどの CCD に起因するノイズと、カソードからの熱放射によるノイズがられる。これらのノイズを取り除くため、以降では観測された画像から電子プラズマによるがない状態で撮影された画像を差し引き、これを電子プラズマに起因する光量分布とする。

この結果をふまえて、発光強度と電子数の関係性を評価した。図 2.5 (b) に CCD カメラにより測された全光量を、蛍光面に流れる電流から評価した電子数の関数として示す。光量と電子間にはよい線形性が確認される [2]。この線形性が定量的な画像計測の基礎となる。直線は最乗フィッティングにより得られた回帰直線であり、その傾きは 0.0666 である。従ってこの計測では 1 画素あたり 15 個の電子により 1 カウントの光量が得られる ($\alpha = 15/\text{pixel}^2$)。

次に複数のカソードから電子プラズマ紐を入射して、その間の距離を計測することにより (カメラ上の距離と実際の距離の間の較正を行なう。電子源であるカソードは $B_0(z = z_c) = 0.0091$ の場所に置かれており、カソードは 11.5 mm の間隔で並べられている。電子は磁力線に沿って動くので、閉じ込め領域の中心における電子プラズマの間隔 d_m は、

$$\begin{aligned} d_m &= \left(\frac{B_0(z = z_c)}{B_0(z = 0)} \right)^{1/2} \times d_c = \left(\frac{0.0091}{0.048} \right)^{1/2} \times 11.5 \\ &= 5.0 \text{ mm} \end{aligned}$$

となる。CCD カメラにより観測された画像上では電子ビームの間隔は平均して 34 pixel となる。従って、CCD カメラの画素間の距離を閉じ込め領域での距離に直すと、

$$\beta = \frac{5.0 \text{ (mm)}}{34 \text{ (pixel)}} = 0.15 \text{ mm/pixel} \quad ($$

となる。この β を用いることにより、CCD カメラの画像上の距離を閉じ込め領域での距離にすることが出来る。従って、この計測系の空間分解能はおおまかには 0.15 mm と言える。この後述のように閉じ込め領域における電子の Larmor 半径 $r_L \approx 0.07$ mm の 2 倍の値である。

以上の関係から観測された発光量の分布を $I(X, Y)$ とすると

$$N_l(x, y) = \int_{L/2}^{L/2} dl n(x, y, z) = \frac{\alpha}{\beta^2} I(\beta X, \beta Y) \quad (2.2)$$

となる。ここで、 $n(x, y, z)$ は密度分布であり、 $N_l(x, y)$ は磁力線方向に積分された密度の二次元分布である。閉じ込め領域では磁場は一様であり、また真空場のポテンシャルもほぼ平らな分布をもつので、電子プラズマの密度分布は軸方向に一様であると仮定できる。従って、プラズマの磁力線方向の長さ L を用いて、

$$n(x, y) = \frac{N_l(x, y)}{L} = \frac{\alpha}{\beta^2 L} I(\beta X, \beta Y) \quad (2.3)$$

となる。以上の操作により、観測された光量分布を電子密度分布の絶対値に変換することが可能である。

非中性プラズマの非破壊的な計測方法としては、系の対称性を壊さないように導体壁に埋め込んだ電極 (分割電極) に静電誘導される電荷を計測する方法がある。しかし、この方法で得られる情報はプラズマの詳細な密度分布を知るには不十分であり、本実験装置にも設置されているがこちらは補助的な役割に留まる。本実験で使用した静電誘導計測システムの概略を図 2.1 (c) に示す。その詳細と特性については第 3 章で報告する。

2.4 二次元 Euler 流体との等価性の評価

ここで、本実験装置に閉じ込められた電子プラズマがどこまで二次元の Euler 流体と見なせるかを評価しておこう。まず、系の最小のスケールであるサイクロトロン運動について評価する。閉じ込め領域中心でのサイクロトロン周波数 f_{ce} は、 $B_0 = 0.048$ T より、

$$f_{ce} = \frac{1}{2\pi} \frac{eB_0}{m_e} = 1.3 \times 10^9 \text{ Hz} \quad (2.4)$$

となる。電子プラズマの磁場に平行方向の温度は実験から数 eV であることが分かっている。垂直方向の温度もこれにほぼ等しいとして 1 eV とすると、Larmor 半径 r_L は

$$r_L = \frac{v_{\perp}}{2\pi f_{ce}} = 7 \times 10^{-2} \text{ mm} \quad (2.5)$$

となる。

プラズマの軸方向の長さは軸方向の温度と、閉じ込めポテンシャルの分布から $L \approx 220$ mm と評価される。プラズマの断面の半径 r_a は広がった密度分布を持つ場合で $r_a \approx 10$ mm、紐上の分布でも $r_a \approx 1$ mm である。従って、

$$L \gg r_a \gg r_L$$

であり、前章で示した条件式 (1.13) を満たしている。

次に $E \times B$ ドリフトのタイムスケールを評価する。ここでは、簡単のために次のようなモデルを考える。電子プラズマは半径 r_a 、長さ L の円柱状に分布しており、端での効果を無視する。全

電子数は N で、これが円柱内部に一様に分布しているとする、円柱内部の電場の動径方向 E_r は

$$E_r = \frac{r}{2\epsilon_0} \frac{eN}{\pi r_a^2 L} \quad (1)$$

従って、 $E \times B$ ドリフトによるこの円柱の回転周波数 f_d は、

$$f_d = \frac{1}{2\pi} \frac{E_r}{rB_0} \quad (2)$$

となる。従って、拡がった分布 ($r_a = 10$ mm, $N = 10^8$) では $f_d = 4.3 \times 10^4$ Hz であり、細い分布 ($r_a = 1$ mm, $N = 10^7$) では $f_d = 4.3 \times 10^5$ Hz となる。電子が軸方向に一往復するのに要する時間は簡単には、 $T_b = 2L/v_{\parallel}$ と表すことが出来る。ここで、 v_{\parallel} は電子の速度の磁場方向成分である。従って、温度を 1 eV と考えると、 $f_b = 1/T_b = 1$ MHz となる。

電子間の Coulomb 衝突は、いろいろな方法で評価することが出来るが、ここではプラズマ物理学で良く使われる Braginskii の表式 [5] を用いる。衝突時間を τ_e^B とすると、

$$\tau_e^B = \frac{3(2\pi)^{3/2} \epsilon_0^2 m_e^{1/2} T_e^{3/2}}{e^4 n_e \ln \Lambda_e} = 1.09 \times 10^{-4} \frac{T_e^{3/2}}{\ln \Lambda_e} \left(\frac{10^{20}}{n_e} \right) \quad (3)$$

である。ここで、 $\ln \Lambda_e$ は Coulomb 対数であり、温度の単位は keV、密度の単位は m^{-3} である。本実験では、代表的には電子温度数 eV、電子密度 10^{13} m^{-3} 程度であるので、 $\ln \Lambda_e = 10$ とし $f_{co} = 1/\tau_e^B = 100$ Hz 程度となる。従って、

$$f_{co} \ll f_d \ll f_b \ll f_{ce}$$

であり、条件式 (1.14) を満たしている。

以上の結果から、本実験で作られる電子プラズマの巨視的な運動が、二次元 Euler 流体として良い精度で近似出来ることがわかる。

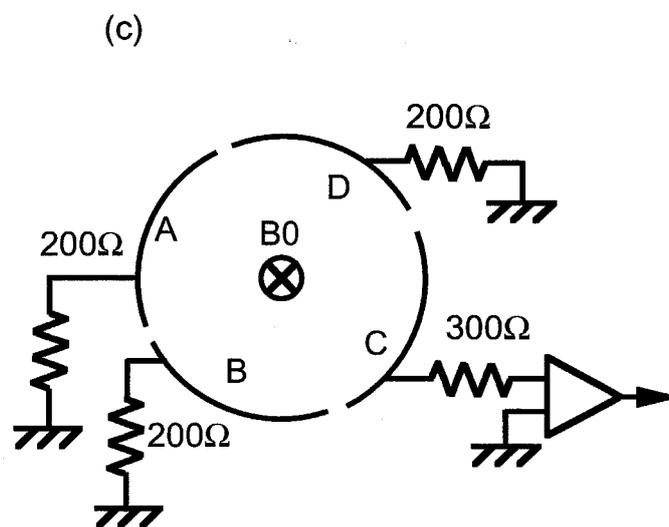
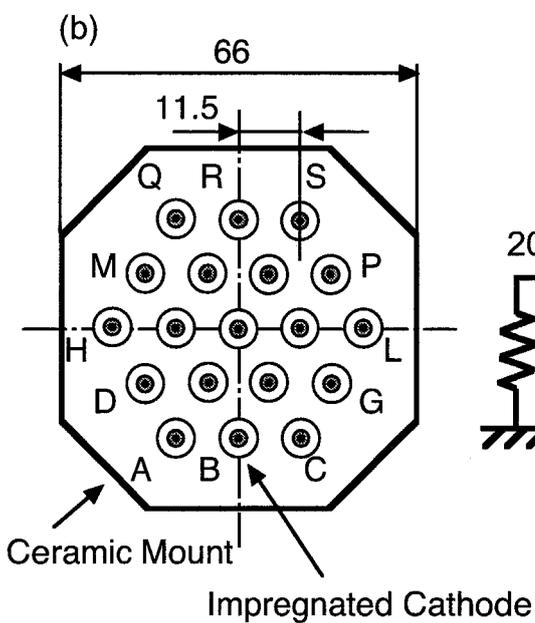
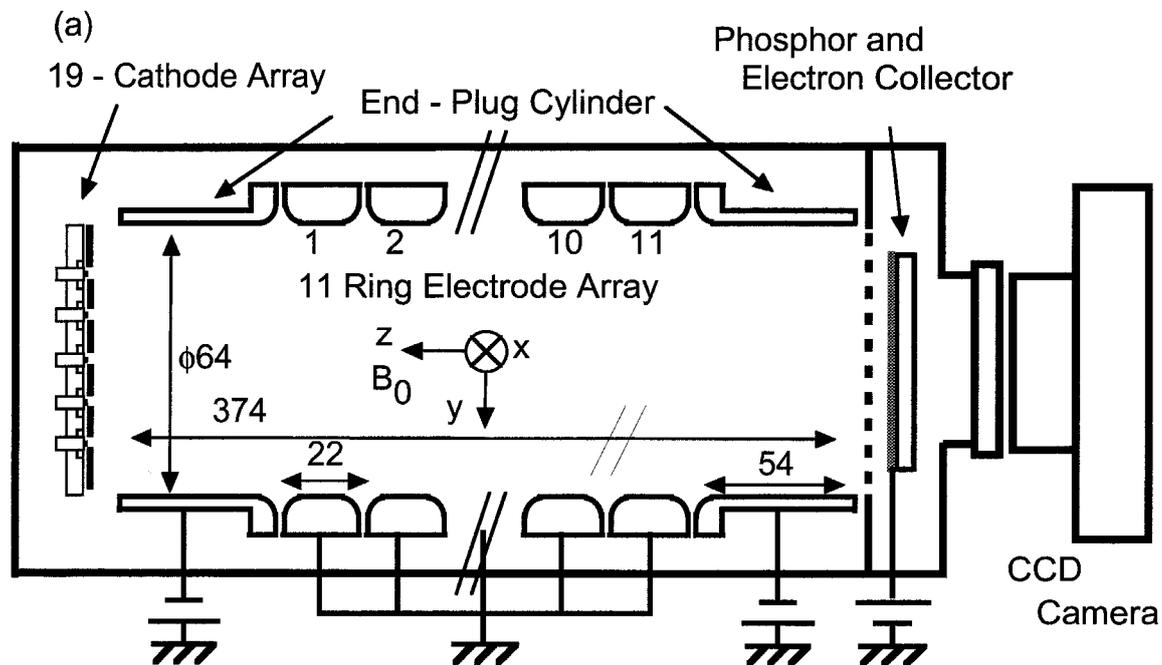


図 2.1: (a) プラズマ閉じ込め装置の模式図. (b) 電子源の模式図. 19 個のカソードが三角格子状に設置されている. (c) 分割電極 (4, 6, 8 番電極) の模式図.

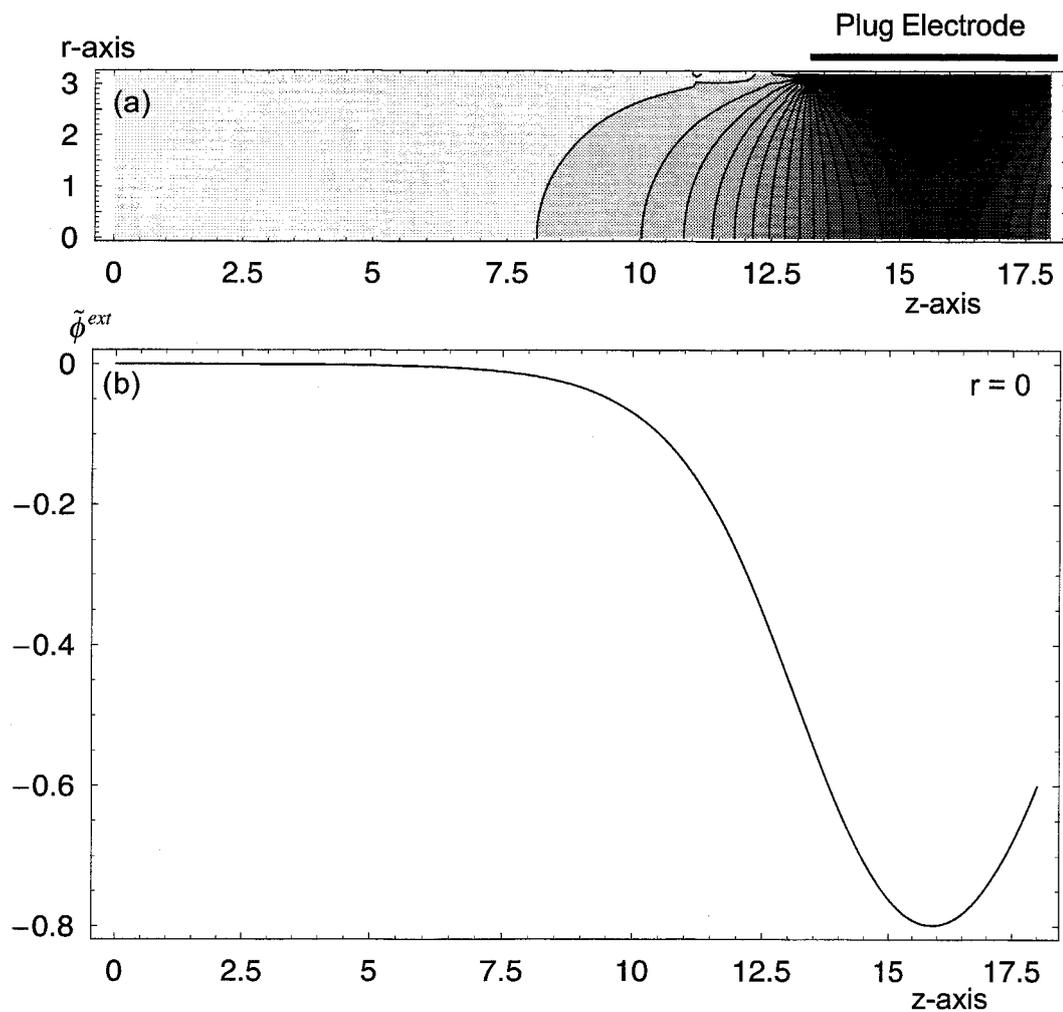


図 2.2: リング電極を全て接地して, プラグ電極にのみ -1 V のバイアス電圧を印加した場合, 空のポテンシャル分布 $\tilde{\phi}^{ext}$. (a) $r-z$ 平面上の $\tilde{\phi}^{ext}$ の分布. 黒化度がポテンシャルの大きさ. し, 黒くなるほど低いポテンシャルとなる. (b) z 軸上の $\tilde{\phi}^{ext}$ の分布

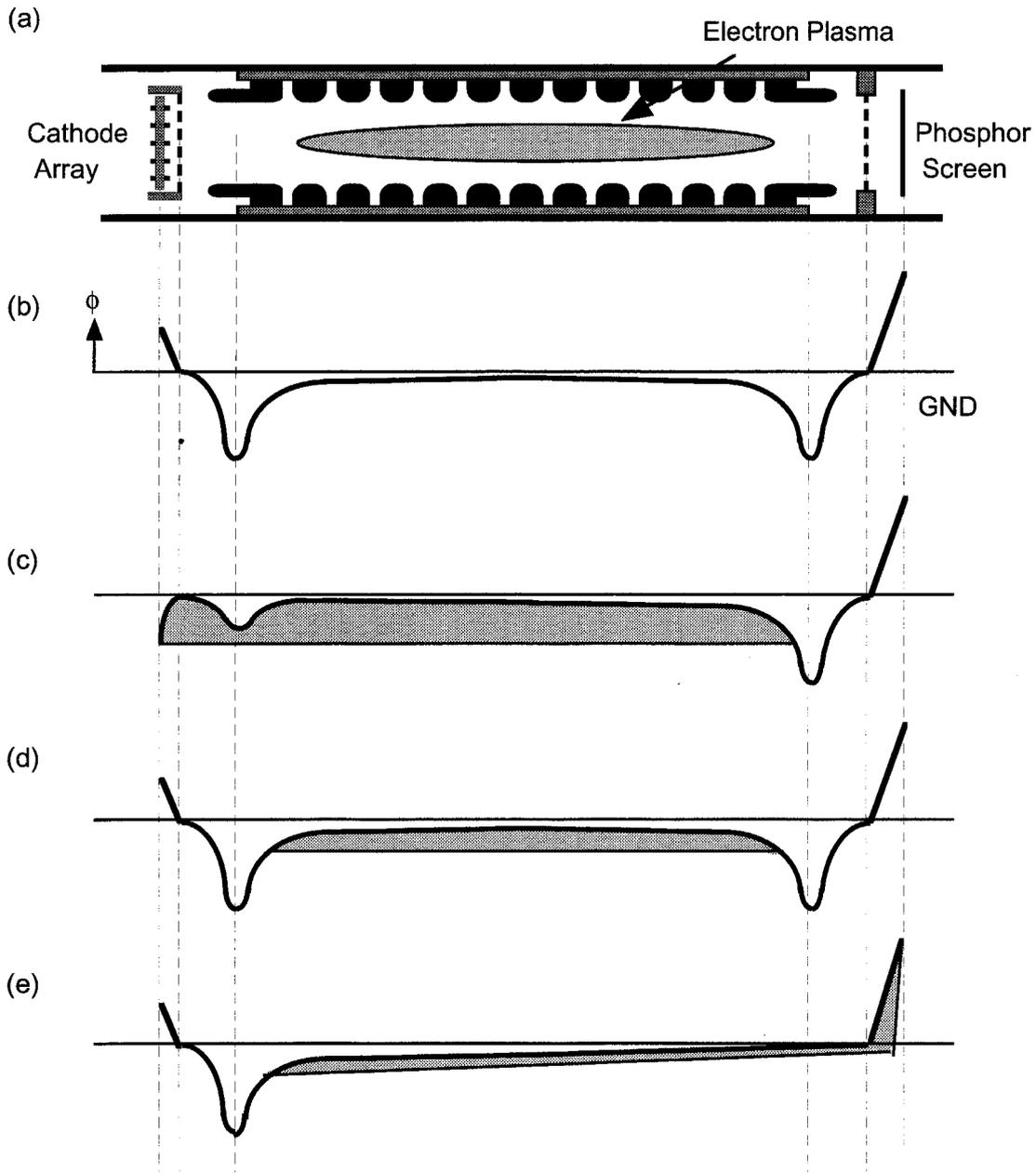


図 2.3: (a) 実験装置の模式図. プラズマ入射前 (b), 入射時 (c), 保持時 (d), 排出 (計測) 時 (e) の外部ポテンシャルを模式的に示す.

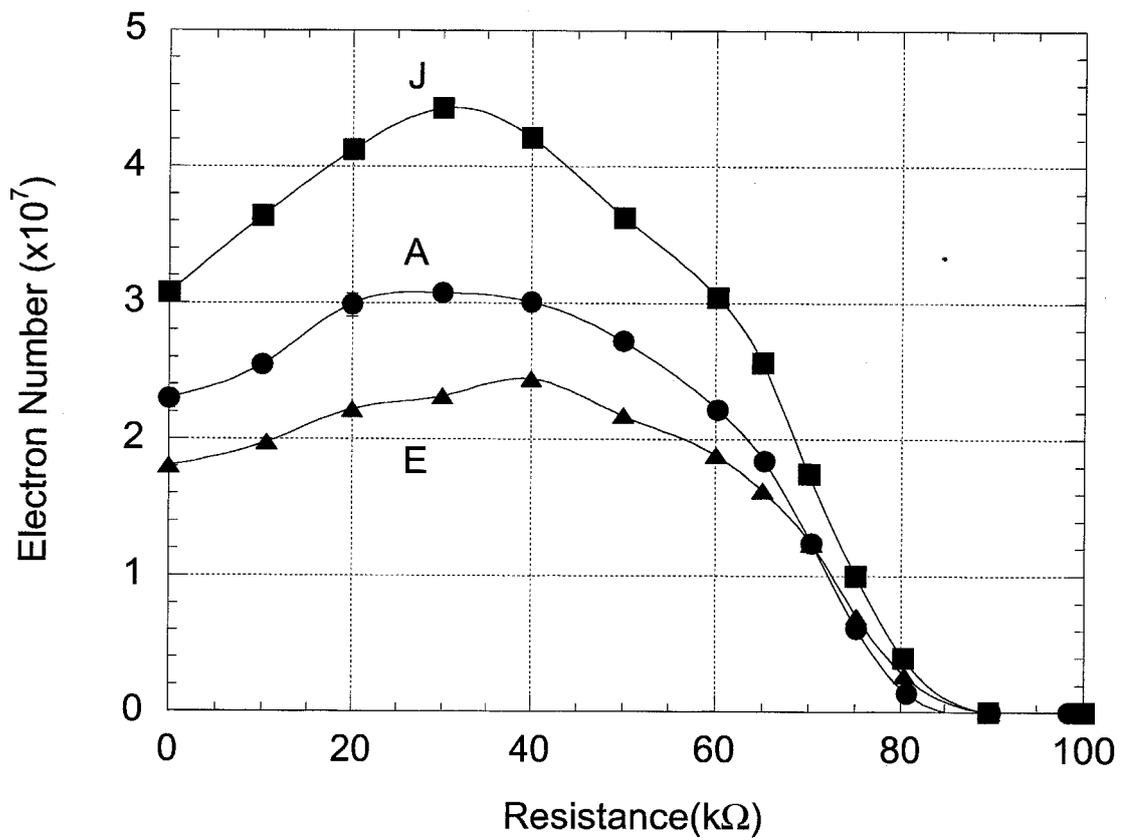


図 2.4: 閉じ込め領域に捕捉される電子数のカソードポテンシャルに対する依存性. ラベルは生成に使用したカソードを表す. $V_{plug} = -30$ V, $V_k = -17$ V である.

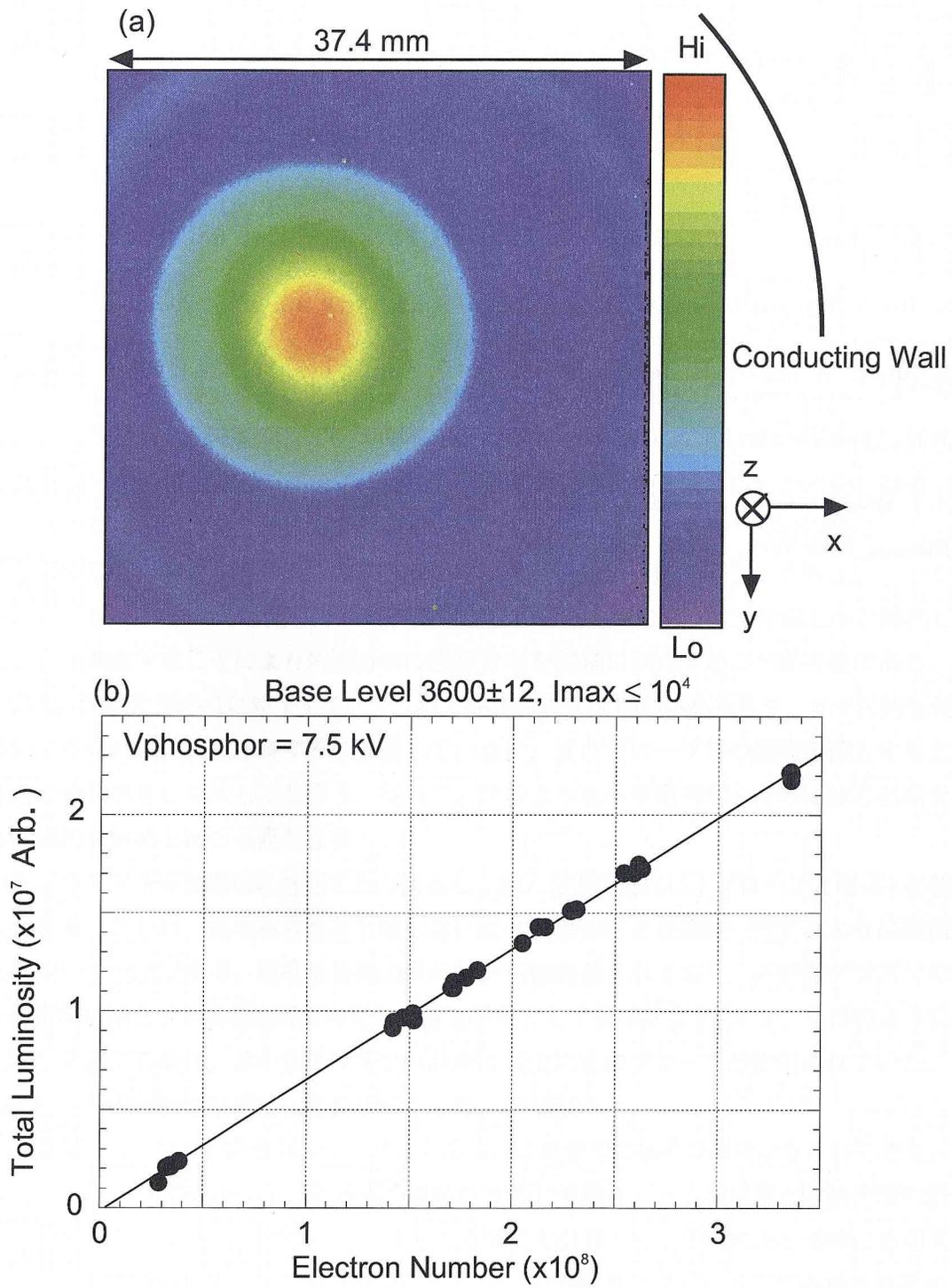


図 2.5: (a) CCD カメラにより観測された発光強度分布. (b) CCD カメラで観測された発光量と発光に寄与した電子数の関係.

関連図書

- [1] Y. Kiwamoto, K. Ito, A. Sanpei and A. Mohri, Phys. Rev. Lett. **85**, 3173 (2000).
- [2] K. Ito, Y. Kiwamoto and A. Sanpei, Jpn. J. Appl. Phys. **40**, 2258 (2001).
- [3] A. Mohri, H. Higaki, H. Tanaka, *et al.*, Jpn. J. Appl. Phys. **37**, 664 (1998).
- [4] J. H. Malmberg and J. S. deGrassie, Phys. Rev. Lett. **35**, 577 (1975).
- [5] S. I. Braginskii, in *Reviews of Plasma Physics*, edited by M. A. Leontovich (Consultants Bureau, New York, 1965), Vol. I, p. 205.

第3章 渦度分布からの速度場の実験的導出 と静電誘導計測との比較 [1]

3.1 背景と目的

この章の目的は次の二つである。一つは、観測された画像データ(密度分布)からポテンシャル分布を導出する方法を確立することである。観測された画像データに Fourier - Bessel 展開を適用すると、計算を数分という短時間で完了することが可能となる。ここで、ポテンシャル分布は中性流体の流線分布に相当する。従って、流体力学を電磁気学に焼き直すことが可能となる。この結果は流体力学における様々統計量を評価するのにも有効である。もう一つの目的は、この数値解析法を適用して、静電誘導計測に含まれる情報量を定量的に評価することである。

Malmberg Trap においては閉じ込めていた荷電粒子を磁力線に沿って蛍光面上へと排出し、その光量分布を測定することにより断面方向の密度分布を詳細に決定することが可能である。しかし、この方法では計測の度に粒子全部を失うので希少な粒子を閉じ込めた系や、カオス的な発展をする多粒子系の時間発展を追跡するには適していない。またプローブ等の異物を挿入すると、系の対称性が崩れ急速に損失してしまう。従って、このような系を研究するためにはこれらとは異なる非破壊的な計測方法が必要となる。

非中性プラズマを非破壊的に計測する方法としては、分割電極(以下プローブと呼ぶ)を使用する手法がある。これは、系の対称性を破壊しないように導体壁と表面が一致するように設置された電極を用いる方法である。電極は周囲の導体壁からは絶縁されており、非中性プラズマの運動により静電的に誘起される鏡像電荷の変化を電気信号として検出する [2, 3, 4]。今日のように画像計測技術が発達する前は、非中性プラズマの計測には主にこのプローブが使用されていた。現在でも希少粒子系の計測では重要な役割を果たしている [5]。

このようなプローブを用いた計測法は歴史も長く、これまでに様々な研究がなされてきた。例えば、Kapetanacos と Trivelpiece による円筒導体中を流れる電子ビームの位置と電荷密度の計測がある [2]。彼らは電子ビームがプローブに誘起する電荷を計算して、その結果を実験に適用することにより電子ビームの位置と電荷密度を評価した。この実験では電荷に対して敏感な高抵抗で接地されたプローブが使用されたが、このようなプローブはポテンシャル分布を局所的に変形するため、閉じ込められた非中性プラズマに重大な悪影響を与える。Kadtke らは Malmberg Trap 中で紐状に分布した電子プラズマの軌道を複数のプローブで観測される信号から再構成する手法を研究した [3]。彼らは高インピーダンスを介して接地された4枚のプローブを用いて計測を行なったが、2本以上の電子紐の軌道を再構成することは出来なかった。このほかにもプローブ信号に関する報告は多数あるが、信号の振幅を実際の電荷密度分布と関連づけた定量的な報告はなされて

いない。プローブを用いた非中性プラズマの波動の研究としては、Gould らによるプローブドミッタンス関数の研究がある [4]。これに関しても波動を検出したという報告は数多くなさっているが、検出された信号の振幅と密度の摂動の大きさとの間の定量的な関係については研究されていない。

以下、第 3.2 節で場の導出方法を与える。第 3.3 節ではこの結果を紐状の密度分布を持つ子プラズマの運動に適用し、画像計測とプローブに誘起される信号電流を比較する。第 3.4 節と第 3.5 節ではプラズマが更に複雑な分布を持つ場合について検討し、第 3.6 節で本章のまとめを述べる。なお、Malmberg Trap 中の電子プラズマの運動 (二次元渦運動) の詳しい検討は第 5 章で行なうこととし、ここでは簡単に触れるだけに留める。

3.2 二次元の場の導出法

3.2.1 基礎方程式と直接的解放

本節では CCD カメラにより観測された密度分布からポテンシャル、電場の二次元分布を導出する手法を示す。まずは、そのための基礎方程式を示す。前章で記したように、電子プラズマの長さ L はその断面方向の分布の代表長 r_a に比べ十分に長く、電子プラズマ中心部でのポテンシャル分布を計算する際にはその端部での効果を見捨てる事が出来る。従って、問題を二次元に集約することが可能となる。電子プラズマが作るポテンシャル ϕ は二次元の Poisson 方程式を満たし

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \phi(r, \theta) = \frac{e}{\epsilon_0} n(r, \theta) \quad (3.2.1)$$

となる。ここで、電子プラズマを囲む導体壁の効果は半径 R での境界条件

$$\phi(R, \theta) = 0 \quad (3.2.2)$$

として導入する。

一方、電子プラズマを閉じ込めるための外場のポテンシャル ϕ^{ext} は Laplace 方程式 $\nabla^2 \phi^{ext} = 0$ を満たす。電子プラズマの運動に寄与する全ポテンシャル ϕ^T は ϕ と ϕ^{ext} の和で与えられる。ここで、 ϕ^{ext} は粒子を閉じ込めるために不可避免的に軸方向と動径方向に分布を持つ。しかし、粒子による電子の運動を軸方向の運動一周にわたって平均化することにより、その効果を二次元的に評価することが可能である¹。その結果、軸方向に平均化された外場の効果は、

$$E_r^{ext}(r) \approx E_0 \frac{r}{R} \left\{ 1 + \epsilon_1 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \epsilon_2 \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right\}. \quad (3.2.3)$$

となることを確認している (図 4.5 参照)。ここで、係数 E_0 はプラグ電圧 V_{plug} に比例し、電極間の距離が増加すると減少する。係数 ϵ_1 , ϵ_2 は粒子のもつ全エネルギーとプラグ電圧の比 W_0/V の関数となっている。ここで、 $\epsilon_1 < 1$, $\epsilon_2 < 1$ であり、外場はおおまかには $E_r^{ext}(r) \approx E_0 r/R$

¹詳しくは第 4.3 章参照。

似することが出来る。従って、外場による $E \times B$ ドリフトの速度場 $v_{\theta}^{ext}(r)$ と角速度 $\Omega^{ext}(r)$ は、

$$v_{\theta}^{ext}(r) = \frac{E_r^{ext}(r)}{B_0} \approx \frac{E_0}{B_0} \frac{r}{R}, \quad \Omega^{ext}(r) = \frac{v_{\theta}^{ext}}{r} \approx \frac{E_0}{B_0} \frac{1}{R} \quad (3.4)$$

となる。よって、断面方向の運動に対する外場の寄与は、概ね系全体を方位角方向に剛体回転させる効果しかない。

任意の密度分布 $n(r, \theta)$ からポテンシャル $\phi(r, \theta)$ を導出するには、コンピューターを使って式 (3.1) を数値的に解く必要がある。これを直接的に計算する方法として、電子プラズマを点電荷 (三次元では線電荷) の集合とみなして計算する方法がある。まず、この方法について検討する。

画像計測により得られる密度分布は二次元のデカルト座標系 (x, y) で表されるが、簡単のために二次元の極座標系 (あるいは円柱座標系) (r, θ) に変換する。 (r_0, θ_0) にある単位密度の点電荷は δ 関数を用いて表すと、

$$n(r, \theta; r_0, \theta_0) = \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \quad (3.5)$$

であり、 $r = R$ の胴体壁に囲まれている場合、ポテンシャル分布は次のようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(r, \theta; r_0, \theta_0) = & \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \ln \left[\left(\frac{r}{r_0} \cos(\theta - \theta_0) - 1 \right)^2 + \left(\frac{r}{r_0} \sin(\theta - \theta_0) \right)^2 \right] \right. \\ & \left. - \ln \left[\left(\frac{r}{R} \cos(\theta - \theta_0) - \frac{R}{r_0} \right)^2 + \left(\frac{r}{R} \sin(\theta - \theta_0) \right)^2 \right] \right\} \quad (3.6) \end{aligned}$$

右辺の最初の \ln の項は点電荷が直接に寄与する項であり、二つ目の \ln の項は導体壁に誘起された鏡像電荷の寄与を表す。従って、任意の密度分布 $n(r, \theta)$ がつくるポテンシャル分布は次の式で得られる。

$$\phi(r, \theta) = \int_0^R dr_0 r_0 \int_0^{2\pi} d\theta_0 \tilde{\phi}(r, \theta; r_0, \theta_0) n(r_0, \theta_0) \quad (3.7)$$

得られた画像データから、式 (3.7) を用いてポテンシャルを導出するコードを Fortran 77 を用いて制作した。CCD カメラにより得られる画像データのサイズは 256×256 pixel であり、これは装置中心軸周辺 37.4 mm 四方の空間に相当する。数値計算の際には導体壁までのポテンシャルを計算すると、データ点数は $\pi \times 219^2 \approx 1.5 \times 10^5$ pixels となり膨大な点数となる。パーソナルコンピュータ (Apple Power Machintosh G4 350 MHz) を使ってこのデータ点数に対して式 (3.7) の計算を行なうと、一つの画像データからポテンシャル分布を計算するのに約 10 時間が必要であった。これでは一度の実験で得られる画像データ (およそ 100 枚) を処理するのに膨大な時間がかかり、現実的ではない。

3.2.2 級数展開を用いた高速解法

そこで、級数展開を導入することにより計算時間を大幅に短縮することを試みる。最初に、観測された密度分布 $n(r, \theta)$ を方位角方向に Fourier 級数展開する。

$$n(r, \theta) = \frac{1}{2} n_0^c(r) + \sum_{m=1}^{\infty} \{ n_m^c(r) \cos m\theta + n_m^s(r) \sin m\theta \} \quad (3.8)$$

ただし,

$$\begin{cases} n_m^c(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta n(r, \theta) \cos m\theta & (m = 0, 1, 2, \dots) \\ n_m^s(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta n(r, \theta) \sin m\theta & (m = 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (1)$$

である. 同様に, ポテンシャルも Fourier 級数展開すると,

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{2} \phi_0^c(r) + \sum_{m=1}^{\infty} \{ \phi_m^c(r) \cos \theta + \phi_m^s(r) \sin \theta \} \quad (3)$$

となる.

式 (3.8) と (3.10) を式 (3.1) に代入して整理すると, r に関する次の偏微分方程式群を得る.

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \right) \phi_m^{c,s}(r) = \frac{e}{\varepsilon_0} n_m^{c,s}(r) \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (3)$$

ただし, 導体壁 $r = R$ における境界条件より,

$$\phi_m^{c,s}(R) = 0 \quad (3)$$

である. 式 (3.11) は $\phi_m^{c,s}$ が Bessel 関数に従うことを示しているので, $\phi_m^{c,s}(r)$ と $n_m^{c,s}(r)$ を m 重 Bessel 関数 J_m を使って以下のように展開する.

$$n_m^{c,s}(r) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{m\nu}^{c,s} J_m \left(\frac{\chi_{m\nu}}{R} r \right) \quad (3)$$

$$\phi_m^{c,s}(r) = \sum_{\nu=1}^{\infty} B_{m\nu}^{c,s} J_m \left(\frac{\chi_{m\nu}}{R} r \right) \quad (3)$$

ここで, 境界条件 (3.12) を満たすために,

$$J_m(\chi_{m\nu}) = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots) \quad (3)$$

である. つまり, $\chi_{m\nu}$ は $J_m(x)$ の ν 番目のゼロ点である. ここで, Bessel 関数の直交性,

$$\int_0^1 dx x J_m(\chi_{m\nu}) J_m(\chi_{m\mu}) = \frac{1}{2} \{ J_{m+1}(\chi_{m\nu}) \}^2 \delta_{\mu\nu} \quad (3)$$

を用いると, 式 (3.8) より,

$$\begin{aligned} \int_0^R dr r J_m \left(\frac{\chi_{m\nu}}{R} r \right) n_m^{c,s}(r) &= \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{m\mu}^{c,s} \int_0^R dr r J_m \left(\frac{\chi_{m\mu}}{R} r \right) \cdot J_m \left(\frac{\chi_{m\nu}}{R} r \right) \\ &= \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{m\mu}^{c,s} R^2 \frac{1}{2} \{ J_{m+1}(\chi_{m\mu}) \}^2 \delta_{\mu\nu} \\ &= \frac{R^2}{2} A_{m,\nu}^{c,s} \{ J_{m+1}(\chi_{m\nu}) \}^2 \end{aligned} \quad (3)$$

即ち,

$$A_{m\nu}^{c,s} = \frac{2}{\{ R J_{m+1}(\chi_{m\nu}) \}^2} \int_0^R dr r J_m \left(\frac{\chi_{m\nu}}{R} r \right) n_m^{c,s}(r) \quad (3)$$

を得る。 $A_{m\nu}^{c,s}$ は観測された密度分布から決定出来る係数である。従って、式 (3.8), (3.13), (3.18) から密度分布に関する次の表式を得る。

$$n(r, \theta) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{0\nu}^c J_0 \left(\frac{\chi_{0\nu}}{R} r \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \cos m\theta \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{m\nu}^c J_m \left(\frac{\chi_{m\nu}}{R} r \right) + \sin m\theta \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{m\nu}^s J_m \left(\frac{\chi_{m\nu}}{R} r \right) \right\} \quad (3.19)$$

一方、式 (3.13), (3.14) を式 (3.11) に代入すると次式を得る。

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} B_{m\nu}^{c,s} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \right) J_m \left(\frac{\chi_{m\nu}}{R} r \right) = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{m\mu}^{c,s} J_m \left(\frac{\chi_{m\mu}}{R} r \right) \quad (3.20)$$

ここで、 $\rho = \chi_{m\nu} r / R$ と変数変換すると、

$$\begin{aligned} L.H.S &= \sum_{\nu=1}^{\infty} B_{m\nu}^{c,s} \left(\frac{\chi_{m\nu}}{R} \right)^2 \left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} \right\} J_m(\rho) \\ &= - \sum_{\nu=1}^{\infty} B_{m\nu}^{c,s} \left(\frac{\chi_{m\nu}}{R} \right)^2 J_m(\rho) \end{aligned} \quad (3.21)$$

となり、

$$B_{m\nu}^{c,s} = - \left(\frac{R}{\chi_{m\nu}} \right)^2 A_{m\nu}^{c,s} \quad (3.22)$$

を得る。 $A_{m\nu}^{c,s}$ は観測された密度分布よりすでに決定されているので、 $B_{m\nu}^{c,s}$ も決定される。従って、式 (3.10), (3.14), (3.22) からポテンシャル分布に対して以下の表式を得る。

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta) &= \frac{e}{2\epsilon_0} \sum_{\nu=1}^{\infty} B_{0\nu}^c J_0 \left(\frac{\chi_{0\nu}}{R} r \right) \\ &+ \frac{e}{\epsilon_0} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \cos m\theta \sum_{\nu=1}^{\infty} B_{m\nu}^c J_m \left(\frac{\chi_{m\nu}}{R} r \right) + \sin m\theta \sum_{\nu=1}^{\infty} B_{m\nu}^s J_m \left(\frac{\chi_{m\nu}}{R} r \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.23)$$

よって、以上の操作により二次元の Poisson 方程式 (3.1) と境界条件 (3.2) を満たすポテンシャル分布を決定出来る。

さて、方位角方向のモード数の最大値 m_{max} は標本化定理より画像データの点数によって決定される。同様に半径方向のモード数の最大値 ν_{max} も画像データの点数によって決定される。本研究では $m_{max} = 100$, $\nu_{max} = 100$ とする。計算には導体壁までの密度分布のデータが必要であるが、画像計測の視野はそこまで届かない。視野の端の方では電子密度は検出限界程度まで低くなっているため、視野外ではゼロとして計算を行うこととする。

以上の計算手順によりポテンシャル分布を計算するコードを Fortran 77 により制作し、先のコードと同じパーソナルコンピュータを用いて計算を行った。その結果、一枚の画像データを3分弱で処理することが可能であり、計算時間が大幅に短縮出来ることを確認した。この程度の計算時間であれば、十分に実用的である。

級数展開を用いた計算結果の典型的な例を図 3.1 に示す。磁場は紙面に対し垂直で手前から奥に向いている。図中に白線で描かれた円は導体壁を表す。図 3.1 (a) は CCD カメラにより観測された

密度分布 $n_o(x, y)$ である。これは拡がった電子プラズマに紐状の電子プラズマを入射したときに
 じる密度分布の発展の途中のある瞬間を撮影したものである²。図 3.1 (a) を級数展開し、式 (3.
 により再構成して得た密度分布 n_{FB} を図 3.1 (b) に示す。 n_{FB} は n_o に見られる細かい構造まで
 現しており、両者は良く一致する。もう少し詳しく検討するために、 n_o と n_{FB} を図 3.1 (a) に
 した直線上で比較した結果を図 3.2 (a) に示す。直線は中心軸と電子密度の一番高い点を通るよ
 に引かれている。 n_o と n_{FB} が良く一致することが改めて確認出来る。図 3.2 (b) に n_o と n_{FB}
 間の誤差率、

$$\Delta = \frac{n_{FB} - n_o}{n_o} \quad (3.2)$$

を示す。所々でスパイク状に大きな誤差を持ち、 r が大きくなると誤差率も大きくなる傾向が
 有る。これは r が大きなところ、即ち画面の端の方では電子密度が低く、式 (3.24) の分母に入る
 が小さくなるためである。また密度の空間変化が大きなところ (密度のピークの周辺) では、再
 成時のわずかな位置のずれが大きく影響するために誤差が大きくなる。このように n_o と n_{FB}
 間には部分的に大きな誤差がみられるが、全体としては良く一致する。ここで、巨視的に見た
 と n_{FB} の間の誤差を次のように定義する。

$$\Delta_e = \frac{\sqrt{\sum (n_{FB} - n_o)^2}}{\sum n_o} \quad (3.2)$$

Δ_e はほぼすべてのケースで 1 % 以下となる。以上から、級数展開を用いた計算方法が十分な精
 を持っていることが確認出来る。

密度分布を級数展開した係数から式 (3.23) により計算したポテンシャル分布を図 3.1 (c) に
 示す。電子プラズマであるので、密度の高い中心部でポテンシャルはもっとも低く、接地されて
 る導体壁に近づくにつれて増加する。等ポテンシャル線は最もポテンシャルの低い位置 (z 軸か
 は少し外れている) を中心にほぼ同心円を描いており、密度分布に見られるような細かな構造は
 られない。これはプラズマ全体が方位角方向に高速に回転していることを表している。図 3.1 (c)
 に示した直線上のポテンシャル分布を示す。直線は中心軸とポテンシャルの一番低い点を
 るように引かれている。ポテンシャルは放物線状の分布から明らかにずれており、プラズマの
 転が剛体回転からずれていることが分かる。

ポテンシャル分布が決まれば、そこから電場の分布を決定することが出来る。 $E = -\nabla\phi$ よ
 電場の動径方向成分 E_r と方位角方向成分 E_θ として、

$$\begin{aligned} E_r(r, \theta) &= -\frac{\partial\phi(r, \theta)}{\partial r} \\ &= -\frac{e}{2\varepsilon_0 R} \sum_{\nu=1}^{\infty} B_{0\nu}^c \chi_{0\nu} J'_0 \left(\frac{\chi_{0\nu}}{R} r \right) \\ &\quad - \frac{e}{\varepsilon_0 R} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \cos m\theta \sum_{\nu=1}^{\infty} B_{m\nu}^c \chi_{m\nu} J'_m \left(\frac{\chi_{m\nu}}{R} r \right) \right. \\ &\quad \left. + \sin m\theta \sum_{\nu=1}^{\infty} B_{m\nu}^s \chi_{m\nu} J'_m \left(\frac{\chi_{m\nu}}{R} r \right) \right\} \quad (3.2) \end{aligned}$$

²この現象の詳細については第 5 章に記す。

と

$$\begin{aligned}
E_\theta(r, \theta) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi(r, \theta)}{\partial \theta} \\
&= -\frac{e}{\varepsilon_0} \frac{m}{r} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\sin m\theta \sum_{\nu=1}^{\infty} B_{m\nu}^c J_m \left(\frac{\chi_{m\nu}}{R} r \right) \right. \\
&\quad \left. + \cos m\theta \sum_{\nu=1}^{\infty} B_{m\nu}^s J_m \left(\frac{\chi_{m\nu}}{R} r \right) \right\} \quad (3.27)
\end{aligned}$$

を得る。ただし、 $J'_m(ax) = dJ_m(x)/dx|_{x=ax}$ である。

このように級数展開を用いることにより、観測された密度分布からポテンシャル、電場の分布を十分に高い精度で高速に導出することが出来る。これは、ポテンシャルと流線の対応関係から、二次元 Euler 流体における流線分布を決定出来ることを表している。従って、画像計測と上記の解析により、渦度分布と流れ関数という二次元 Euler 流体における基本量を実験的に決定することが可能であり、渦運動を完全に決定することが可能となる。

3.3 紐状の電子プラズマの運動により誘起されるプローブ電流

3.3.1 電子分布からのプローブ電流導出法

場の計算を用いると、実際に観測される電子プラズマの運動からプローブに誘起される電流を評価することが出来る。まず、本実験で使用した静電誘導計測システムを図 2.1 (c) に示す。真空容器内に設置された 11 個のリング電極のうち、カソード側から数えて 4, 6, 8 番目の電極が方位角方向に 4 分割されている。このうち、同じ位相に設置されている 3 枚の電極、4-C, 6-C, 8-C を短絡して 300 Ω の低抵抗を介して接地し、これを一つのプローブとして用いる。検出される信号は微弱であるため、高増幅率の電流増幅器を通したのちデジタルオシロスコープで記録する。

図 3.3 に分割電極の配置図を示す。 θ_P をプローブ中心の方位角方向の座標、 Δ_P をプローブの半値幅、 l_P をプローブの軸方向の長さとするれば、それぞれ $\theta_P = \pi/8$, $\Delta_P = \pi/4$, l_P は電極 1 個では 22 mm であるが 3 個の分割電極を短絡して用いるので $l_P = 66$ mm となる。

一般に、導体壁が抵抗をもつと非中性プラズマに Diocotron 不安定性が誘起され、不安定となる [6, 7, 8]。従って、静電誘導計測自身が信号を誘起する可能性がある。実際に本実験でも分割電極の接地抵抗のバランスを崩したり、増幅装置を不用意に接続した場合には電子プラズマに不安定振動が観測される。しかし、接地抵抗の調整を行なった結果、6 番電極の A, B, D 電極を 200 Ω で接地し、4, 8 番の A, B, D 電極を直接接地することにより不安定振動の成長を抑制出来ることを実験的に確認している。

次に電子プラズマの運動によりこの様な構造をもつプローブに誘起される電流を評価する。電子プラズマにより導体壁に誘起される電荷密度 $\sigma(\theta)$ は Gauss の法則から電場の動径方向成分 E_r を使って、次のように表すことが出来る。

$$\sigma(\theta) = -\varepsilon_0 E_r(R, \theta) \quad (3.28)$$

従って、プローブに誘起される全電荷量 q_s は σ をプローブ上で積分して、

$$q_s = -\varepsilon_0 R l_P \int_{\theta_P - \Delta_P}^{\theta_P + \Delta_P} d\theta E_r(R, \theta) \quad (3.1)$$

となる。電子プラズマが磁場に垂直断面内で運動や変形を生じその密度分布が変化すると、プローブに誘起される電荷量が増える。従って、電荷量の変化、即ちプローブの信号電流は次のように評価することが出来る。

$$i_s = \frac{dq_s}{dt} = -\varepsilon_0 R l_P \frac{d}{dt} \int_{\theta_P - \Delta_P}^{\theta_P + \Delta_P} d\theta E_r(R, \theta) \quad (3.2)$$

3.3.2 紐状プラズマにより誘起されるプローブ信号

上式を実際の実験結果に適用して、観測された密度分布から計算されるプローブ信号と実際検出される信号を比較する。まず、最も簡単な場合として、真空中に紐状の電子プラズマを一本入した場合について検討する。この場合、電子プラズマは導体壁に誘起される鏡像電荷と閉じめ電位が形成する電場の動径方向成分により、初期位置によって決まる半径 r_0 の円を描いて運動する³[9]。図 3.4 (a) に CCD カメラにより観測された電子プラズマの軌道を示す。電子プラズマ $10 \mu\text{s}$ にカソード H から入射され、電子数は $N_H = 4.5 \times 10^7$ 、半値半径は $r_{1/2} = 0.35 \text{ mm}$ である。図は CCD カメラにより $10 \mu\text{s}$ 毎に観測された密度分布を重ね合わせ一枚の画像としたものである。電子プラズマが z 軸 (円筒電極の中心軸) のまわりで円運動をすることが確認できる。円運動の半径は $r_0 = 8.3 \text{ mm}$ 、周波数は $\omega/2\pi \approx 10 \text{ kHz}$ である。この時に、プローブで観測される信号を図 3.4 (b) に示す。実線が実験的に観測された信号を表す。電子プラズマが入射された 10 以降の時間帯に振幅 10 nA で振動する信号が検出される。その周波数は $\omega/2\pi = 9.9 \text{ kHz}$ であり画像計測より決定された周波数と一致する。

この運動によりプローブに誘起される信号を評価する。電子プラズマの半径は導体壁の半径よりも十分に小さく ($0.35 \text{ mm} \ll 32 \text{ mm}$)、電子プラズマ内部の構造変化は無いので、ここでは簡のために電子プラズマを δ 関数で表す。座標 (r_0, θ_0) にある単位線密度の線電荷の作るポテンシャル分布は式 (3.6) で表されるので、線電荷密度 $-\lambda$ の作るポテンシャルは

$$\phi(r, \vartheta) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \ln \left[\left(\frac{r}{r_0} \cos \vartheta - 1 \right)^2 + \left(\frac{r}{r_0} \sin \vartheta \right)^2 \right] - \ln \left[\left(\frac{r}{R} \cos \vartheta - \frac{R}{r_0} \right)^2 + \left(\frac{r}{R} \sin \vartheta \right)^2 \right] \right\} \quad (3.3)$$

ただし、 $\vartheta = \theta - \theta_0$ である。従って、電場の動径方向成分 E_r は次のようになり、

$$\begin{aligned} E_r(r, \vartheta) &= -\frac{\partial \phi(r, \vartheta)}{\partial r} \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{\left(\frac{r}{r_0} \cos \vartheta - 1 \right) \frac{\cos \vartheta}{r_0} + \frac{r \sin^2 \vartheta}{r_0^2}}{\left(\frac{r}{r_0} \cos \vartheta - 1 \right)^2 + \left(\frac{r}{r_0} \sin \vartheta \right)^2} - \frac{\left(\frac{r}{R} \cos \vartheta - \frac{R}{r_0} \right) \frac{\cos \vartheta}{R} + \frac{r \sin^2 \vartheta}{R^2}}{\left(\frac{r}{R} \cos \vartheta - \frac{R}{r_0} \right)^2 + \left(\frac{r}{R} \sin \vartheta \right)^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

³この運動の詳細については第 4 章で記す。

導体壁に誘起される鏡像電荷は次のようになる。

$$\begin{aligned}\sigma(\vartheta) &= -\varepsilon_0 E_r(R, \vartheta) \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi R} \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2} \left\{ 1 - \frac{2\rho}{1+\rho^2} \cos \vartheta \right\}^{-1}\end{aligned}\quad (3.33)$$

ただし、 $\rho = r_0/R$ である。従って、プローブに誘起される総電荷量は、

$$q_s(\vartheta) = Rl_P \int_{\theta_P - \Delta_P}^{\theta_P + \Delta_P} d\theta \sigma(\vartheta)$$

となり、これよりプローブ電流、

$$\begin{aligned}i_s &= \frac{dq_s}{dt} = \frac{d\theta_0}{dt} \frac{dq_s}{d\theta_0} = \omega \frac{dq_s}{d\theta_0} \\ &= -\frac{\omega}{2\pi} \frac{l_P}{L} eN \sqrt{1-\rho^2} \left\{ \frac{1}{1-\rho \cos(\varphi + \Delta_P)} - \frac{1}{1-\rho \cos(\varphi - \Delta_P)} \right\}\end{aligned}\quad (3.34)$$

を得る。ただし、 $\rho = 2(r_0/R)/\{1 + (r_0/R)^2\}$ 、 $\varphi = \theta_P - \theta_0$ であり、 $\omega = d\theta_0/dt$ は電子プラズマの円運動の角周波数である。

図 3.5 に $\omega eNl_P/L$ で規格化した信号、

$$\tilde{i}_s = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{1-\rho^2} \left\{ \frac{1}{1-\rho \cos(\varphi + \pi/4)} - \frac{1}{1-\rho \cos(\varphi - \pi/4)} \right\}\quad (3.35)$$

を $-\varphi = \theta_0 - \theta_P$ の関数として示す。ここで、 $\theta_P = \pi/8$ 、 $\Delta_P = \pi/4$ とする。横軸は電子プラズマとプローブの中心との位相差であるが、電子プラズマは等速円運動をするので、 $t = \varphi/\omega$ から時間に読み換えることが出来る。 r_0/R が大きくなる、即ち電子プラズマが壁に近づくとき信号の振幅は急激に増加し、波形の歪みが大きくなる。

式 (3.34) に実験値 ($\omega = 6.2 \times 10^4$ rad/s, $N = 4.5 \times 10^7$, $r_0/R = 0.26$) を代入して評価したプローブ電流 i_s を図 3.4 (b) に破線で示す。 i_s は観測された信号に比べ振幅が倍程度大きく、位相も約 60° 進んでいることがわかる。

両者の差は検出用の電極と波形観測用のデジタルオシロスコープの間に挿入されている高増幅率の電流増幅器の周波数特性の影響である。従って、これを補正しなければならない。実験的に確認した増幅器の周波数特性を図 3.6 に○で示す。縦軸は増幅率 $A(f)$ を $f < 1$ kHz、即ち、 $A(f)$ がほぼ一定の領域の増幅率の平均値 $A_0 = 1.9$ mV/nA で規格化した値である。増幅率は 10 kHz を越えたところで急激に減少する Low Pass フィルターとなっていることが分かる。ここでは簡単のためにその特性を RC Low Pass フィルターで近似する。

$$Gain = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}\quad (3.36)$$

計測された周波数特性に上式でフィッティングを行なった結果を図 3.6 に実線で示す。RC フィルターの利得の方が周波数の増加に対して緩やかに減少する。しかし、本実験で観測される信号にはあまり高い周波数成分は含まれないのでこの程度の一致でも十分である。従って、増幅器のステップ応答は、以下の式で表すことが出来る。

$$G(t, t') = \begin{cases} \exp\{-(t-t')/\tau\}/\tau & (\text{for } t > t') \\ 0 & (\text{for } t < t') \end{cases}\quad (3.37)$$

ここで、 τ は回路の時定数であり、先のフィッティング結果から $\tau = RC = 21 \mu\text{s}$ である。よって実際にオシロスコープで観測される信号は以下の式で評価される。

$$i_{\text{corrected}}(t) = \int_{-\infty}^t dt' G(t, t') i_s(t') \quad (3.)$$

計算された波形 i_s に対し、増幅器の周波数特性の補正を行なった結果を図 3.4 (b) に一点鎖線示す。補正した信号は、実際にプローブで観測された信号と良く一致する。

同様の比較を、電子プラズマの電子数 N 、初期位置 r_0 をかえて行った結果を図 3.7 に示す。ソード $I(r_0/R = 0.12)$ 、 $H(r_0/R = 0.26)$ から導入された紐状の電子プラズマが誘起するプローブ信号の振幅を電子数の関数として示す。記号は電子プラズマの回転運動の半径の違いを表し、それぞれ $r_0/R = 0.12(\bigcirc)$ 、 $r_0/R = 0.26(\bullet)$ である。実線は予測される信号の振幅であり、増幅の周波数特性の補正は行なってある。両者は広い範囲で良く一致する。以上の結果は、画像計測から得られた非中性プラズマ運動と静電誘導計測により独立に得られた電流信号とが定量的に致することを示している。

3.4 複雑な密度分布を持つ電子プラズマが誘起するプローブ電流

本研究の興味は画像計測法と静電誘導計測法を比較することにより、静電誘導計測で得られる情報を定量的に評価することにある。次に、電子プラズマの密度分布が複雑な構造をもつ場についてこの二つの方法を比較する。ここでは、図 3.8 に示すテスト分布を用いて評価を行な

このような密度分布は、空間的に大きく広がった密度分布をもつ電子プラズマ(背景プラズマ)に、紐状の電子プラズマを入射することにより生成する。図 3.8 は CCD カメラにより観測された密度分布の時間発展の様子である。プラズマ紐を、時刻 $t = 10 \mu\text{s}$ に背景プラズマへと入射し、プラズマ紐と背景プラズマの電子数はそれぞれ $N_o = 1.2 \times 10^7$ 、 $N_b = 1.9 \times 10^8$ である。時間の過にしたがいプラズマ紐が背景プラズマの中を右回りに回転しながら、背景プラズマの中心、ち密度の高い方へと動いて行く様子が観測される⁴ [10]。

電子プラズマが複雑な密度分布を持つ場合には、画像データから得られるような詳細な密度分布の情報をプローブ信号から得ることは明らかに不可能である。そこで、画像データからプローブ信号を再現することにより、プローブ信号に含まれる情報量を評価する。プローブ信号は式 (3.5) から評価出来るが、時間 t に関する微分をどのような方法で実行するかが問題となる。前節では全体が剛体回転を行ったので、角度(位置)の微分に置き換えて計算を行うことが出来た。しかし密度が複雑な分布をもつ場合には、明らかにこの仮定が成立しなくなる。そこで、次の3通り異なる方法を用いて画像データからプローブ信号を再構成することを試みた。

⁴このような運動の詳細については第5章に記す。

1. 差分を用いる方法

画像計測の時間間隔を出来るだけ短くして、各時間にプローブに誘起される鏡像電荷を数値的に微分する方法である。ここでは簡単のために差分を用いて、

$$i_{s1} = \frac{q_s(t_0 + \Delta t) - q_s(t_0)}{\Delta t} \quad (3.39)$$

とする。この方法は計算を行なう上で数学的に複雑な部分はなく、また何処にも仮定が含まれないので実験結果のみで評価でき、もっとも確実な方法といえる。ただし、画像計測の間隔を十分に短く取る必要があり、長時間にわたってプローブ信号を再構成するためには大量の画像データを処理する必要がある。

この方法では、2枚の画像データの差分でプローブ信号を計算するため、プローブ信号を完全に再構成するためには十分に短い間隔で画像データを取得する必要がある。本実験では画像データの取得の間隔は最も短くした場合 $1 \mu\text{s}$ であり、標本化定理よると画像データから計算されるプローブ信号には最大で 500 kHz の周波数成分まで含まれる。一方、静電誘導計測に用いた増幅器の周波数帯域は 10 kHz 程度である。従って、本実験の範囲においては画像データからプローブ信号を完全に再構成することが可能である。

2. 剛体回転を仮定する方法

上記の方法では式 (3.30) の微分を差分で置き換えたため、信号の大きさを評価するために最低2枚の画像データが必要となる。これは実験の再現性の点で不利である。次に、一枚の画像データからその瞬間の信号の大きさを評価する方法を考える。簡単には、電子プラズマが剛体回転をしていると仮定することで評価を行うことが出来る。ただし、前述のように密度分布が複雑になった場合、電子プラズマの剛体回転を仮定することは出来ない。従って、この方法で得られる電流の大きさは観測値と大きく異なる可能性がある。しかし、この方法は紐状の電子プラズマについては非常に良い一致を得ており、複雑な場合にも適用してみる意義があると考えられる。この場合、プローブ信号は次のように評価される。

$$i_{s2} = -\omega \frac{dq_{image}}{d\theta} = \varepsilon_0 R l_P \omega \frac{d}{d\theta_P} \int_{\theta_P - \Delta_P}^{\theta_P + \Delta_P} d\theta E_r(R, \theta) \quad (3.40)$$

ここで、 $E_r(R, \theta)$ は各時間に得られた画像計測から計算される。上式では簡単のために、電子プラズマの剛体回転による鏡像電荷の変化を反対方向へのプローブの回転 $d/d\theta_P$ として導入している。

3. $E \times B$ ドリフトから密度分の変化を予測する方法

この方法では観測された密度分布から導出した電場を用いて、密度分布の時間変化を $E \times B$ ドリフトから評価し、そこからプローブ信号を導出する。この場合は、非一様な密度分布によって生ずる剛体回転からのずれも導入することが出来る。従って、電子プラズマの剛体回転という不自然な仮定を持ち込むことなく、一枚の画像データからある瞬間の信号の大きさを評価することが出来る。

$E \times B$ ドリフトによる密度分布の時間変化は密度の連続の式より,

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0 \quad ($$

となる. 従って, 微小時間 Δt 後の密度分布の変化 Δn は次のように評価される.

$$\Delta n(r, \theta) = -\nabla \cdot (n\mathbf{v})\Delta t = -\frac{\Delta t}{B_0} \left(E_\theta \frac{\partial n}{\partial r} - E_r \frac{1}{r} \frac{\partial n}{\partial \theta} \right) \equiv \delta \hat{n} \Delta t \quad ($$

ここで電場の動径方向成分 E_r は次の二つの成分で構成される. 一つは, 式 (3.26) から計算さ電子プラズマの自己場の成分である. もう一つは, 電子プラズマを閉じ込めるための外場にする成分で, 近似的には式 (3.3) により表される. 電場の方位角方向成分 E_θ については, 外対称分布をしているのでこれに因る項は存在せず, 電子プラズマの自己場しか存在しない. 勾配 $\partial n/\partial r$, $\partial n/\partial \theta$ は式 (3.19) を用いて評価出来る. 従って, 観測された画像データより, 評価することが可能である.

密度分布の変化 Δn によるポテンシャルの変化 $\Delta \phi = \delta \hat{\phi} \Delta t$ は Poisson 方程式を満たし次式えられる.

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \Delta \phi(r, \theta) = \frac{e}{\epsilon_0} \Delta n(r, \theta) \quad ($$

$\Delta \phi$ は式 (3.42) により得られた Δn に対してポテンシャルの計算, 即ち式 (3.11) から (3.22) 用することにより得られる. この結果をもちいると, プローブに誘起される鏡像電荷の変化分は次式で表すことが出来る.

$$\begin{aligned} \Delta q_s &= \epsilon_0 R l_P \Delta t \int_{\theta_P - \Delta_P}^{\theta_P + \Delta_P} d\theta \left. \frac{\partial \delta \hat{\phi}(r, \theta)}{\partial r} \right|_{r=R} \\ &\equiv \delta \hat{q}_s \Delta t \end{aligned} \quad ($$

従って, プローブ電流は次式で与えられる.

$$i_{s3} = \frac{\Delta q_s}{\Delta t} = \delta \hat{q}_s \quad ($$

以上のいずれの方法も, 複数の画像データから一つのプローブ信号を再構成する. ここでの再現性が問題となる. 画像計測では電子プラズマの生成, 保持, 破壊のサイクルを何度も返し, それぞれ違う電子プラズマのデータを繋ぎあわせることによって, 時系列に沿った一データとする. 非中性プラズマはその再現性の高さが特徴ではあるが, 分布が複雑な場合に現性が低くなる. とくに, 電子プラズマの保持時間が $100 \mu\text{s}$ を越えると, 再現性は著しく低る. この様な事情から, 分布が複雑な場合には画像データからのプローブ信号の再構成は現は $t < 100 \mu\text{s}$ 程度までしか適用出来ない.

上記の3つの方法を図 3.8 の密度分布に適用する前に, 真空中に置かれた一本の紐状の電ラズマの場合に適用して, それぞれの手法の妥当性を評価しておく. 最初の二つの方法につは, 電子プラズマが十分に細いとき式 (3.39) と式 (3.40) は明らかに式 (3.34) に帰着される. 数 $N = 1.0 \times 10^7$, 回転運動の半径を $r_0/R = 0.26$ としたときに幅 $2\Delta_P = \pi/2$ のプローブで

れる信号を図 3.9 に実線で示す. ここでは, 増幅器の周波数特性の補正は行なっておらず, 外場による回転の効果も考慮しない.

三番目の方法については, 密度分布が有限の幅を持たないと計算出来ないので, ここでは非常にシャープなガウス分布について適用する.

$$n(x, y; x_0, y_0) = n_0 \exp \left\{ -\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{b^2} \right\} \quad (3.46)$$

ただし, $(x_0, y_0) = (r_0 \cos \theta_0, r_0 \sin \theta_0)$, $n_0 = 1.7 \times 10^{12} \text{ m}^{-3}$, $b = 2.9 \text{ mm}$ であり電子数は先の δ 関数を用いた計算と同じく $N = 1.0 \times 10^7$ である. 式 (3.45) から評価されるプローブ信号 i_{s3} を図 3.9 に白丸で示す. i_{s3} は i_{s1} , i_{s2} に比べ若干ばらつくものの, これらは良く一致する. i_{s3} のばらつきは, 電子プラズマ紐の分布を非常に狭くしたことに起因する数値計算の誤差である. これらの計算結果の間には良い一致がみられ, ここで導入した3つの手法は相互に一貫性を持つ手法であることが確認できる.

これらの方法を図 3.8 に示した密度分布に適用し得られた信号と, 実際に観測されたプローブ信号を比較する. 図 3.10 に実際に観測された信号を実線で示す. プラズマ紐が入射される前, 即ち背景プラズマだけの時には信号の振幅は無視出来る程度に小さい. これは背景プラズマが z 軸の周りに対称な分布をしているためである. プラズマ紐が入射されると nA 程度の振幅でおよそ 15 kHz で振動する信号が検出される. この信号はプラズマ紐入射前には検出されないことから, プラズマ紐の運動により形成される密度分布の変化により誘起されたと考えられる.

初期の時間帯において $2 \mu\text{s}$ 毎に観測された密度分布から上記の3通りの手法により評価された信号を図 3.10 に記号で示す. 増幅装置の周波数特性の補正は行なっている. それぞれの時間においてプローブに誘起される鏡像電荷の差分から計算した信号 i_{s1} を●で示す. 実験値と計算値では振幅は同程度あるが位相は異なっており, 両者の波形は大きく異なっている.

剛体回転を仮定して計算した信号 i_{s2} を■で表す. ここで, 剛体回転の周波数は実験的に観測されたプローブ信号から $\omega/2\pi = 15 \text{ kHz}$ とした. この場合, 実験値の振幅に比べ計算値の振幅は小さく, 両者は大きく異なる.

$E \times B$ ドリフトから密度分布の変化を評価して計算した信号 i_{s3} を白抜きの記号で表す. 外場をゼロとして評価した結果を○で, 周波数 10, 15 kHz の剛体回転と等価な電場 E_r^{ext} を導入した場合をそれぞれ△と□で表す. より現実的な外場の効果として, 式 (3.3) で表される E_r^{ext} を導入して計算した結果を×で示す. 外場分布の計算からここでは $\epsilon_1 = 0.189$, $\epsilon_2 = 1.20$ として, E_0 は $r/R = 0.26$ で 10 kHz の回転となるように決定した. これら4通りの外場について計算された信号はほぼ同じ波形となる. これは, 大きく広がった密度分布では, 電子プラズマの運動に対する外場の影響が自己場の影響に比べ小さいことを表している. この方法により評価された信号 i_{s3} もやはり実験値とは大きく異なる.

3.5 検討

前節では3通りの異なる手法を用いて、密度分布からプローブ信号の再構成を試みた。しかどの方法でも実際に観測された信号を正確に再現することは出来なかった。ただし、実験的に測された密度分布から余計な仮定なしに直接信号を計算した i_{s1} と、電子プラズマの自己場による密度分布変形まで考慮した i_{s3} の波形は良く一致する。従って、この二つの手法による密度分布からの信号の再構成そのものは正確であると考えられる。

従って、両者の相違の可能性として、画像計測で検出されない「見えない電子プラズマ」の存在が考えられる。ここで、画像計測で観測出来ないレベルの薄い電子プラズマが導体壁近くの空に存在する、と言う仮定を導入する。この仮定には計測や計算による直接的な裏付けはない。しかし、図 3.8 に示したように、背景プラズマにプラズマ紐を入射した場合には渦紐周辺から背プラズマの外側に向かって渦度の腕が伸びていく様子が観測されており、このようなプラズマ存在を否定することも出来ない⁵。

この見えない電子プラズマが誘起するプローブ信号を評価する。非中性プラズマでは慣性モメント (\approx 正準角運動量) が良く保存されることや画像計測の結果から考えて、この成分の密度画像計測の検出限界より大幅に大きいとは考えられない。そこでまず、密度を $n = 4.8 \times 10^{10} \text{ m}^{-3}$ と仮定する。これは画像計測の検出限界の約 2 倍の密度である。次にその分布として、動径方向には $r/R = 0.8 \sim 0.98$ に、方位角方向には $\pi/2$ の幅の間に一様に分布する、と仮定する (図 3 参照)。簡単のためにこの成分が $\omega = 15 \text{ kHz}$ で剛体回転すると仮定する。このような分布をも電子プラズマによる信号を図 3.10 に破線で示す。この信号は実験で観測されたプローブ信号と一致する。

この分布に含まれる電子数は、全電子数の 1 % 程度であり、電荷に対する保存則や正準角運動量の保存則の実験的な曖昧さを考慮すれば、許容範囲内と考えられる。もちろん密度や形状をもと現実味のある値や形、たとえば図 3.8 のスパイラルアームのような形にすることは可能でありそれにより計算結果と実験値の一致がより良くなる可能性もある。以上の検討と、実際の信号実験的には許容可能なこのモデルの作る信号の相似性から判断して、このようなモデルを導入することが図 3.10 の波形の違いを説明出来るただ一つの方法であると結論する。

上述の検討は、プローブの近くに電子プラズマが存在するとプローブ計測はその影響を強く示している。しかしながら、このような周辺部に存在する電子プラズマが作るポテンシャルは、電子プラズマ中心部の運動にはほとんど寄与しないことは明らかである。従って、電子プラズマが複雑な密度分布を持つ場合には、プローブ計測で電子プラズマ中心部の運動を計することは不可能であり画像計測が有効となる。

3.6 まとめ

この章で、報告した主な結果は次の通りである。

⁵ごく最近の計測でプラズマの腕が導体壁付近まで分布することが確認された。

観測された密度分布のデータから、二次元のポテンシャル、電場を十分に高い精度で高速に計算する手法を確率した。この手法は非中性プラズマを使った渦運動や乱流の研究に不可欠である。

画像計測により得られた密度分布に対して上述の計算手法を適用することにより、非中性プラズマの計測に対し静電誘導計測をどこまで適用することが可能かを検討した。その結果、電子プラズマが一本の細い糸状に分布している場合には、静電誘導計測によりその電子数や運動の様子などの情報を得ることが可能であり、画像計測を静電誘導計測で置き換えられることを示した。しかし、電子プラズマが広がった分布を持つ場合には、静電誘導計測で得られる情報は限られており、画像計測を静電誘導計測で置き換えることは不可能である。このような場合プラズマの中心部の運動を観測するには画像計測が有効であることを確認した。

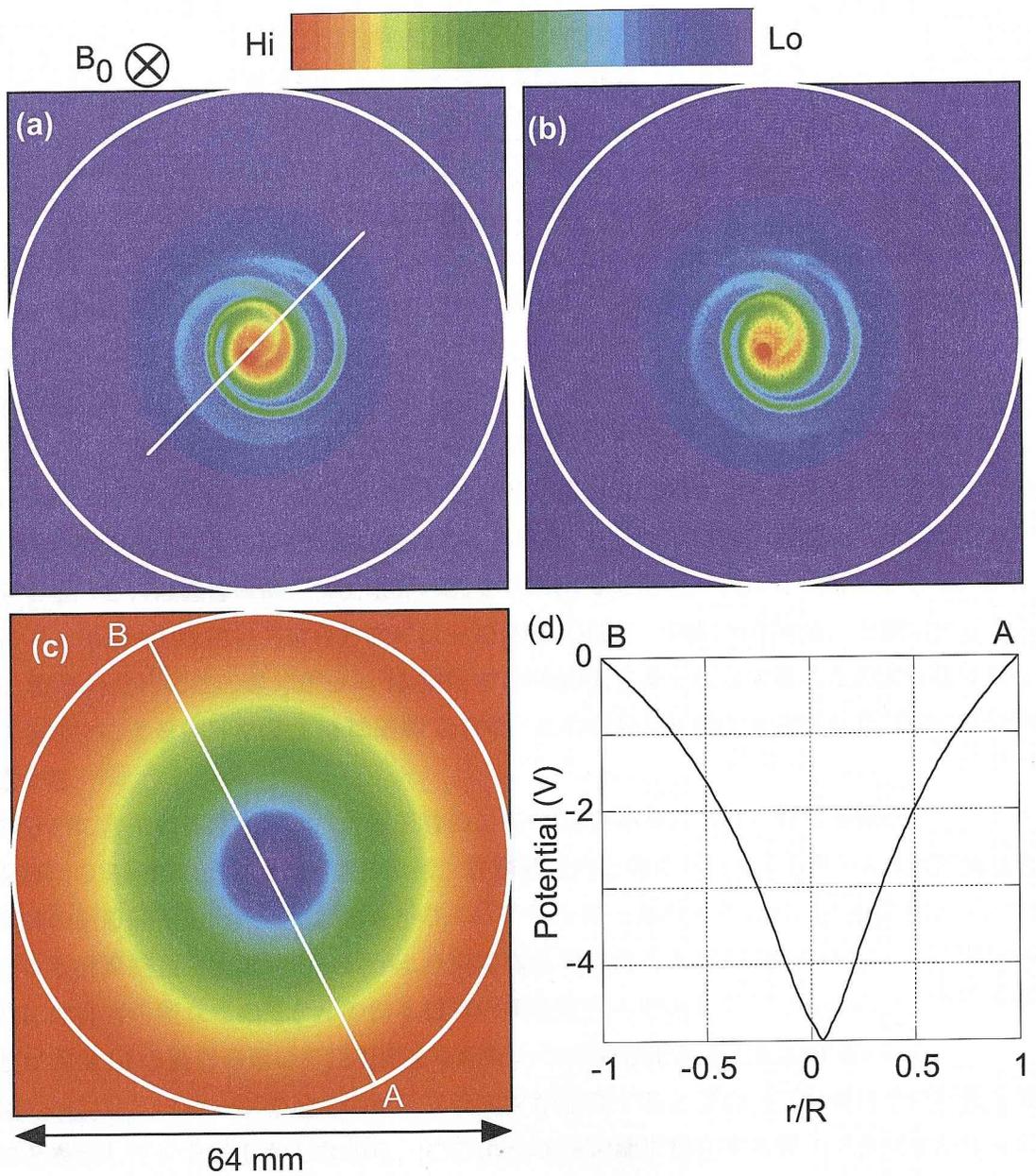


図 3.1: (a) CCD カメラにより観測された電子プラズマの密度分布 n_o . (b) Fourier - Bessel 展開から再構成された密度分布 n_{FB} . ただし $m_{max} = 100$, $\nu_{max} = 100$ である. (c) 観測された密度分布から Fourier - Bessel 展開を用いて導出されたポテンシャル分布. (d) (c) に示した直線上でのポテンシャル分布.

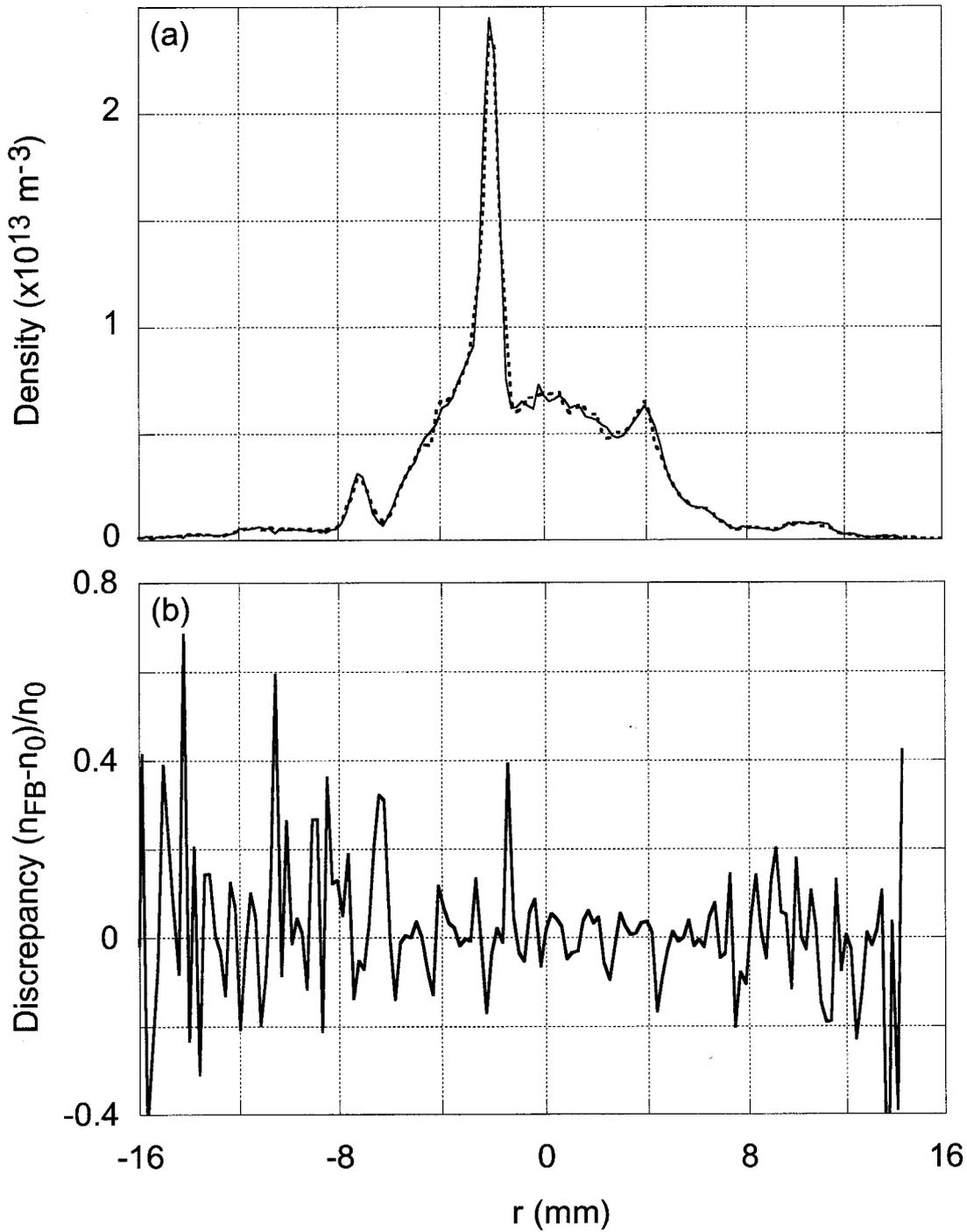


図 3.2: (a) 実線は CCD カメラにより観測された電子プラズマの密度分布 n_o の断面を表し、破線は Fourier - Bessel 展開から再構成された密度分布 n_{FB} の断面図を表す. (b) n_o と n_{FB} の間の誤差率 $(n_{FB} - n_o)/n_o$ を示す.

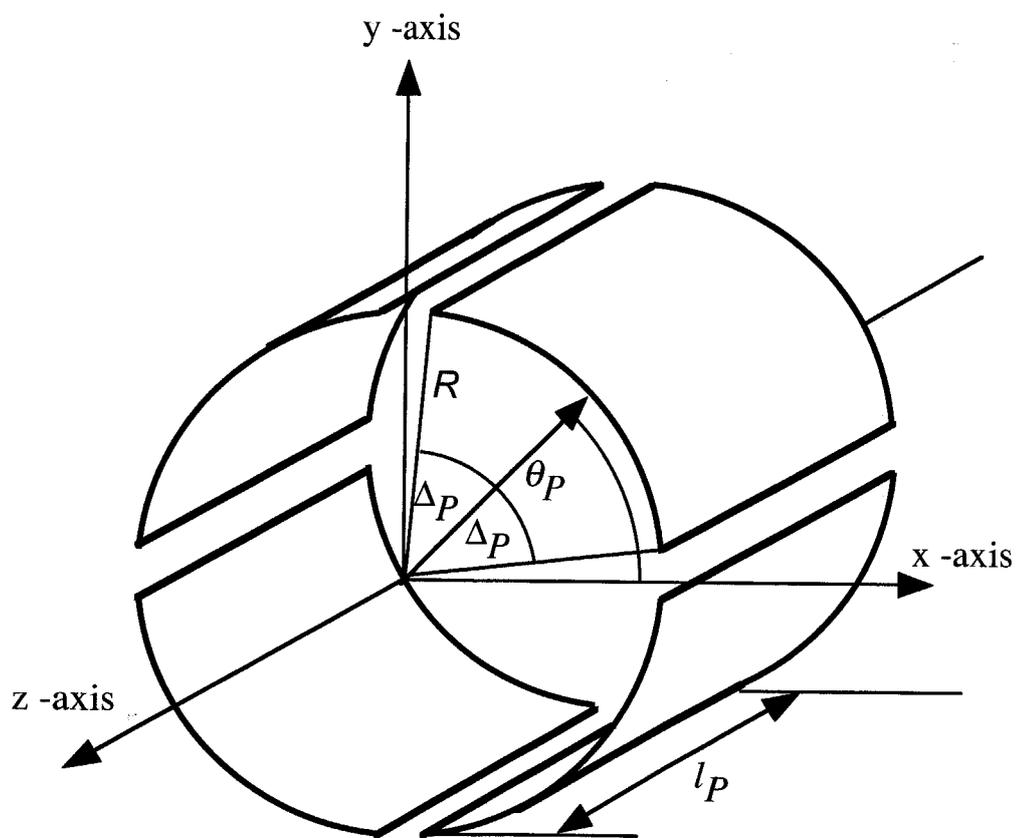


図 3.3: 分割電極の模式図.

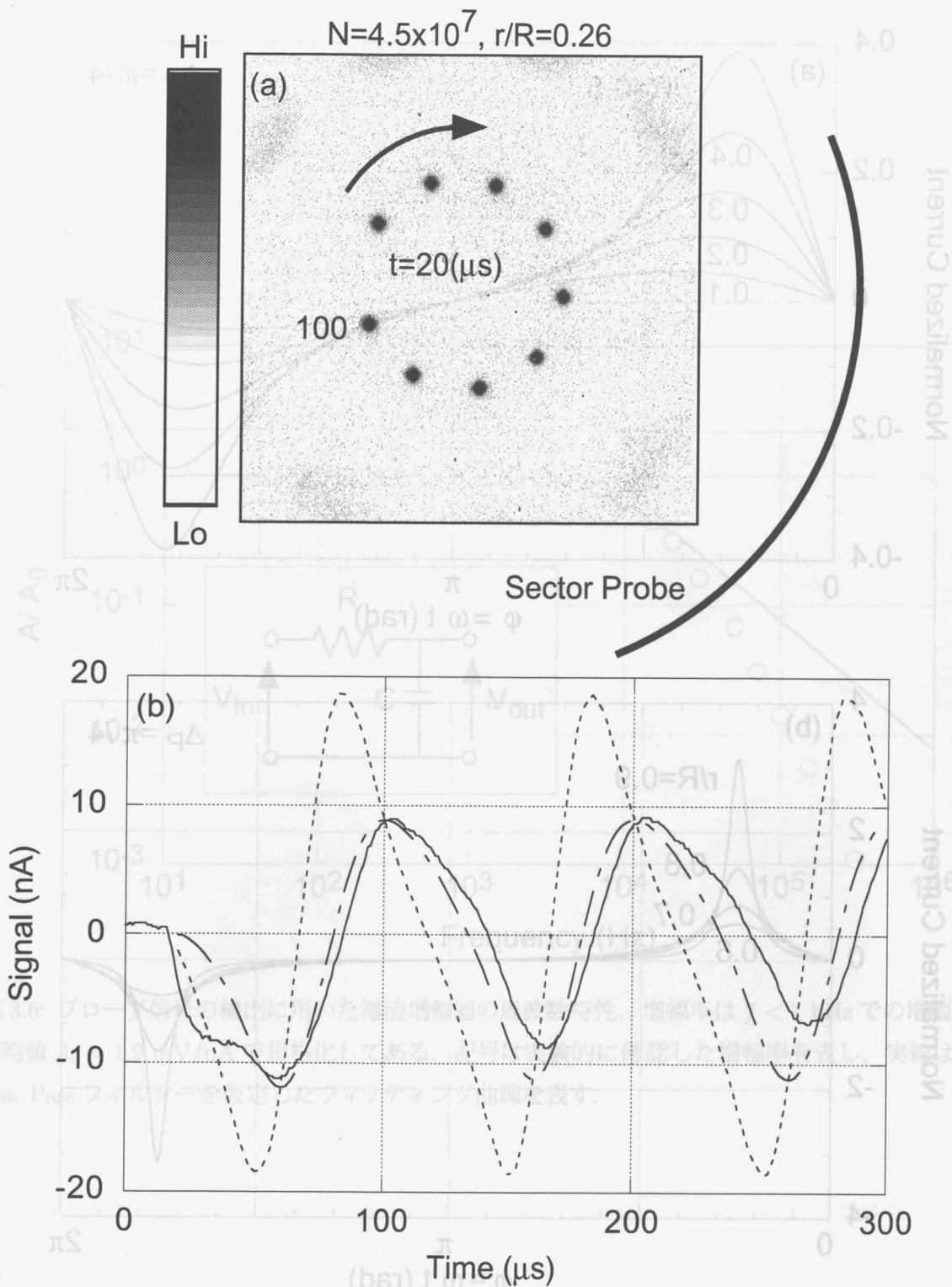


図 3.4: (a) CCD カメラにより観測された、一本の紐状に分布した電子プラズマの運動. (b) この運動により誘起されるプローブ信号. 実線は観測された信号を表し、破線は画像データから構成した信号を表す. 一点鎖線はこの信号に計測系の周波数特性の補正を行った波形を表す.

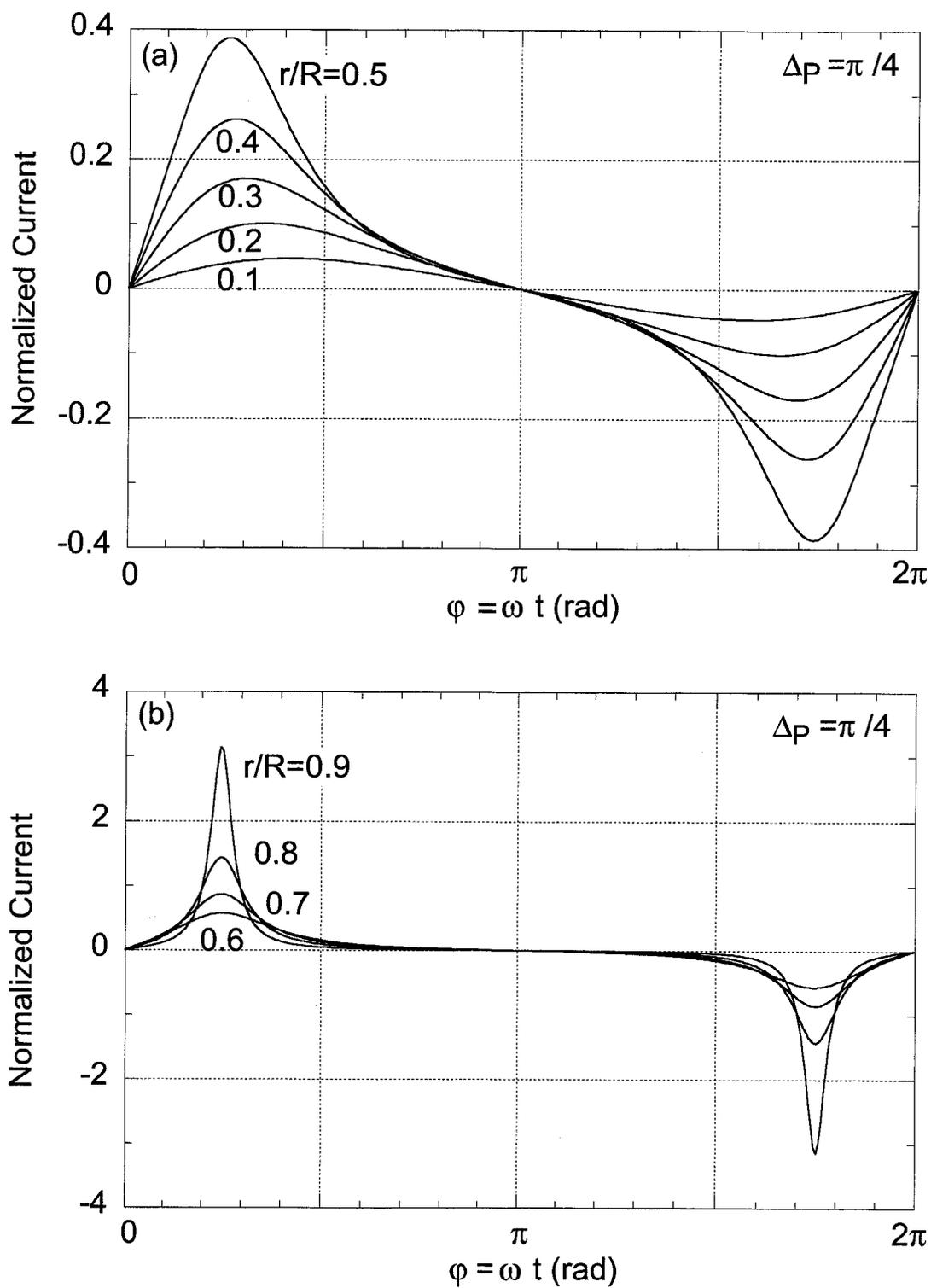


図 3.5: 一本の電子プラズマ紐の運動により半値幅 $\Delta_P = \pi/4$ のプローブに検出される信号の測値.

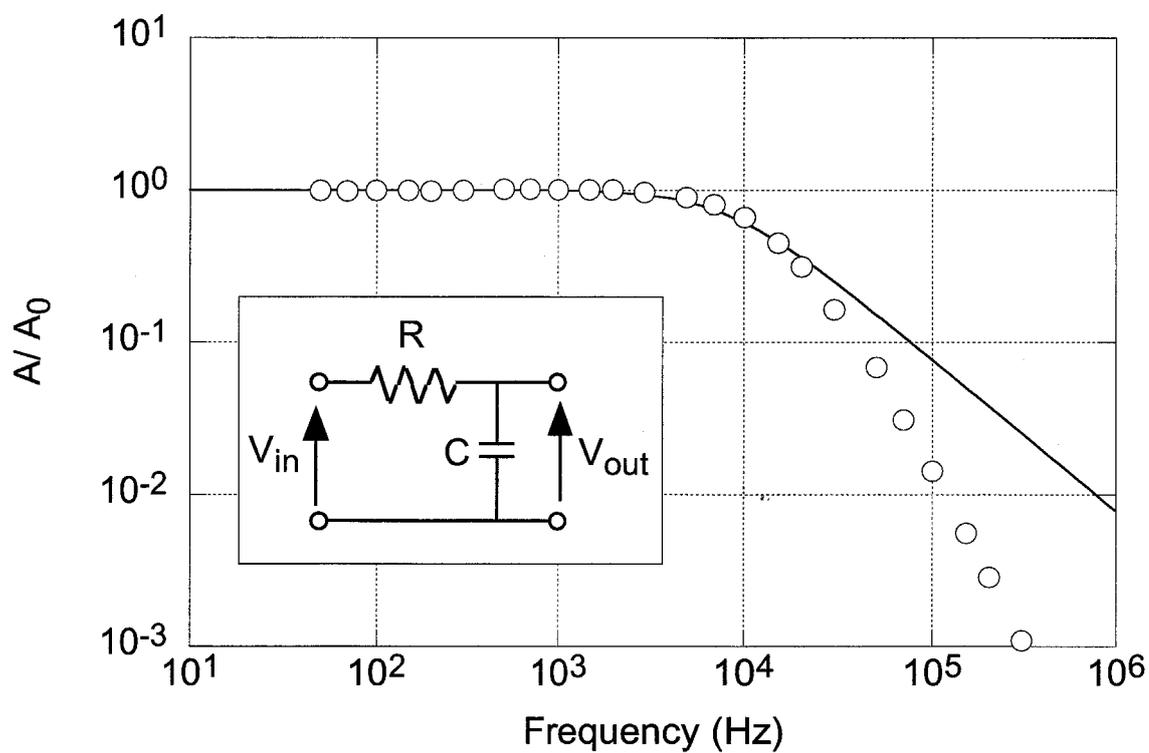


図 3.6: プローブ信号の検出に用いた電流増幅器の周波数特性. 増幅率は $f < 1$ kHz での増幅率の平均値 $A_0 = 1.9$ mV/nA で規格化してある. 記号は実験的に確認した増幅率を表し, 実線は RC Low Pass フィルターを仮定したフィッティング曲線を表す.

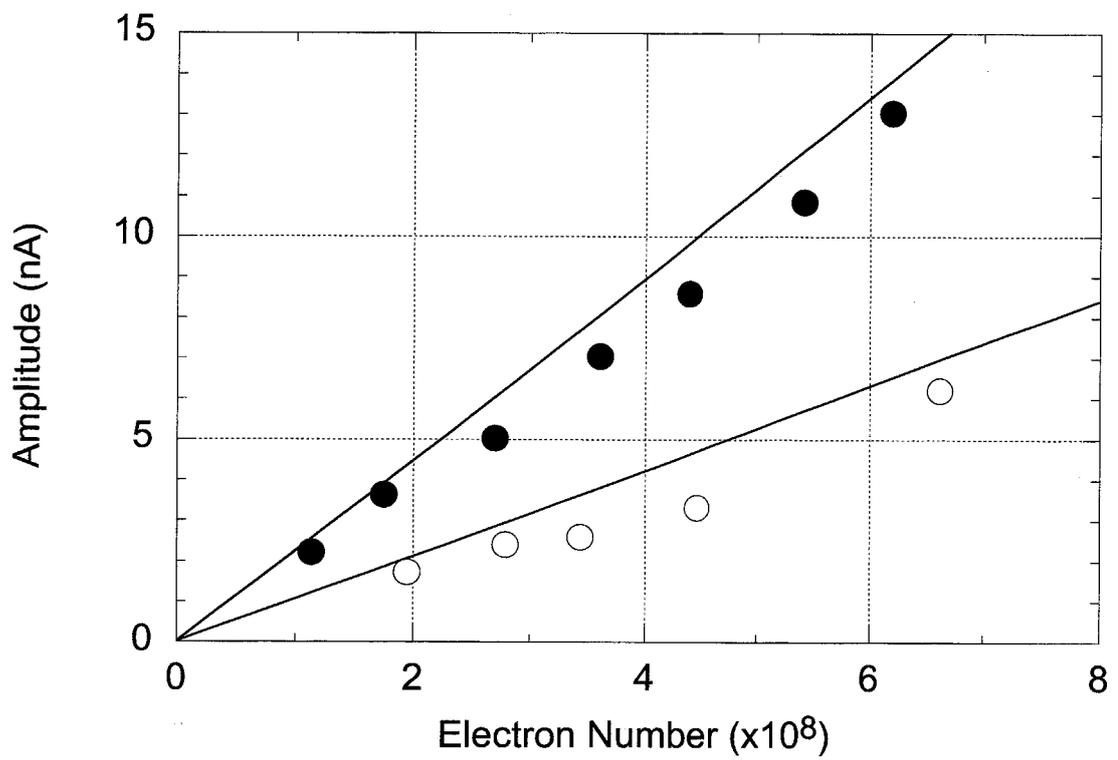


図 3.7: 一本のプラズマ紐の運動によりプローブに誘起される信号の振幅. 黒丸 ($r_0/R = 0.26$) 白丸 ($r_0/R = 0.12$) は実験的に得られたデータを示す. 実線はそれぞれのケースについての予言を示す.

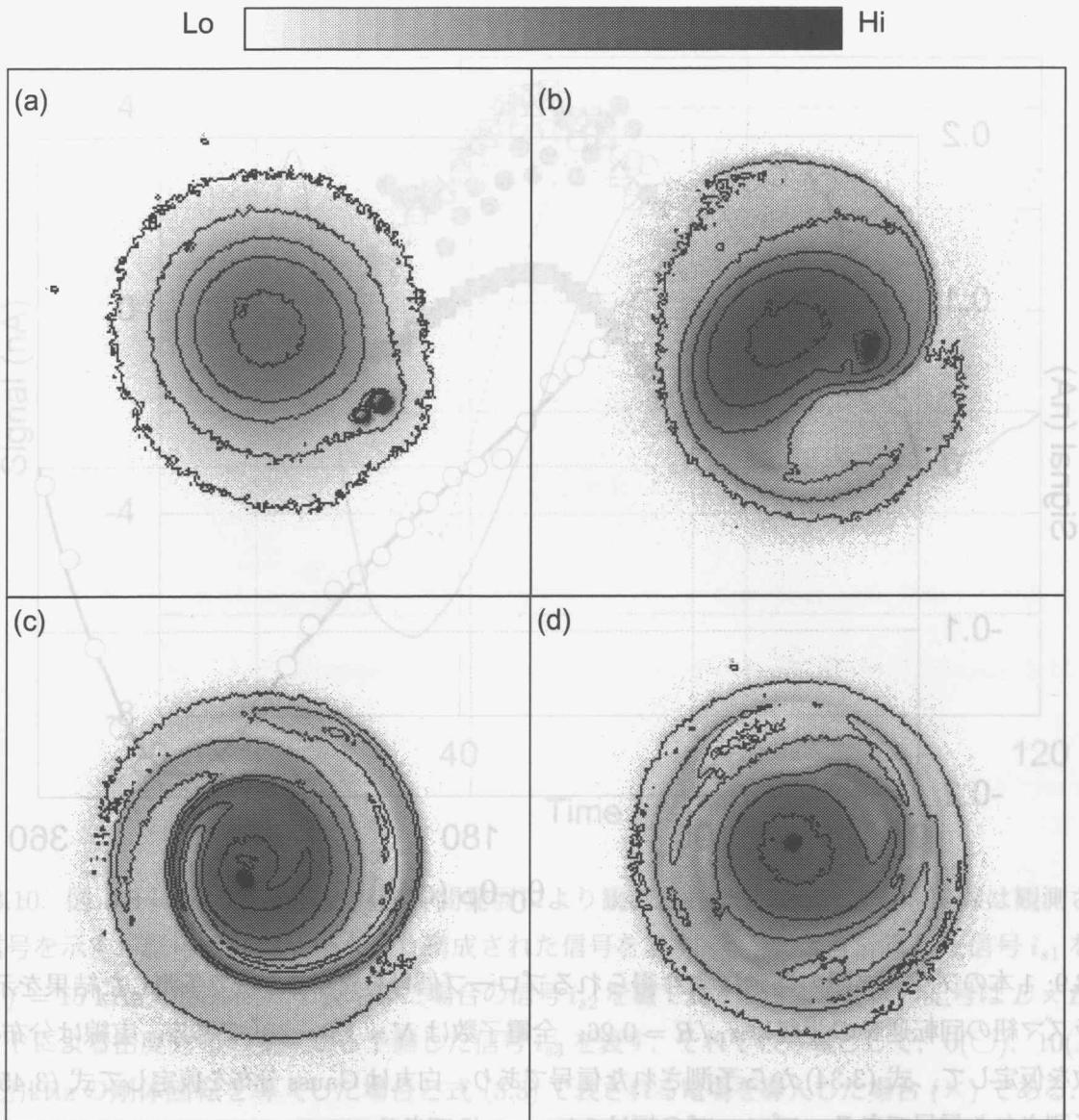


図 3.8: CCD カメラにより観測された電子密度の二次元分布の時間発展。実線は密度の等高線を表す。(a) $t=16$, (b) 30 , (c) 40 , (d) $100 \mu\text{s}$.

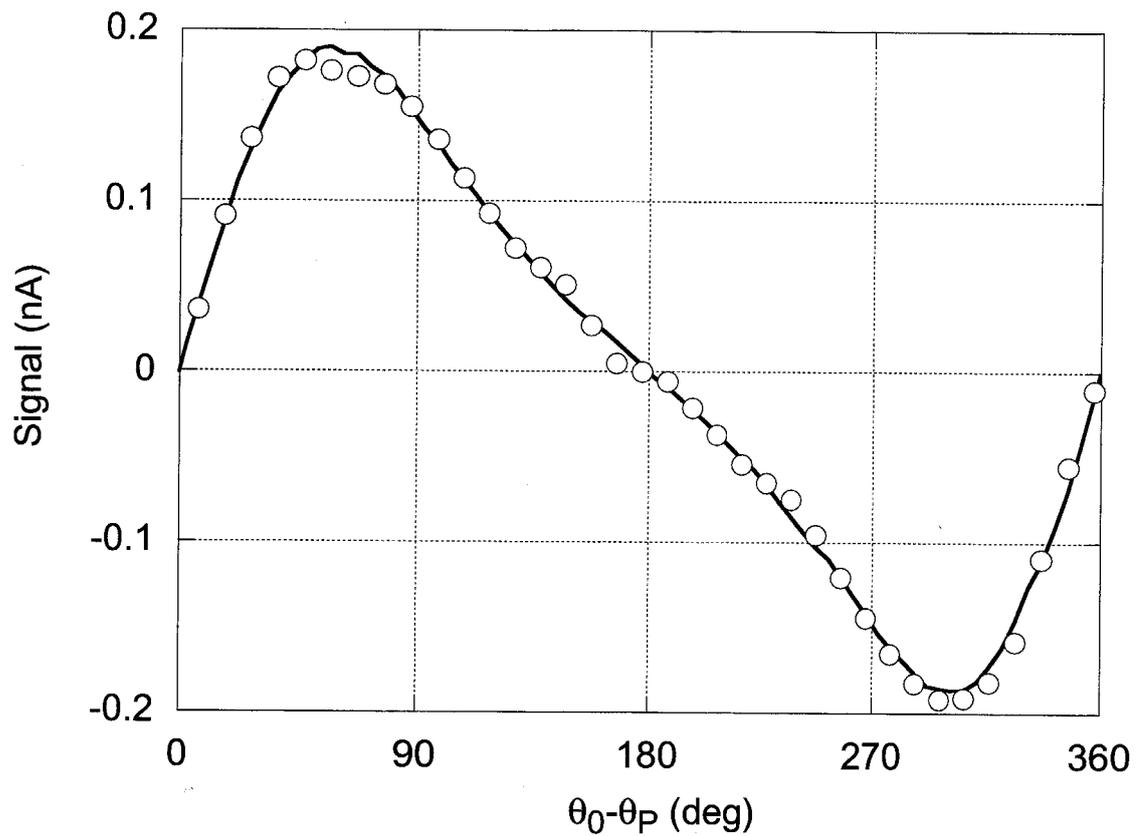


図 3.9: 1本のプラズマ紐の運動により得られるプローブ信号を異なる手法で予測した結果を示す。プラズマ紐の回転運動の半径は $r_0/R = 0.26$ 、全電子数は $N = 1.0 \times 10^7$ である。実線は分布関数を仮定して、式 (3.34) から予測された信号であり、白丸は Gauss 分布を仮定して式 (3.45) から予測された信号である。プローブの幅は $2\Delta_P = \pi/2$ である。

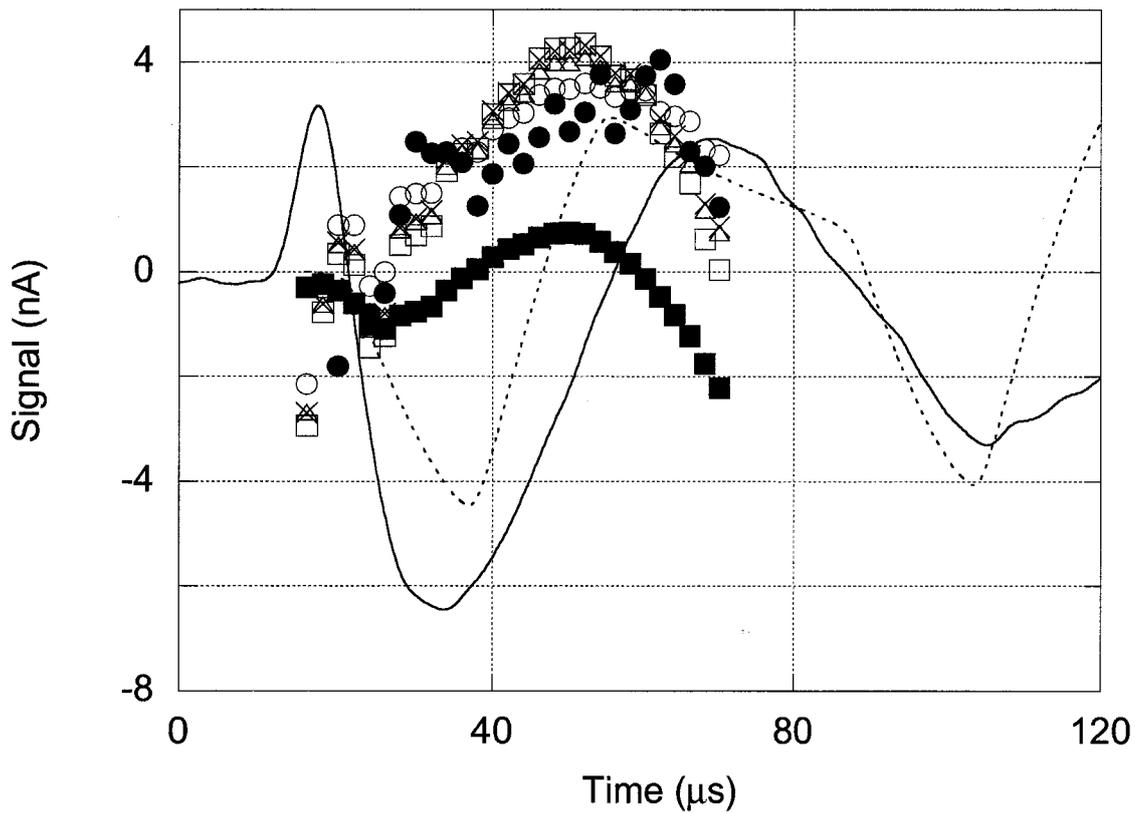


図 3.10: 図 3.8 に示した電子密度の時間発展により観測されたプローブ信号. 実線は観測された信号を示す. 記号は画像データより構成された信号を表す. 差分により計算した信号 i_{s1} を●で, $f = 15$ kHz の剛体回転を仮定した場合の信号 i_{s2} を■で表す. 白抜きと×の記号は $E \times B$ ドリフトによる密度分布の変化から予測した信号 i_{s3} を表す. それぞれ外場として, 0(○), 10(△), 15(□)kHz の剛体回転を導入した場合と式 (3.3) で表される電場を導入した場合 (×) である. 破線は, 図 3.11 に示すモデル分布から計算した信号である. 増幅器の周波数特性の補正は行なっている.

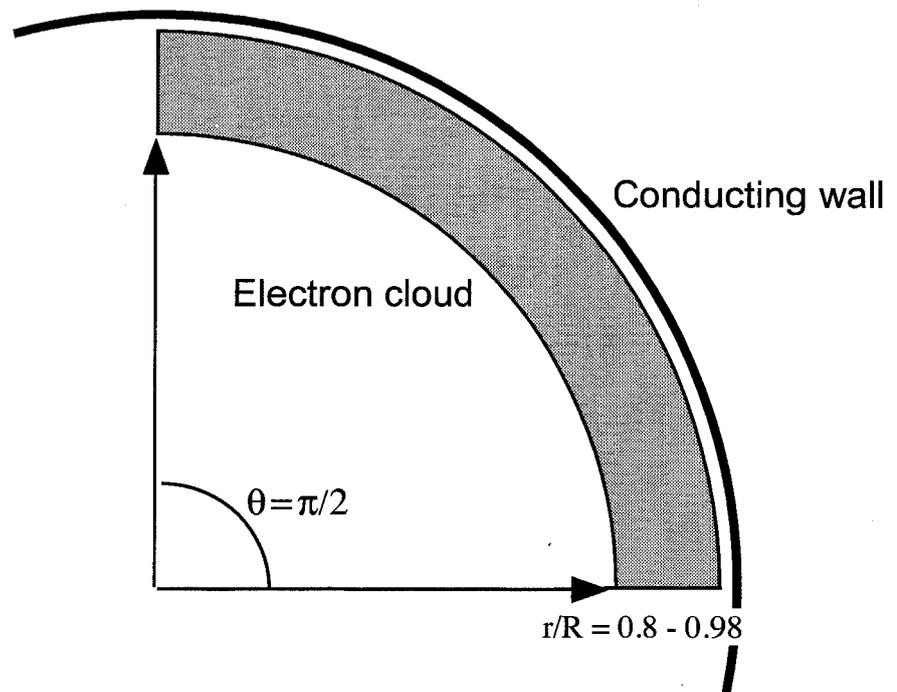


図 3.11: 観測されるプローブ信号と画像データから構成された信号の相違を克服するために
 した「見えない電子プラズマ」の密度分布の模式図

関連図書

- [1] K. Ito, Y. Kiwamoto and A. Sanpei, *Jpn. J. Appl. Phys.* **40**, 2258 (2001).
- [2] C. A. Kapetanacos and A. W. Trivelpiece: *J. Appl. Phys.* **42** (1971) 4841.
- [3] J. B. Kadtko, T. Mitchell, C. F. Driscoll and K. S. Fine: *Proc. Int. Workshop on Plasma Physics, 1994* (dbv-Verlag, Graz, 1994).
- [4] R. W. Gould: *Phys. Plasmas* **2** (1995) 2151.
- [5] *Non-Neutral Plasma Physics III*, eds. J. J. Bollinger, R. L. Spencer and R. C. Davidson, AIP Conf. Proc. **498** (1999).
- [6] J. S. deGrassie and J. H. Malmberg: *Phys. Fluids* **23** (1980) 63.
- [7] W. D. White, J. H. Malmberg and C. F. Driscoll: *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 1823.
- [8] B. P. Cluggish, C. F. Driscoll, K. Avinash and J. A. Helffrich: *Phys. Plasmas* **4** (1997) 2062.
- [9] Y. Kiwamoto, K. Ito, A. Sanpei, A. Mohri, T. Yuyama and T. Michishita: *J. Phys. Soc. Jpn.* **68** (1999) 3766.
- [10] Y. Kiwamoto, K. Ito, A. Sanpei and A. Mohri: *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 3173.

第4章 真空中の離散的な渦糸群の運動

4.1 背景と目的

中性流体の渦については既に百年以上に及ぶ研究の歴史があり [1, 2, 3], 豊富な知識が蓄積されている. 特に非粘性, 非圧縮性の二次元 Euler 流体の渦運動については良く研究されている, かし現実の流体を用いた実験では近似が難しく多くは理論的な研究であり, 非常に数学的である一方, 第1章で示したように強く磁化されたプラズマの密度分布が磁場方向に一様であれば, 場に垂直な断面内での運動は, 巨視的には二次元 Euler 流体と等価になる [4, 5]. ここで, 電子密度 $n(x, y)$ と渦度 $\zeta(x, y)$, ポテンシャル $\phi(x, y)$ と流線 $\psi(x, y)$ の間には次の対応関係が成立す:

$$\zeta(x, y) = \frac{en(x, y)}{\varepsilon_0 B_0} \quad (4)$$

$$\psi(x, y) = \frac{\phi(x, y)}{B_0} \quad (4)$$

この関係を用いると, 二次元 Euler 流体の渦運動を非中性プラズマにより高い精度で実験的に証することが可能となる.

これまでに Malmberg Trap 中に捕捉された電子プラズマを使って多くの二次元渦運動の研究行われている. 離散的な渦領域 (渦度の集中している領域) の運動, 相互作用の研究もその一つある. 例えば, 一つの渦領域を用いた研究としては Eggleston の外部から印加した Shear 流中の渦領域の変形の実験がある [6]. Fine と Mitchell は二つの渦領域をつくり, その軌道の安定性合体の過程について研究を行なった [7, 8]. Durkin らは Photocathode を用い複数の電子の渦をすることで, 渦の配列の安定性を実験的に検討している [9]. ただし, 個々の渦の運動の軌道を詳細に追跡した実験はない.

本実験では, 電子放出効率が高い小型のカソード 19 個を三角格子状に配置した電子源 (図 2.1 (参照)) を用いることにより, 紐状の密度分布をもつ電子プラズマを一度に 19 本生成することが可能である. これにより, 電子プラズマの入射位置, その中に含まれる電子数等の初期条件を高精度で制御し, 再現することが出来る. この電子プラズマの磁場に垂直な断面内の分布は円筒極の断面積に比べ十分に細く, 線電荷として近似することが可能であり, 従って渦糸と見なすことが出来る. ここで, 渦糸とは渦領域の循環 (電子数) を保ったままその断面をゼロとしたものであり, その運動は力学的な運動方程式で表される事が知られている [10]. 本章では真空中に入された電子プラズマ紐の運動を詳細に追跡し, その運動を渦糸の運動方程式から予測される動と比較, 検討する.

まず, 第 4.2 節で渦糸群の従う運動方程式を電磁気学的に導出する. つづいて, 第 4.3 節か第 4.6 節で, 1 本から 4 本の渦糸の運動について検討する. 最後に第 4.7 節で本章をまとめる.

4.2 渦糸運動の方程式

ここでは、電磁気学的に導出した電子プラズマの渦糸群の従う運動方程式が、中性流体の渦糸群が従う運動方程式と一致することを示す。

線電荷密度の分布を $\lambda(\mathbf{r}')$ とすると、Poisson 方程式の二次元解は

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \iint_{S_\alpha} dx' dy' \lambda(\mathbf{r}') \ln |\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \quad (4.3)$$

となる。ただし、 \mathbf{r} は $x-y$ 平面内の位置ベクトルである。いま無限に長い線電荷 (二次元では点電荷) を考え $\lambda = \lambda_\alpha \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha)$ とすると、そのポテンシャルは

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{\lambda_\alpha}{2\pi\epsilon_0} \ln |\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}| \quad (4.4)$$

となる。従って、線電荷が複数存在する場合のポテンシャルは次式で与えられる。

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} \frac{\lambda_\alpha}{2\pi\epsilon_0} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha| \quad (4.5)$$

線電荷 α はこのポテンシャルによる $E \times B$ ドリフトの流れに乗って運動する。いま、磁場は z 軸方向を向き、その強さが一様であるとして $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$ で与えられるとすると、線電荷 α の運動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_\alpha}{dt} &= \mathbf{v}_\alpha(t) = \hat{z} \times \frac{\nabla\phi(\mathbf{r}_\alpha)}{B_0} \\ &= -\hat{x} \frac{\partial\psi(\mathbf{r}_\alpha)}{\partial y_\alpha} + \hat{y} \frac{\partial\psi(\mathbf{r}_\alpha)}{\partial x_\alpha} \\ &= \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{\Gamma_\alpha}{2\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|^2} \{-\hat{x}(y_\alpha - y_\beta) + \hat{y}(x_\alpha - x_\beta)\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

となる。ただし、 $\Gamma_\alpha = \lambda_\alpha / \epsilon_0 B_0$ 、 $\psi = \phi / B_0$ であり、 Γ と ψ は中性流体の循環と流線に相当する。また、 $\sum_{\beta \neq \alpha}$ は $\beta = \alpha$ を除いた和を表す。

ここで、複素座標 $z = x + jy = r \exp(j\theta)$ を導入すると式 (4.6) は次のように変形される。

$$\frac{dz_\alpha}{dt} = \frac{x_\alpha}{dt} + j \frac{dy_\alpha}{dt} = j \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{\Gamma_\alpha}{2\pi} \frac{z_\alpha - z_\beta}{|z_\alpha - z_\beta|^2} \quad (4.7)$$

また、式 (4.5) から、

$$\psi(z) = \frac{\phi(z)}{B_0} = \sum_{\beta} \frac{\Gamma_\beta}{2\pi} \ln |z - z_\beta| = \text{Re} \left[\sum_{\beta} \frac{\Gamma_\beta}{2\pi} \ln(z - z_\beta) \right] \quad (4.8)$$

となる。ここで、虚数部まで含んだポテンシャルを

$$w(z) = \sum_{\beta} \frac{\Gamma_\beta}{2\pi} \ln(z - z_\beta) \quad (4.9)$$

とおくと、

$$\frac{dw(z_\alpha)}{dz_\alpha} = \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{\Gamma_\alpha}{2\pi} \frac{z_\alpha^* - z_\beta^*}{|z_\alpha - z_\beta|^2} \quad (4.10)$$

となり、式 (4.7) と式 (4.10) から

$$\frac{dz_\alpha}{dt} = j \left[\frac{dw(z_\alpha)}{dz_\alpha} \right]^* \quad (4)$$

が得られる。従って、運動方程式は複素平面 z 上で表したポテンシャルの z 微分で表されるようになる。こうして得られた線電荷の磁場に垂直な断面内での運動方程式は中性流体の渦糸の運動方程式と完全に一致する。

ここで、渦糸 (線電荷) 群の運動方程式を別の角度から検討しておく。渦糸群を構成する各糸の相互位置のみによって決まる関数 H を定義する。

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \Gamma_{\alpha} \Gamma_{\beta} \ln r_{\alpha\beta} \quad (4)$$

ただし、 $r_{\alpha\beta} = |z_{\alpha} - z_{\beta}|$ である。渦糸の運動方程式は H を使うと

$$\Gamma_{\alpha} \frac{dx_{\alpha}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_{\alpha}}, \quad \Gamma_{\alpha} \frac{dy_{\alpha}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_{\alpha}} \quad (4)$$

と表すことが出来る。これは質点系の力学におけるハミルトンの正準方程式に相当する形をしており、 H はハミルトン関数である。ただし、質点系では位置と運動量が正準共役の変数であるのに対して、この場合は x と y が正準共役変数となる。

二次元の渦糸系の運動方程式が質点系の正準運動方程式と同じ形で表されるので、質点系の保存量に相当して渦糸系にも保存量が在ることが分かる。二次元の渦糸系では以下の物理量が保存量となる [10].

$$z_0 = \frac{\sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha} z_{\alpha}}{\sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha}} = const \quad (4)$$

$$\sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha} (x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2) = const \quad (4)$$

$$\sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha} \left(x_{\alpha} \frac{dy_{\alpha}}{dt} - y_{\alpha} \frac{dx_{\alpha}}{dt} \right) = const \quad (4)$$

$$H = const \quad (4)$$

式 (4.14) は渦糸系の重心 z_0 が不変であることを表している。ただし、 $\sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha} = 0$ の場合には、全体の重心は定義出来ない。このような場合には、系を Γ_{α} の和がゼロでないような任意の二群に分け、それぞれの群について重心 z_0' , z_0'' を定義すれば、その相対位置 $z_0' - z_0''$ が不変となる。式 (4.15) は渦糸群の原点周りの慣性モーメントが不変量となることを表している。これは、磁性プラズマにおいては式 (1.2) で示した角運動量の保存に相当する。式 (4.16), (4.17) は渦糸系角運動量とハミルトン関数が保存することを表している。ハミルトン関数は非中性プラズマにおいては静電エネルギーに相当する。

つぎに、実際の実験状況である、線電荷 α が半径 R の円筒導体の内部にある場合を考えよう。体壁は等電位面であり $\phi(R, \theta) = 0$ となる。これは流体では $\psi(R, \theta) = 0$ を表し、摩擦の全く無いらかな円筒壁に相当する。この境界条件を満足するためには、 α の鏡像電荷として座標 $z = R^2$,

に $-\Gamma_\alpha = \lambda_\alpha/\varepsilon_0 B_0$ の線電荷を導入すればよい。ただし、 z^* は z の共役複素数を表す。従って、ポテンシャルは、

$$\begin{aligned}\psi(z) &= \sum_{\beta} \frac{\Gamma_{\beta}}{2\pi} \ln|z - z_{\beta}| - \sum_{\beta} \frac{\Gamma_{\beta}}{2\pi} \left[\ln \left| z - \frac{R^2}{z_{\beta}^*} \right| + \ln \left| \frac{z_{\beta}}{R} \right| \right] \\ &= \sum_{\beta} \frac{\Gamma_{\beta}}{2\pi} \left[\ln \left| \frac{z}{z_{\beta}} - 1 \right| - \ln \left| \frac{z}{R} - \frac{R}{z_{\beta}^*} \right| \right]\end{aligned}\quad (4.18)$$

と表される。ただし、 $|z| \leq R$ である。右辺第一項は円筒中に存在する線電荷による項で、第二項は鏡像電荷の項である。

実際の閉じ込め装置では、軸方向への閉じ込めポテンシャルにより不可避免的に電場の動径方向成分が発生する。従って、線電荷の運動方程式はこの閉じ込め電場による回転の効果 $\Omega^{ext}(r)$ を外力として加えて、

$$\frac{dz_{\alpha}}{dt} = j \left[\frac{dw(z_{\alpha})}{dz_{\alpha}} \right]^* + j \left\{ \frac{d}{dz_{\alpha}} \left(\frac{\Omega^{ext}}{2} z_{\alpha}^2 \right) \right\}\quad (4.19)$$

となる。ただし、実効ポテンシャル $w(z)$ は式 (4.18) より、

$$w(z) = \sum_{\beta} \frac{\Gamma_{\beta}}{2\pi} \left\{ \ln \left(\frac{z}{z_{\beta}} - 1 \right) - \ln \left(\frac{z}{R} - \frac{R}{z_{\beta}^*} \right) \right\}\quad (4.20)$$

であり、

$$\frac{dw(z_{\alpha})}{dz_{\alpha}} = \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{\Gamma_{\beta}}{2\pi} \frac{1}{z - z_{\beta}} - \sum_{\beta} \frac{\Gamma_{\beta}}{2\pi} \frac{1}{z - R^2/z_{\beta}^*}\quad (4.21)$$

となる。この様に、円筒導体中に置かれた線電荷の運動は、自分以外の線電荷が作るポテンシャルと自分も含め壁に誘起した鏡像電荷のポテンシャル、さらに閉じ込めのための真空場のポテンシャルにより決定される。

4.3 1本の渦糸の運動 [11]

それでは、前節で導出した運動方程式から予測される渦糸の運動と電子プラズマの渦糸の運動を比較する。一番簡単な場合として渦糸が1本だけの場合を考える。まず、渦糸の運動方程式からその運動を予測しよう。この場合、運動方程式は

$$\frac{dz_{\alpha}}{dt} = -j \frac{\Gamma_{\alpha}}{2\pi} \frac{1}{z_{\alpha}^* - R^2/z_{\alpha}} + j \Omega^{ext}(|z_{\alpha}|) z_{\alpha}\quad (4.22)$$

となる。ここで、解を $z_{\alpha} = r \exp(j\omega t)$ とおくと、

$$\omega = \frac{\Gamma_{\alpha}}{2\pi} \frac{1}{R^2 - r^2} + \Omega^{ext}(r)\quad (4.23)$$

即ち、円筒の中心軸から距離 r だけ外れた1本の渦糸は一定の角速度 ω で半径が r の円運動を行う。この運動は電磁気学的には、鏡像電荷が作る半径方向電場と外場による $E \times B$ ドリフトにより駆動される、と考えることが出来る。図 4.1 (a) に、この運動の模式図を示す。外場による回転

を無視して、鏡像電荷による回転のみを考えると、式 (4.23) から、その角速度は電荷密度に比例し、壁に近づくと急激に速くなることがわかる。角速度の Γ , r 依存性を図 4.1 (b), (c) に横軸に示す。

つぎに、実際に観測された電子プラズマの渦糸の運動を示す。電子数 $N_H = 4.5 \times 10^7$ の電子プラズマの渦糸を $t = 10 \mu\text{s}$ にカソード H から閉じ込め領域に導入した場合の運動を図 4.2 に示す。図 4.2 (a) は CCD カメラにより $10 \mu\text{s}$ 毎に観測した電子密度分布を重ね合わせたものであり、図 4.2 (a) と同じ物である。磁場は紙面に垂直で、手前から奥向きである。 x 軸は紙面上では水平右向き、 y 軸は垂直下向き、 z 軸は磁場の方向を向く。渦糸が時計方向に円運動をしていることが分かる。図 4.2 (b) に渦糸の x, y 座標を時間の関数として示す。記号は画像計測から得られた渦糸の座標であり、実線と破線はそれぞれのデータに三角関数でフィッティングを行った結果である。渦糸は半径 $r_0 = 8.2 \text{ mm}$ 、回転の周波数 $\omega/2\pi = 9.9 \text{ kHz}$ で右回りに等速円運動していることが確認出来る。

式 (4.23) に実験パラメータを代入すると、回転速度は電子数に対して

$$\omega = \frac{eN}{2\pi\epsilon_0 B_0 L R^2 (1 - r_0^2/R^2)} + \Omega^{ext} = \frac{2.66}{1 - r_0^2/R^2} \times 10^{-4} \times N + \Omega^{ext} \text{ (rad/s)} \quad (4.23)$$

の割合で増加することが予想される。渦糸の初期位置を $r_0 = 4.44 \text{ mm}$ に固定した場合の回転速度の変化を電子数の関数として図 4.3 に示す。プラグ電圧 $V_{plug} = -60 \text{ V}$ である。記号は実験で計測した値を表す。電子数の増加にともない回転速度も増加することがわかる。実線は外場による回転速度 Ω^{ext} をフリーパラメータとして、各データに式 (4.24) で表される直線をフィッティングした結果である。実験で観測された回転速度の増加の割合は、理論的な予測値と良く一致することが確認出来る。

電子数ゼロの渦糸の回転速度は $\omega = \Omega^{ext}$ となり外場による回転の効果であらわす。即ち、図 4.3 の実線を $N = 0$ に外挿するとことにより、外場の回転の効果の評価することが出来る。ここから外場による回転速度 Ω^{ext} はおよそ 10^5 rad/s であり鏡像電荷による回転速度より一桁程度大きいことが分かる。従ってこの場合、渦糸の回転運動を駆動する力の大半が外場によるものであり、鏡像電荷の運動に与える外場の影響は非常に大きいと言える。

ここで、外場による回転速度を評価しておく。Trap 中の外場の分布は Laplace 方程式 $\nabla^2 \phi = 0$ から評価することが出来る (図 2.2)。外場による回転は、電子が磁力線に添って閉じ込め領域を回往復する間に電場 E_r^{ext} によって回転する角度 $\Delta\theta$ を往復にかかる時間 Δt で平均することにより評価出来る [11]。入射時に電子がもつエネルギー W_0 とするとエネルギー保存則から、

$$W_0 = \frac{1}{2} m_e v_z^2 - e\phi^{ext}(r, z) \quad (4.24)$$

となる。従って、電子の軸方向速度 v_z は外場 (位置) の関数として次のように与えられる。

$$v_z = \left(\frac{2}{m}\right)^{1/2} [W_0 + e\phi^{ext}(r, z)]^{1/2} \quad (4.25)$$

一方、外場による $E \times B$ ドリフト速度は、

$$v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = \frac{E_r^{ext}}{B_0} \quad (4.26)$$

であるので、従って、電子が閉じ込め領域を一往復する間に、外場による $E \times B$ ドリフトによって回転する角度 $\Delta\theta$ は、

$$\begin{aligned}\Delta\theta &= \int_0^{\tau_b} dt \frac{E_r^{ext}}{rB_z} = 4 \int_0^{z_t} \frac{dz}{v_z} \frac{E_r^{ext}}{rB_0} \\ &= 4 \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \int_0^{z_t} dz \left[W_0 + e\phi^{ext}(r, z)\right]^{-1/2} \frac{E_r^{ext}}{rB_0}\end{aligned}\quad (4.28)$$

となる。ここで、 z_t は電子の反射点を表す。一方、一往復にかかる時間 τ_b は、

$$\tau_b = 4 \int_0^{z_t} \frac{dz}{v_z} = 4 \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \int_0^{z_t} dz \left[W_0 + e\phi^{ext}(r, z)\right]^{-1/2}\quad (4.29)$$

であるので、一往復にわたって平均化した角速度は、

$$\left\langle \frac{\Delta\theta}{\tau_b} \right\rangle = \frac{\int_0^{z_t} dz \left[W_0 + e\phi^{ext}(r, z)\right]^{-1/2} \frac{E_r^{ext}}{rB_0}}{\int_0^{z_t} dz \left[W_0 + e\phi^{ext}(r, z)\right]^{-1/2}}\quad (4.30)$$

となる。ここで、閉じ込め領域では磁場 B_0 は一様であり、電子の動径方向座標 r も一定であるので、

$$\left\langle \frac{\Delta\theta}{\tau_B} \right\rangle = \frac{1}{rB_0} \frac{\int_0^{z_t} dz \left[W_0 + e\phi^{ext}(r, z)\right]^{-1/2} E_r}{\int_0^{z_t} dz \left[W_0 + e\phi^{ext}(r, z)\right]^{-1/2}}\quad (4.31)$$

となる。ここで、プラグ電極に 1 V のバイアスをかけたときのポテンシャル分布を $\tilde{\phi}^{ext}(r, z)$ 、同じく電場分布を $\tilde{E}_r^{ext}(r, z)$ とすると、バイアス電圧 V_{plug} をかけた時のポテンシャルと電場は、

$$\phi^{ext}(r, z) = V_{plug}\tilde{\phi}^{ext}(r, z), \quad E_r^{ext}(r, z) = V_{plug}\tilde{E}_r^{ext}(r, z)\quad (4.32)$$

従って、

$$\Omega^{ext} = \left\langle \frac{\Delta\theta}{\tau_B} \right\rangle = \frac{V_{plug}}{rB_0} \frac{\int_0^{z_t} dz \left[1 + \frac{eV_{plug}}{W_0}\tilde{\phi}^{ext}(r, z)\right]^{-1/2} \tilde{E}_r^{ext}(r, z)}{\int_0^{z_t} dz \left[1 + \frac{eV_{plug}}{W_0}\tilde{\phi}^{ext}(r, z)\right]^{-1/2}}\quad (4.33)$$

となる。

図 4.4 にプラグ電圧 $V_{plug} = -1$ V, $r = 5$ mm での ϕ^{ext} , E_r^{ext} の分布を示す。ポテンシャル分布は中心付近ではゼロであるが、プラグ電極に近づく急激に減少して、 $z \approx 155$ mm で最小となったあと増加に転じる。 E_r^{ext} も同じく中心付近ではゼロであり、電極に近づくにつれ減少し $z \approx 120$ mm で最小となったあと増加する。しかし、 E_r^{ext} はその後も増加を続け、 $z \approx 130$ mm で正の値へと転じる。これは、ここを境に外場による回転の向きが反転することを表している。

図 4.5 に式 (4.33) から評価した外場による回転速度 Ω^{ext} を示す。ここではプラグ電圧 $V_{plug} = -60$ V とした。予測される角速度は $\Omega^{ext} \approx 1 \times 10^5$ rad/s であり、これは実験で観測される角速度と一致する。図 4.5 (a) に回転速度 Ω^{ext} を半径方向の位置 r の関数として示す。記号は規格化されたエネルギー W_0/eV_{plug} の違いを表し、それぞれ 0.1(○), 0.2(△), 0.4(□) である。どの場合も、 Ω^{ext} は中心から離れるにしたがい増加し、壁に近づく急激に増加する。しかし、本実験で

主としてプラズマが分布する $r < 15$ mm の領域では 10 % 程度しか変化しないので、この領域は近似的に剛体回転と見なすことができる。

図 4.5 (b) に Ω^{ext} を W_0/eV_{plug} の関数として示す。記号は動径方向距離の違いを表し、それぞれ 5(○), 10(△), 15(□)mm である。始め、 Ω^{ext} は W_0/eV_{plug} の増加にともない増加する $W_0/eV_{plug} \approx 0.3$ で最大となり減少に転じる。これは W_0/eV_{plug} が増加することにより、電子の射点 z_t が電場の符号が反転する領域 ($|z| > 130$ mm) に入るためである。このことから、外場による回転の効果を小さく抑えるためには、 W_0/eV_{plug} を小さくする、即ちポテンシャル障壁を高く電子の加速電圧を低く抑える必要があることが分かる。

実際に電子プラズマ導入時の加速電圧 V_k を変化させることによりその初期エネルギーを変化させて回転速度を計測した結果を図 4.6 (a) に示す。プラグ電圧は $V_{plug} = -80$ V であり、電子数 $N = 1.4 \times 10^7$ 個である。観測される回転速度の中には鏡像電荷により駆動される成分も含まれるが、前述の評価よりこの成分は外場による回転の効果よりも十分に小さいのでここでは無視す記号は回転数の計測値を表す。ここでは渦糸の回転運動により誘起されるプローブ信号(図 3.4 参照)の最初の 10 周期の平均値から回転速度を評価した。実線は式 (4.33) からの計算値を表両者は良く一致し、実験においても高い加速電圧で回転速度が減少する現象が観測される。この結果から、外場からの回転速度の評価法が妥当な手法であることが確かめられる。

図 4.6 (b) には渦糸の回転速度の時間変化を示す。閉じ込めポテンシャル、電子数は (a) の場と同じで、それぞれ $V_{plug} = -80$ V, $N = 1.4 \times 10^7$ 個である。渦糸の回転速度はプローブ計により非破壊的に計測することが可能なので、その時間変化を容易に計測することが出来る。号は加速電圧の違いを表し、それぞれ $V_k = 13$ (●), 31 (▲)V である。回転速度は時間の経過にもない急激に減少していく事がわかる。これは初期に電子がもっていた磁場に平行方向のエネルギー(入射エネルギー)が、電子間の Coulomb 衝突等の緩和過程を経て垂直な方向に分配され、行方向のエネルギーが減少することに起因すると考えられる。

ここまでは、電子プラズマの大きさを無視して渦糸として扱ってきた。しかし現実には電子プラズマは非常に細いが有限の断面積を持っている。この装置で作られる電子プラズマの典型的分布を図 4.7 に示す。電子プラズマの重心を原点として方位角方向に平均化した密度の動径分布を図 4.7 (a) に示す。白丸はデータ点を表す。第 2 章で述べたように、画像計測システムの間分解能は 0.15 mm であり、プラズマの拡がりはその数倍程度である。密度は半径方向に単調減少する分布をもつ。実線は Gauss 関数によるフィッティングの結果を表す。この場合、最大密度 $n_0 = 2.1 \times 10^{14} \text{ m}^{-3}$, $1/e$ 半径 $r_{1/e} = 0.5$ mm となる。

プラズマは図 4.2 (a) に示したように z 軸を中心に回転運動(公転)をしているが、プラズマ自身もその自己場により有限の速度で回転(自転)をする。図 4.7 (b) に上述の Gauss 関数によるフィッティング結果をもちいて評価した E_r と ω を渦糸の中心からの距離の関数として示す。回転の周数は渦糸の中心で $\omega/2\pi = 6.4$ MHz であり、公転運動の回転速度に比べ 2 桁程速い。即ち、プラズマの渦糸はそれ自身が数 MHz 程度で高速に自転しつつ、10 kHz 程度でゆっくりと公転運動行なう。

さて、観測された電子の渦糸の運動は、中性流体の渦糸の運動方程式から予測される運動と良

一致する。これは、二次元 Euler 流体との等価性が良く成立していることを表している。最後に、実験の再現性の精度と二次元 Euler 流体との等価性について保存量の立場から検証する。図 4.8 (a) に渦糸の電子数 (○) と公転運動の半径 (●) の時間変化を示す。いずれも初期値で規格化してある。まず、電子数の変化に注目する。プラズマが完全に捕捉されていれば電子の流入も損失もないので電子数は保存される。これは二次元 Euler 流体においては循環の保存則に相当する。一方、画像計測では計測の度にプラズマの生成、保持、破壊を繰り返すので、電子数のばらつきは巨視的な再現性を表す指標となる。図 4.8 (a) より電子数は若干のばらつきがあるもののほぼ一定の値であり、実験が精度良く再現されていることを示している。次に、渦糸の回転運動の半径に注目する。いま、電子数は良く保存されており、またプラズマの分布は回転の半径に比べて十分に細いので、回転の半径の変化はプラズマの角運動量の変化を表す。電子プラズマにおいて角運動量は堅固な保存量であり、これは渦糸における慣性モーメントの保存則に相当する。図 4.8 (a) より慣性モーメント (角運動量) は若干のばらつきがあるものの良く保存されることが確かめられる。

つぎにプラズマの形状の変化に注目する。図 4.8 (b) に渦糸の電子密度の最大値 (○) と密度分布の半値半径 (●) の時間変化を示す。いずれも初期値で規格化してある。どちらも 1 ms 程度までは殆ど一定であるが、その後、密度の最大値は減少し半値半径は増加する。即ち、プラズマの分布は ms の時間スケールで鈍ることを表している。一方、二次元 Euler 流体では、渦度の大きさは変化せず、また渦度の存在する領域の面積も変化しない¹。従って以上の結果は、ms 程度の時間スケールまでは電子プラズマ渦と二次元 Euler 流体渦との等価性が良く成立しているが、それ以上の時間スケールではこの等価性が破綻していることを示唆している。ms という時間スケールは、第 2 章で評価した電子間の Coulomb 衝突の時間と同じオーダーであり、この破綻の原因は電子間の Coulomb 衝突による粘性の発生が原因と考えられる。

4.4 真空中の 2 本の渦糸の運動

この節では、2 本の渦糸の運動について検討する。真空中に導入された 2 本の電子プラズマの渦糸の運動を図 4.9 に示す。2 本の渦糸の電子数はほぼ等しく、それぞれ $N_1 = 1.2 \times 10^7$, $N_2 = 1.1 \times 10^7$ である。プラグ電位は $V_{plug} = -30$ V で電子の加速電圧は $V_k = 15$ V である。比較的初期の時間には 2 本の渦糸がその距離を保ち、全体としてドリフトしながら時計方向に回転運動を行う様子が観測される。捕捉時間が数 ms のオーダーを越えると渦糸の半径は拡がり徐々に渦糸間の距離を縮め、最終的にはこの二つの渦糸は合体してひとつの渦となる。前述のように ms より長いオーダーの現象では二次元 Euler 流体との近似が成立しなくなる。まずは、これよりも速い時間帯の現象に注目する。また実験の再現性から、画像計測により渦糸の運動を正確に追跡出来るのは 200 μ s 程度までであるので、ここでは 150 μ s までの時間帯で、電子プラズマの渦糸の運動を二次元 Euler 流体の渦糸の運動と比較する。

図 4.10 (a) に渦糸系の重心の軌道を示す。記号は観測された軌道を表し、実線と破線は実験値に対する三角関数によるフィッティングの結果を表す。ここから、重心は半径 $r_g = 1.5$ mm, 周

¹力学系のリウビル定理に相当する。

波数 $\omega_g/2\pi = 10.6$ kHz で時計方向に等速円運動を行なうことがわかる。前述の渦糸全体のフト運動はこの重心の運動を表している。図 4.10 (b), (c) に 2 本の渦糸の重心周りの運動の軌道 $(x_n - g_x, y_n - g_y)$ を示す。ここで、 (x_n, y_n) はそれぞれの渦糸の中心の座標である。やはり、記号は実験値を表し、実線と破線は三角関数によるフィッティングの結果を表している。それぞれ半径 $r_1 = 4.8$, $r_2 = 5.6$ mm, 周波数 17.5 kHz で重心の周りを時計方向に円運動を行なう。円境界内に渦糸が 2 本ある場合には、中心軸の周りで重心が円運動を行い、さらにその周りの渦糸が円運動を行なう。

次に、渦糸の運動方程式からその運動を検討しよう。渦糸が 2 本存在するので、渦糸の運動は自分自身の鏡像電荷が作る速度場と、他方の渦糸とその鏡像電荷が作る速度場、そして閉じ込め電場のための外場の合計四つの速度場の影響を受ける。従って、運動方程式 (4.11) を解析的に解くことは困難になる。ここでは初期値として観測により得られた渦糸の循環 (電子数) と位置を与えて式 (4.11) を 4 次の Runge-Kutta-Gill 法を用いて数値的に解くことにより、渦糸の軌道を予測する。

前節で示したように、渦糸が 1 本の場合には、その運動に外場が大きく影響した。ここでは、渦糸が 2 本ある場合に、その運動に対して外場がどの程度の影響を及ぼすかを評価して外場ゼロ ($\Omega^{ext} = 0$) とした場合 (実線) と、式 (4.33) から評価した Ω^{ext} を導入した場合 (破線) の渦糸の運動の軌道を図 4.11 に示す。渦糸の電子数、初期位置には前述の実験値を用い、外場による回転の速度は $eV_{plug}/W_0 = V_{plug}/V_k = 30/15$ を用いて評価した。図 4.11 (a) に渦糸の重心の軌道を示す。外場ゼロとした場合には外場による回転を導入した場合に比べ重心の回転速度は遅く約 1/7 程度となる。一方、図 4.11 (b) に示す渦糸の軌道についても、外場による回転を導入しなかった場合には導入した場合に比べ回転速度は遅くなるが、その程度は約 1/2 である。従って、渦糸が 2 本ある場合には渦糸が 1 本の場合に比べ、渦糸の運動に対する外場の影響は小さくなる。これは渦糸間の相互作用は $1/r$ で減少するためである。以上の結果より、渦糸が複数ある場合に外場が渦糸の運動に与える影響は相対的に小さくなるが、その影響を無視することは出来ず、その運動を正確に評価するためには外場による回転の効果 Ω^{ext} を正確に評価する必要があることがわかる。

ここで、 $V_{plug}/V_k = 30/15$ として計算した Ω^{ext} を用いて渦糸の運動方程式から評価された重心運動の周波数は 9.1 kHz であり、観測された重心運動の周波数 10.6 kHz に比べ 10 % 程度小さい値となる。これは無視出来るほど小さな誤差ではない。そこで、外場の効果として重心の回転速度の実験値と予測値が同じになるような回転 $\Omega^{ext}(r)$ を与えることとする。ただし、全く任意に与えるわけではなく、式 (4.33) において閉じ込め電圧 V_{plug} を固定して加速電圧 V_k を調整することにより $\Omega^{ext}(r)$ を決定する。このケースでは、 $V_k = 8$ V で重心運動の実験値と予測値が一致し、これは実験値よりも低めではあるが的外れな値ではないと考える。

このような手法で予測した渦糸の軌道と実験的に観測された渦糸の軌道を図 4.12 に示す。上ら重心、2 本の渦糸の軌道であり、記号は実験値を実線と破線は予測値を表す。ここでは、重心運動の予測値と計測値が一致するように $\Omega^{ext}(r)$ を与えているので、当たり前であるが重心については実験値と予測値は良く一致する。一方、図 4.12 (b), (c) から渦糸の運動についても、実験値と予測値が良く一致することがわかる。以上の結果から、外場の効果を補正すれば電子の渦糸が

本ある場合も、その運動は渦糸の運動方程式で良く記述出来ることがわかる。

つぎに、長い時間スケールでの渦糸の運動に注目する。図 4.9 に示すように、二本の電子の渦糸は時間の経過に伴いその面積を広げ、逆に渦間の距離を縮めていき、最後には合体して一つの渦となる。

まず、二つの渦糸間の距離 $d(\circ)$ と渦糸の $1/e$ 半径 $r_{1/e}(\bullet)$ の平均値の時間変化を図 4.13 (a) に示す。渦糸の半径 $r_{1/e}$ は 1 ms まではほぼ一定であるが、そこから増加を始め合体前の 600 ms には渦糸入射直後の半径の約 4 倍まで広がる。これは渦糸が一本の場合と同様の傾向であり、電子間の Coulomb 衝突に起因する緩和現象と考えられる。従って、1 ms 程度の時間スケールでは二次元 Euler 流体との等価性が成立しており、それまでは電子の渦糸を二次元 Euler 流体の渦糸で良く近似出来ると考えられる。一方、渦糸間の距離 d は 100 ms 程度まではほぼ一定であるが、その後急激に縮まり 800 ms で合体する。この時間スケールは渦糸が重心周りに行なう公転周期の 10^5 倍であり、渦糸の運動は極めて長時間にわたり安定であると言える。

渦糸間の距離が近づく現象は渦糸の半径が広がる現象と時間スケールが二桁違い、従ってこれとは別の機構により生じると考えられる。渦間の距離の変化を保存量から検討する。図 4.13 (b) に系の電子数と慣性モーメントの変化を時間の関数として示す。白丸は初期値で規格化された電子数を表し、 $\tilde{N}(t) = N(t)/N(0)$ である。電子数は数 % の範囲で一定であり、実験の再現性が高いことが確認できる。黒丸は規格化された慣性モーメント (角運動量) を表す。慣性モーメントについては電子数のバラつきによる影響を抑制するため、これを電子数 $N(t)$ で割った後に初期値で規格化した。即ち、 $\tilde{I}(t) = I(t)N(0)/I(0)N(t)$ である。慣性モーメントは $t < 100$ ms と長時間に渡り実験の再現性の範囲で一定である。この時間帯においては、渦の半径は渦間の距離に比べ十分に小さいので、慣性モーメントの変化は渦間の距離の変化を表している。2 本の渦糸が長時間に渡りその距離を保ち安定に運動を続けるのは、慣性モーメント (角運動量) という堅固な保存量が存在するためである。しかし、その後、慣性モーメントは減少をはじめ、渦間の距離も縮まっていく。慣性モーメントが減少する原因としては真空容器中の残留気体との衝突や、閉じ込めのための外場の乱れなどが考えられる。ただし、合体の直前においても慣性モーメントは初期値の 85 % 程度であり、その減少率は小さい。もし渦糸がそのままの形状で距離を減ずれば、角運動量は大幅に減少するはずである。従って、前述の渦糸半径の増加により、慣性モーメントの減少が抑制されている可能性がある。

この様に距離を縮めた渦糸は最終的には合体して一つの渦となる。最後に 2 本の渦糸の合体の過程について簡単に触れておく。渦の合体は非常に興味深い現象であり、流体力学の分野では解析的な手法 [12] や数値計算 [13]、コンピューターシミュレーション [14, 15] により盛んに研究が行われており、実際の流体渦を用いた実験も報告されている [16]。一方、非中性プラズマを用いた実験的研究もなされており、流体力学での理論的な予測と良く一致するという報告がなされている [7, 8]。これらの理論的、実験的研究によると、渦の中心間の距離が渦の直径の 1.4~1.7 倍まで近づくと合体が起きると報告されている [7, 13, 14, 15]。

我々の実験では初期には $d/2r_{1/e} \approx 10$ であり、渦糸は長時間にわたり安定した軌道を保ち合体することはない。しかし、渦間の距離が徐々に減少し、渦の半径が大きくなることにより合体が

生じる。渦が合体するためには渦が変形することが重要である。本実験でも合体前の 500 ms に渦糸が卵形に変形する様子が観測される。これは保存量の観点からは次のように考えられる。渦が合体するためには渦間の距離が縮まらなければならない。しかし、慣性モーメントが異なる保存量として存在するために、これを保ったまま距離を近づける必要があり、そのためには変形しなければならない。また、渦が変形するためには強い Shear 流が必要であり²、そのためには前述のように渦が十分に近づいている必要がある。

一方、本実験の渦が電子の塊で在ることを思い出すと次のように理解出来る。もし、渦度(密分布が真円形をしていれば、電場はその周りで対称となる。この様な電場による $E \times B$ ドリフトの速度場は渦同士を結ぶ直線に直交する方向を向く、即ち渦を系の重心の周りに回転させるためであり、渦間の距離を縮める方向に向くことはない。従って、渦が近づき合体するためには円から変形しなければならない。

4.5 3本の渦糸の運動

渦糸の本数をもう 1 本増やし、真空中に 3 本の電子の渦糸を配置した場合の運動について検討する。渦糸が 3 本になるとその配置の形状をいくつか考えることが出来る。ここでは代表的な合として、ほぼ同じ電子数(循環)をもつ渦糸を正三角形の頂点に配置した場合と、直線上に等隔に配置した場合の二つのケースについて検討する。

まず、図 4.14 に 3 本の渦糸を正三角形の頂点に配置した場合の運動を示す。渦糸の電子数はそれぞれ $N_1 = 5.6 \times 10^6$, $N_2 = 5.4 \times 10^6$, $N_3 = 5.0 \times 10^6$ であり、ほぼ等しくなっている。この合、3 本の渦糸はほぼ正三角形を保ったまま右回りに回転を続ける。このとき、電子数や配置のランスにより重心が中心軸から微妙にずれている。このため重心は中心軸に対し円運動を行ない渦糸全体が若干ドリフトする。この状態はおよそ 500 ms 程度で渦糸が合体して一つになるまで続ける。

ここでも、観測された渦糸運動の軌道と運動方程式からの予測値を初期の時間帯において比する。図 4.15 (a), (b), (c) にそれぞれ渦糸 1, 2, 3 の軌道を示す。記号は観測された渦糸の軌道を表す。3 本の渦糸はほぼ 120 度の位相を持って右回りに $\omega/2\pi = 18$ kHz で回転していることが分かる。実線と破線は渦糸の運動方程式から予測された軌道を表す。外場については 2 本の渦の場合と同様の方法で評価する。観測された渦糸の運動と運動方程式から予測される運動は良一致する。

図 4.14 に示すように渦糸の作る正三角形の構造は長時間にわたり維持され、安定な構造であることが分かる。渦糸の配列による安定性の研究には長い歴史があり [1, 2], 円筒境界の中に渦糸リング状に配置した場合には、渦糸が 7 本より少なければ安定となることが理論的に示されている [17]. これは非中性プラズマを用いた Durkin らの実験でも確認されている [9].

本実験において、渦糸がつくる正三角形がどの程度安定に保たれているかを評価する。3本の

²Shear 流中での渦の変形については第 6 章で議論する。

糸が作る形状を表すパラメータとして次の式で表されるパラメータを導入する。

$$T = 4\sqrt{3}\frac{A}{l} \quad (4.34)$$

ここで、 A は3本の渦糸が作る三角形の面積であり、 l はその三角形の辺の長さの和である。 T は正三角形で最大値1となり直線で最小値0となる三角形の形状を表す関数である。ここで T を三角形度と呼ぶことにする。三角形度 T の時間変化を図4.16(a)に示す。渦糸が合体する500msをのぞき $T \approx 1$ である。渦糸の公転運動の周期は約50 μ sであるので、その 10^4 倍の時間にわたって正三角形を保ちつづけ、非常に安定であることが分かる。

図4.16(b)に規格化された電子数 \tilde{N} (○)と渦糸の規格化された慣性モーメント \tilde{I} (●)の変化を時間の関数として示す。電子数は $\pm 10\%$ 程度のバラつきの中で一定である。慣性モーメントは100msまでは実験の再現性の中でほぼ一定であるが、それ以降では減少を始める。これは渦間の距離が減少することを表しているが、この時間帯でも三角形度は一定で有る。従って、渦糸の作る正三角形が形を保ったまま、面積を減少していくことを表している。慣性モーメントが減少する理由としては、渦糸が2本の時と同じく中性ガスとの衝突や外場の乱れが考えられる。

次に、図4.17に3本の渦糸を直線上に等間隔に配置した場合の運動を示す。渦糸の電子数はそれぞれ $N_1 = 5.9 \times 10^6$ 、 $N_2 = 4.9 \times 10^6$ 、 $N_3 = 5.0 \times 10^6$ であり、3本ともほぼ同程度の電子数である。この場合3本の渦糸は、最初は直線を保ったまま右回りに回転するが、次第にその形を崩していく。その後、3本の渦糸はその形を定めることなく動き続けるが、時間の経過にともない次第に相互の距離を縮め、100msには合体によりその数を2本に減じ、500msでは1本となる。

図4.18(a),(b),(c)にそれぞれ渦糸1,2,3の初期の時間帯の軌道を示す。記号は観測された軌道を表し、実線と破線は運動方程式から予測された軌道を表す。この場合も観測された渦糸の運動と運動方程式から予測される運動は良く一致する。

先の場合と同様に三角形度の時間変化を図4.19(a)に示す。初期には $T = 0.06$ と小さな値であるが100 μ s程度で $T = 0.6$ まで増加し、その後は落ち着くことなく変化し続ける。初期に見られる T の増加は渦糸の配置が徐々に直線から崩れていくことを表し、100 μ s以降に見られるばら付きは渦糸のつくる形状が一定せず、つねにその形状が変わっていることを表している。理論的にもこの様な配置は不安定であることが知られている[10]。

図4.19(b)に規格化された電子数 \tilde{N} (○)と渦糸の規格化された慣性モーメント \tilde{I} (●)の変化を時間の関数として示す。電子数は $\pm 10\%$ 程度のバラつきの中で一定である。慣性モーメントも $t < 10$ msまでは実験の再現性の中でほぼ一定であるが、その後減少する。これまでのケースに比べ渦糸は不規則な運動をするが、慣性モーメントは良く保存される。

4.6 4本の渦糸の運動

最後に渦糸が4本の場合の運動について検討する。図4.20に3本の渦糸を三角形の頂点に配置し、もう1本をその三角形の重心付近に配置した場合の運動を示す。渦糸の電子数はそれぞれ、 $N_1 = 8.6 \times 10^6$ 、 $N_2 = 7.7 \times 10^6$ 、 $N_3 = 6.5 \times 10^6$ 、 $N_4 = 6.3 \times 10^6$ である。三角形を構成する3

本の渦糸の電子数はほぼ同じであるが、内側の1本の電子数はそれらに比べるとやや多くなっている。時間の経過に伴い、三角形の重心付近にあった渦糸1が次第に3本の渦糸の作る三角弁外へと排出される。それにつれて三角形は崩れ、三角形を構成していた3本の渦糸は一つの直線上に並ぶ。その後、3本の渦糸はまた三角形を形成し、その中に渦糸1が戻ってくる。この様な動きを繰り返している様子が観測される。なお、このケースでは50 msで合体により渦糸の本数3本となり、100 msには1本となる。

渦糸の軌道を図4.21に示す。記号は観測された軌道を表し、実線と破線運動方程式から予測される軌道を表す。この場合も、観測される軌道と運動方程式から予測される軌道は良く一致す。図4.22に規格化された電子数 \tilde{N} (○)と渦糸の規格化された慣性モーメント \tilde{I} (●)の変化を時間関数として示す。電子数は $\pm 10\%$ 程度のバラつきの中で一定である。慣性モーメントは500程度までは実験の再現性の中でほぼ一定である。

このケースではこれまでのケースに比べ、渦糸がよりダイナミックに運動する様子が観測される。このような場合においても、観測される渦糸の運動と運動方程式から予測される運動は良く一致し、慣性モーメントも良く保存されることが確かめられる。

4.7 真空中の渦糸の運動に関するまとめ

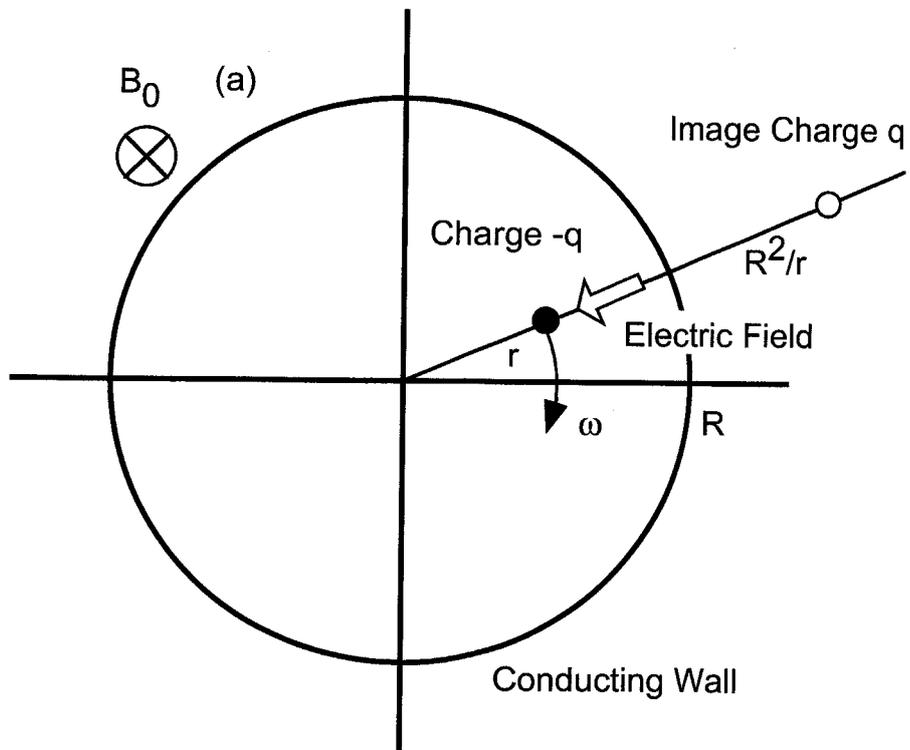
本章ではMalmberg Trapの中に1~4本の電子プラズマの渦糸を導入した場合の運動について報告した。電子の渦糸の運動方程式と二次元Euler流体の渦糸の運動方程式は同じ形をしており、ハミルトン関数を使って表すことが出来る。観測された電子の渦糸の運動と運動方程式から予測される軌道を比較した結果、両者は良く一致することを確かめた。ただし、電子プラズマを閉込めるために印加している外場には渦糸全体を回転させる効果があるため、これを適切に評価して導入する必要がある。外場が渦糸に与える回転の効果の評価方法も本章で示し、実際に観測された値と良く一致することを確認した。

電子の渦糸は1 ms程度まではその内部構造を変化させないが、これ以上の時間スケールでは渦糸の布が鈍る方向に変化する。この変化はその時間スケールから電子間のCoulomb衝突に起因して起こると考えられる。従って、本実験では1 ms以下の時間スケールにおいて電子プラズマと2次元Euler流体の等価性が良く成立している。これは渦糸運動の典型的な時間スケールの10倍以上あり、等価性は長時間に渡り成立している。

渦糸の慣性モーメントは電子プラズマ系では角運動量に相当し、系の対称性が保たれていれば堅固な保存量となる。本実験においても、Coulomb衝突の時間スケールより桁長い数百ms程度の時間スケールで一定であり、良く保存されることが確認された。

本実験装置では最大で19本の渦糸を生成することが出来るが、渦糸の本数が5本以上に増えると、実験の再現性が著しく低下し、渦糸の軌道を追跡することが困難となる。これは渦糸の本数が増えると、その運動がカオス的になることに起因する。渦糸系の運動が質点系の渦糸と相似表されることから、一般には渦糸が3本以上になるとカオス的になると言われている。今回も3本が直線上に並んだ場合や、4本の場合には比較的早い時間で再現性が悪くなり現象の追跡が困難

なった。



$$\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma_\alpha}{R^2 - r^2} + \Omega(r)$$

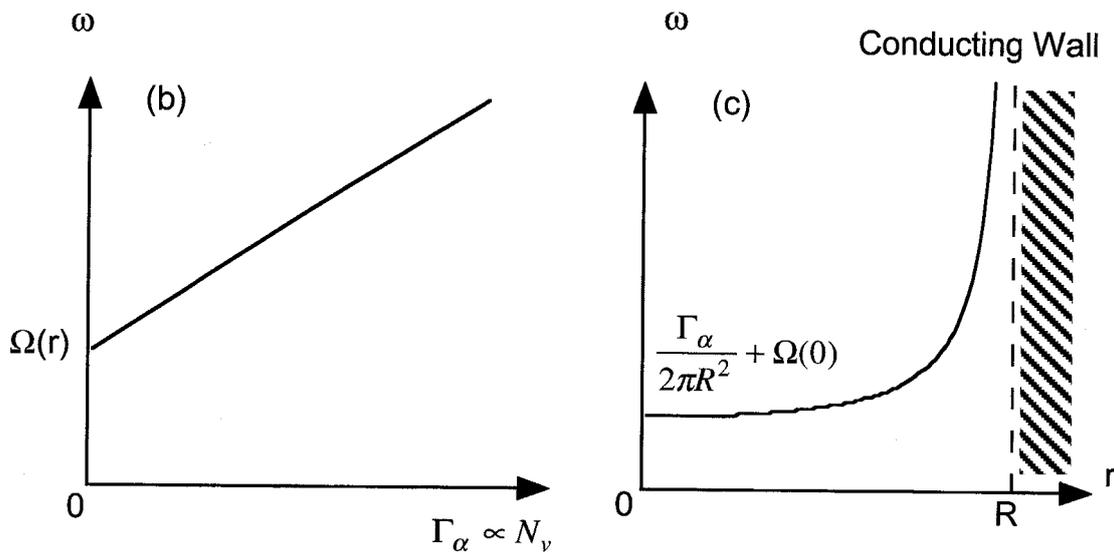


図 4.1: (a) 円筒導体の中に置かれた 1 本の渦糸の運動の模式図. (b)(c) 渦糸の回転速度の電子数半径方向距離の依存性.

(a)

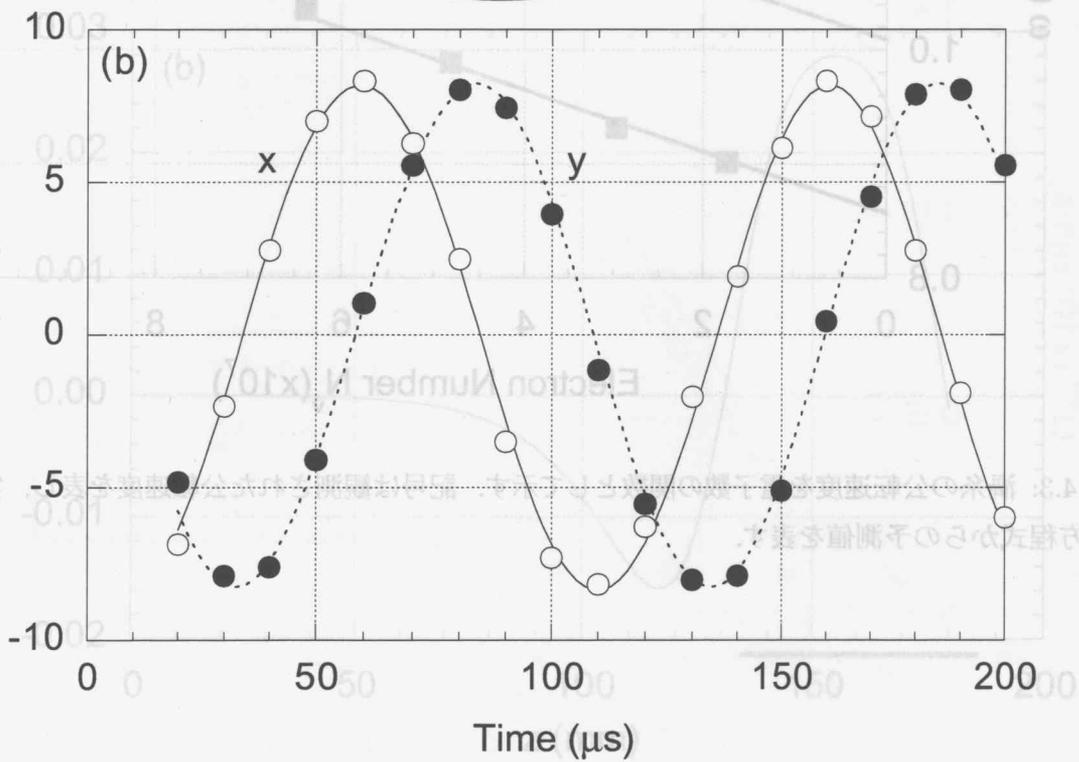
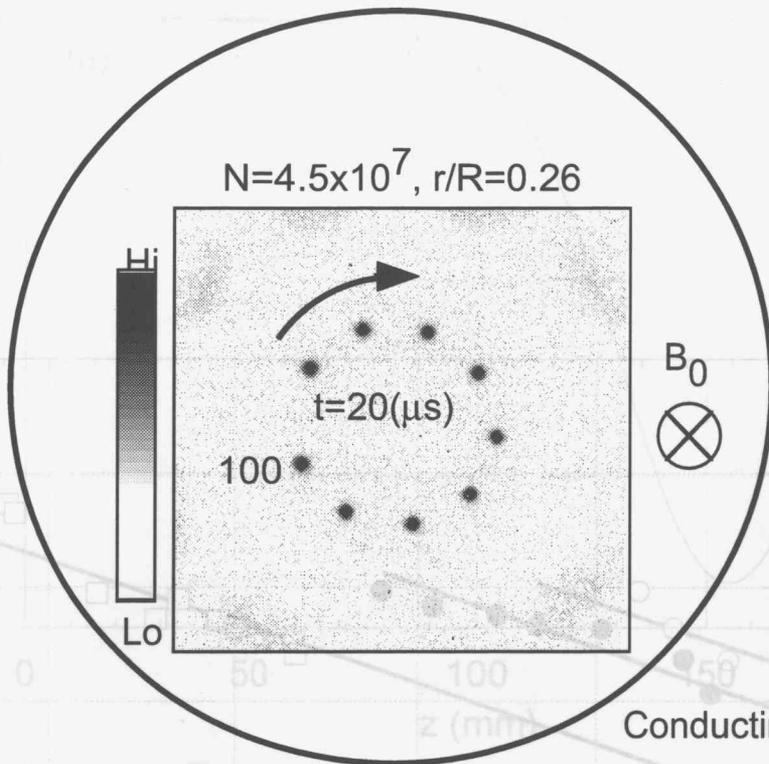


図 4.2: (a) CCD カメラにより観測された渦糸の運動。(b) 渦糸の軌道を示す。記号は観測された軌道を表し、実線と破線は三角関数によるフィッティングを表す。

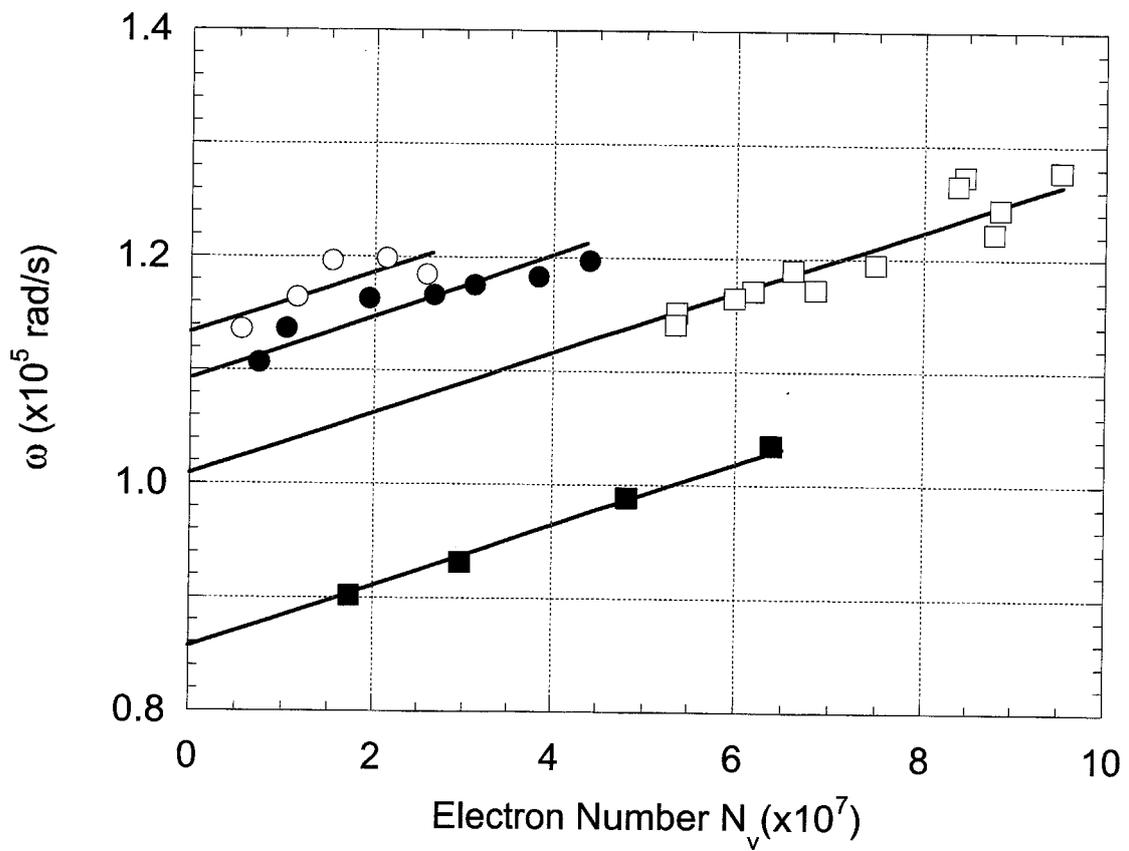


図 4.3: 渦糸の公転速度を電子数の関数として示す。記号は観測された公転速度を表し、実線は運動方程式からの予測値を表す。

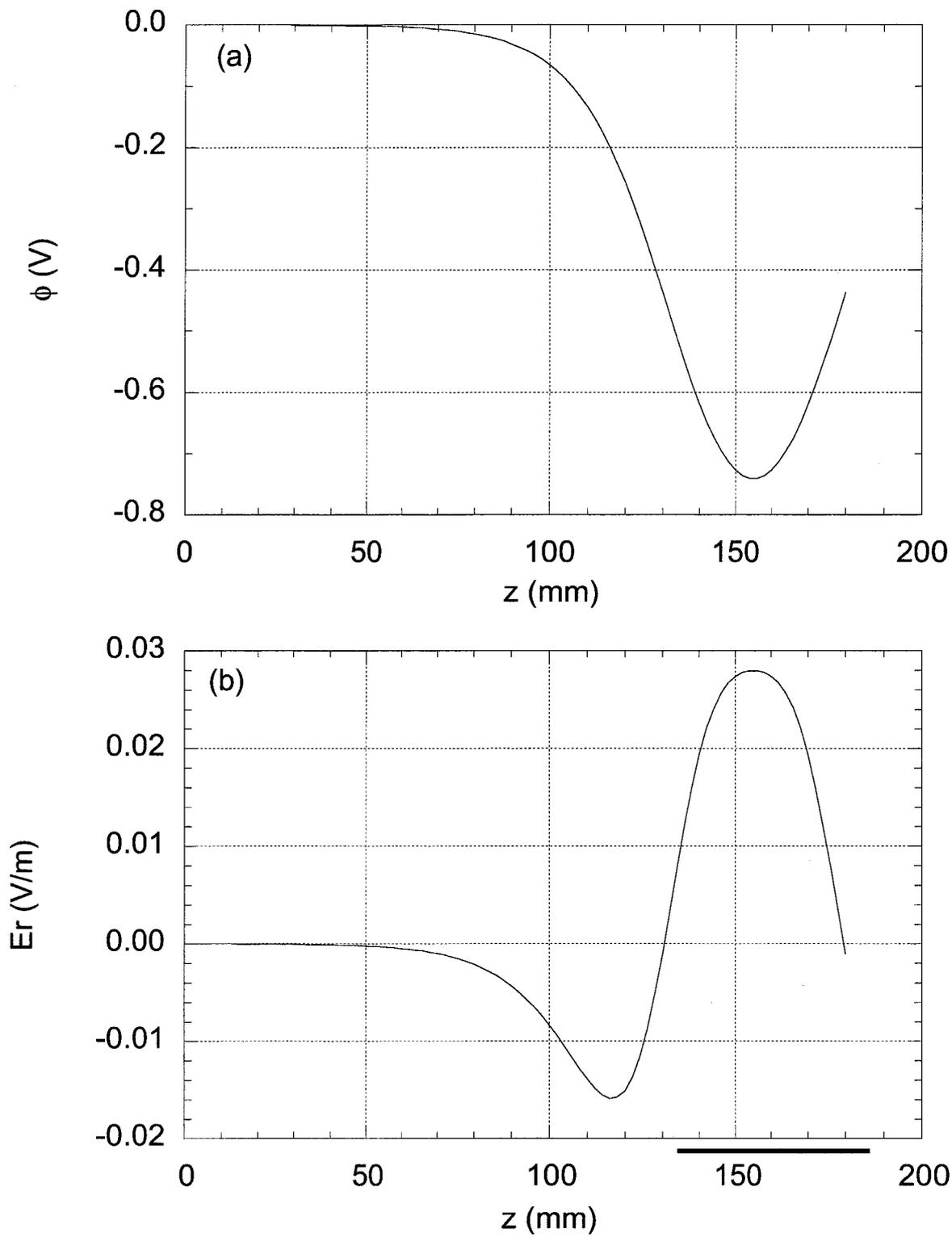


図 4.4: 実験装置の電極配位から計算した $V_{plug} = -1$ V の場合の真空場の分布. それぞれ $r = 5$ mm での電位 (a) と電場の動径方向成分 (b) を表す.

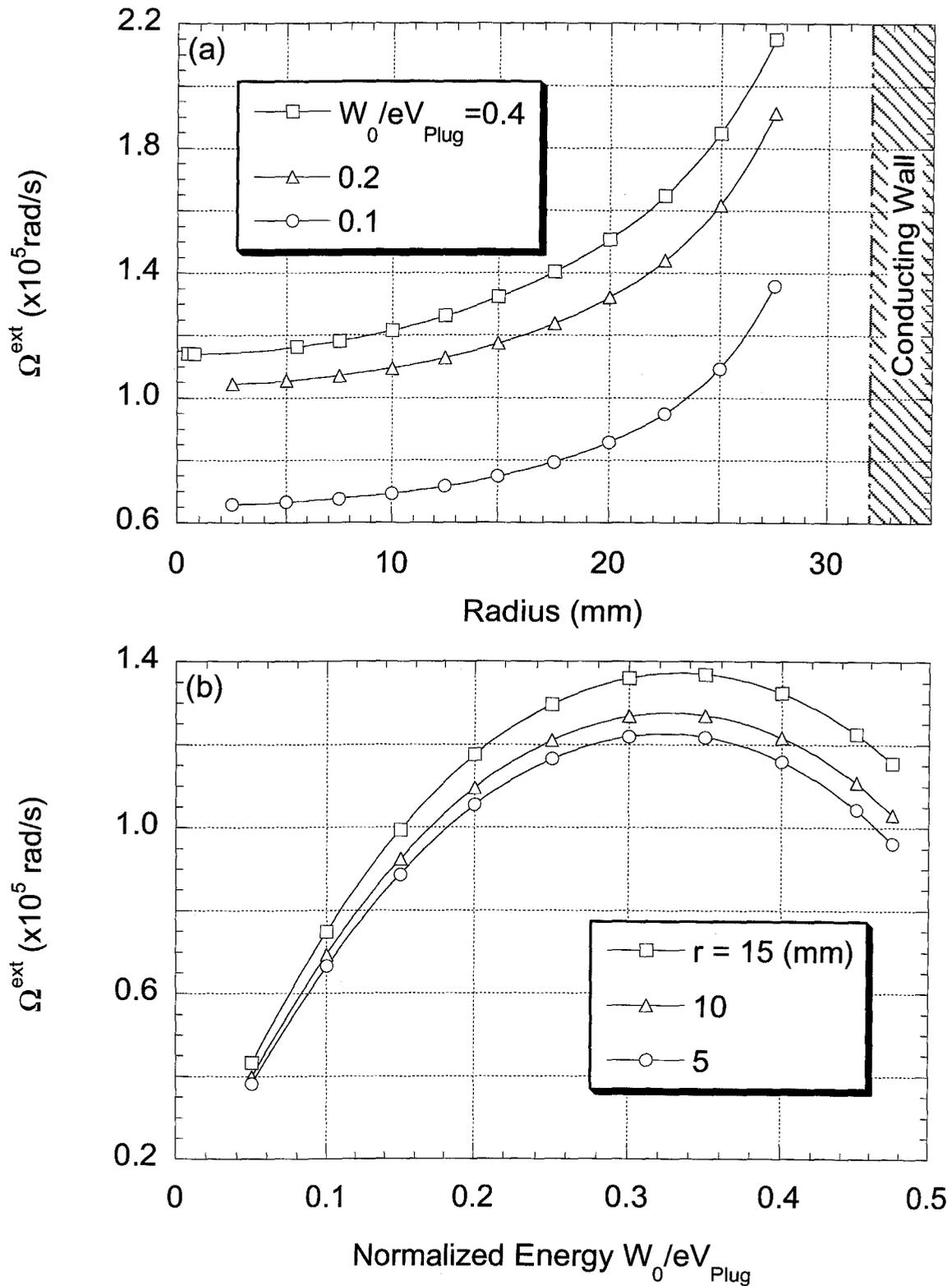


図 4.5: 真空場により駆動される渦糸の回転運動の角速度 Ω^{ext} を半径方向距離 r (a), 電子の規格化されたエネルギー W_0/eV の関数として示す. $V_{plug} = -60 \text{ V}$ として評価した.

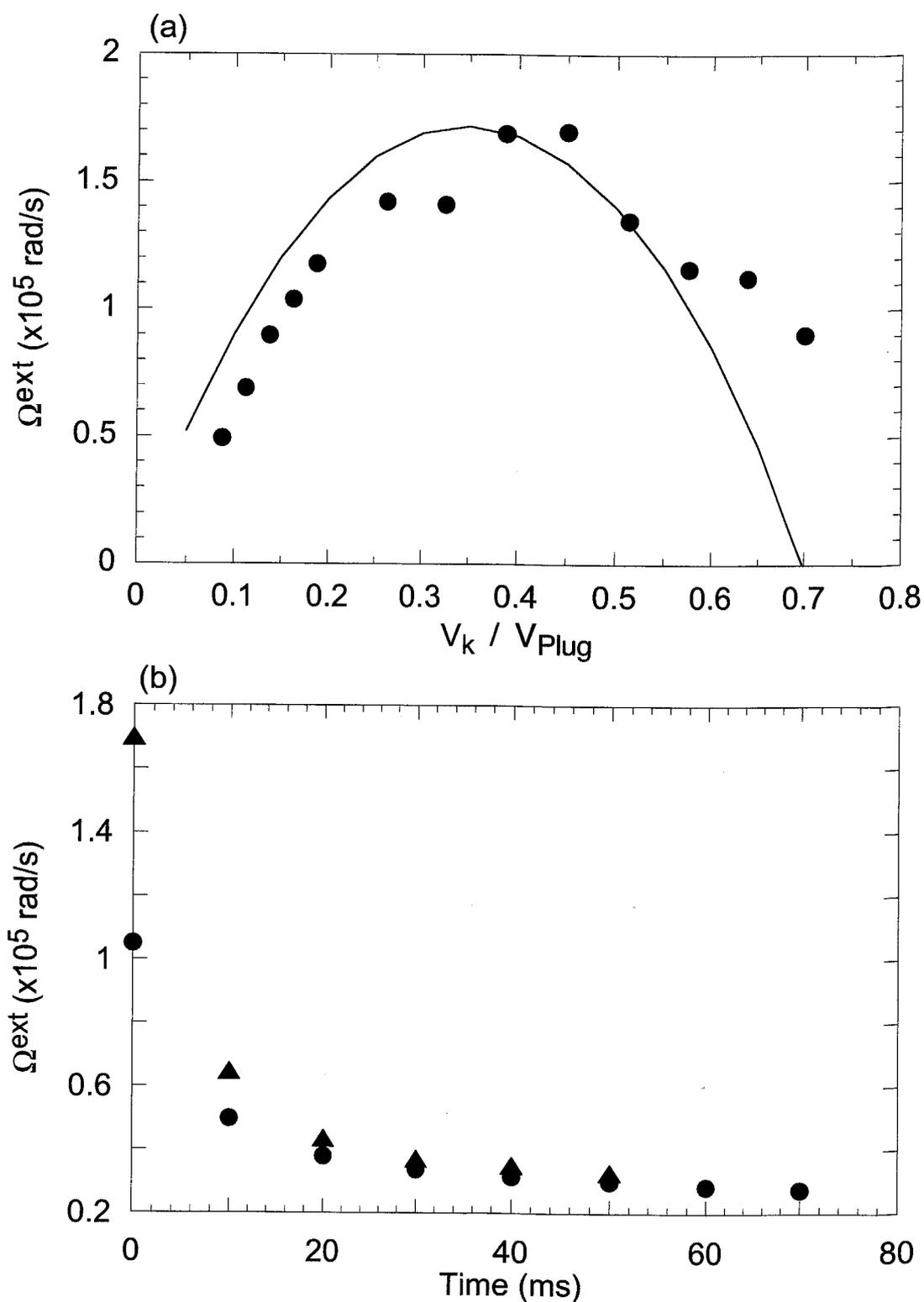


図 4.6: (a) 渦糸の回転速度の入射電圧依存性. 記号は実験値を表し, 実線は真空場の分布からの計算値を表す. (b) 実験的に観測された渦糸の回転速度の時間変化. 記号は加速電圧の違いを表し, それぞれ $V_k/V_{plug} = 0.16(\bullet)$, $0.39(\blacktriangle)$ V である. プラグ電圧 $V_{plug} = -80$ V, 渦糸の電子数 $N = 1.4 \times 10^7$, 回転の半径 $r/R = 0.28$ である.

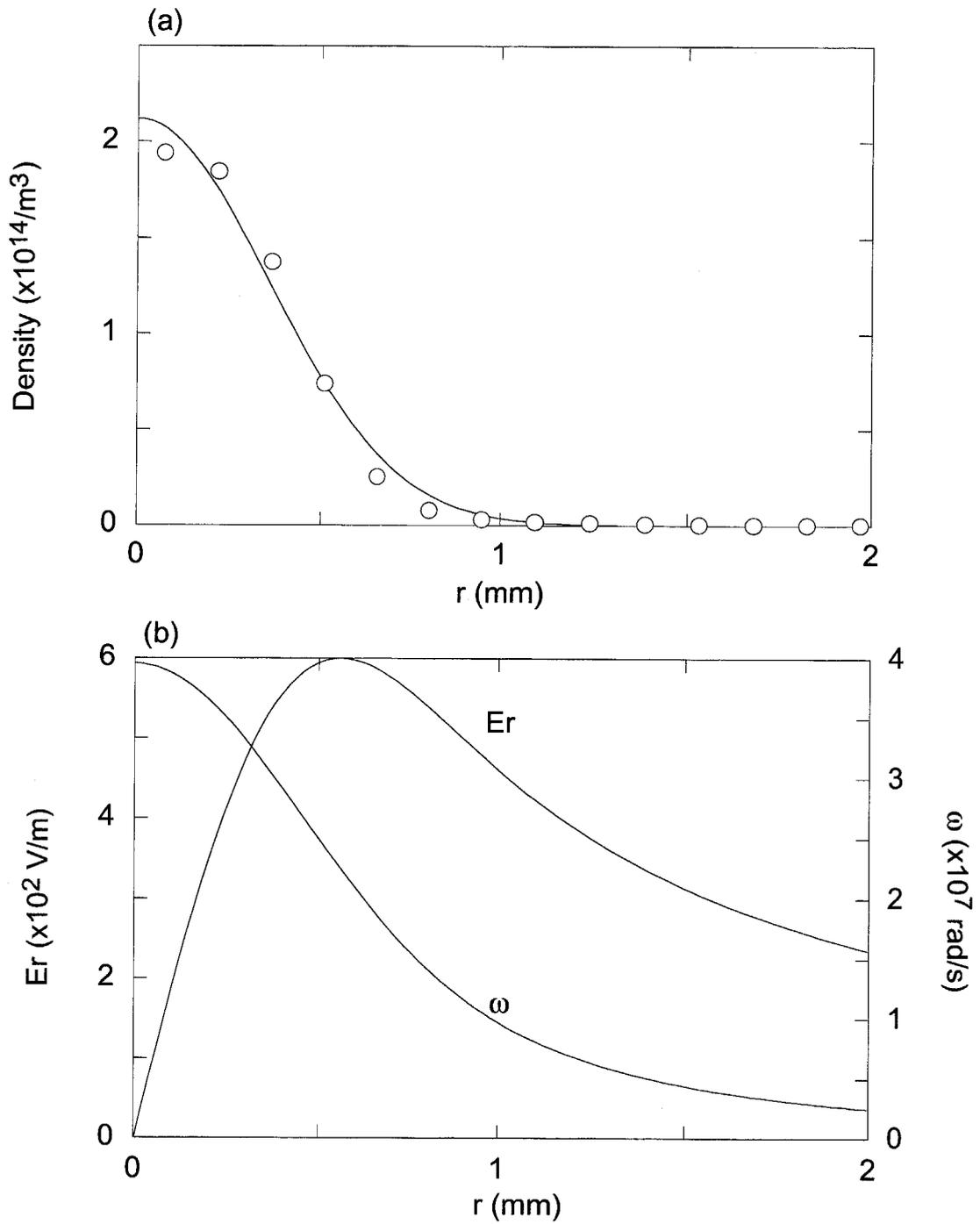


図 4.7: (a) 渦糸の典型的な密度分布. 電子数は $N = 4.5 \times 10^7$ 個. 白丸は計測値を表し, 実線は Gauss 関数によるフィッティングを表す. (b) 渦糸の作る電場と $E \times B$ ドリフトによる渦糸の自転速度の分布

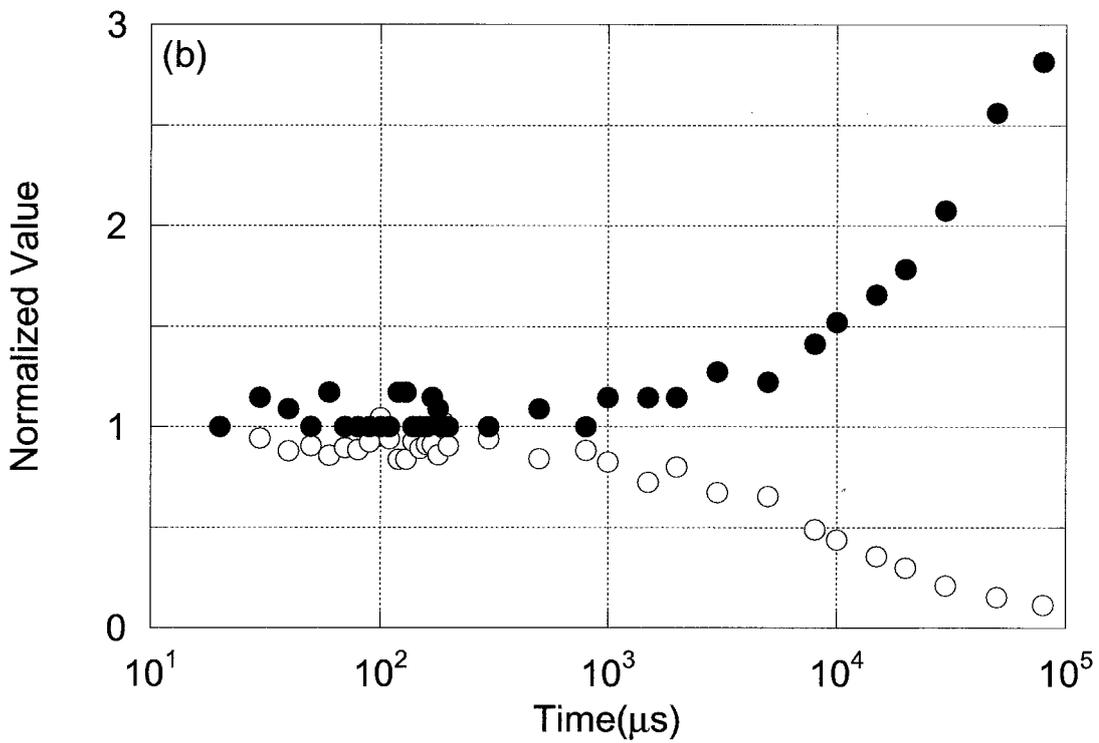
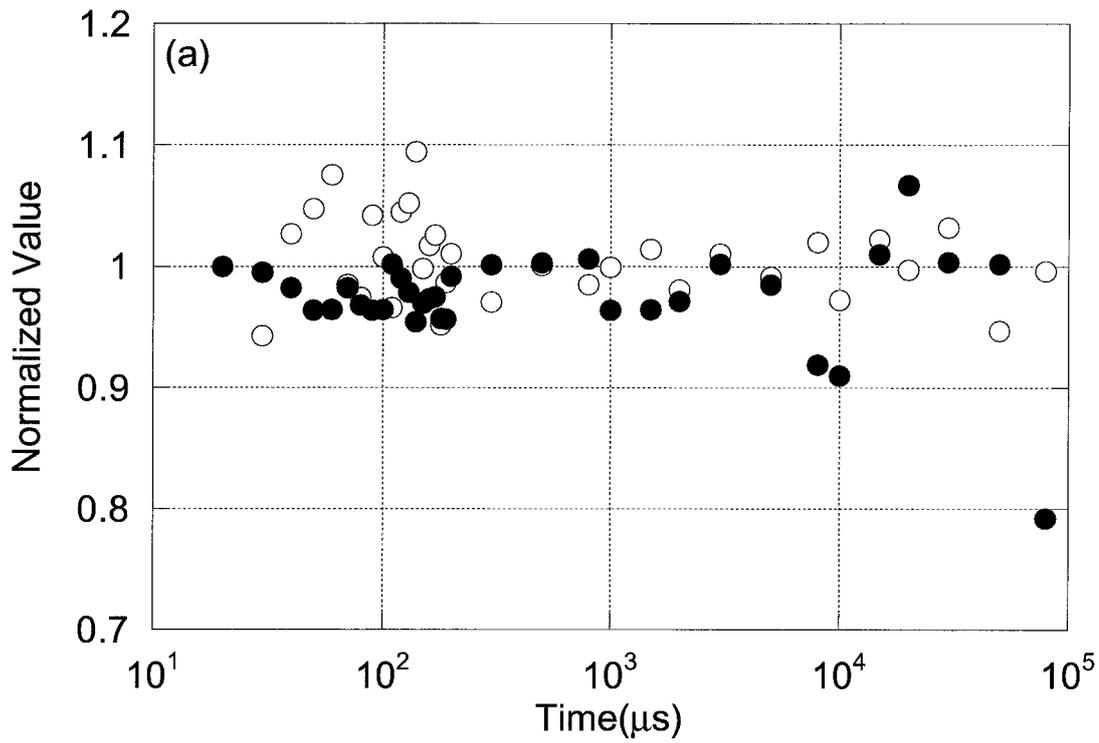


図 4.8: (a) 渦糸に含まれる電子数 (○) と円運動の半径 (●) を時間の関数として示す. (b) 電子密度の最大値 (○) と渦糸の半値半径 (●) を時間の関数として示す. いずれも初期値により規格化されている.

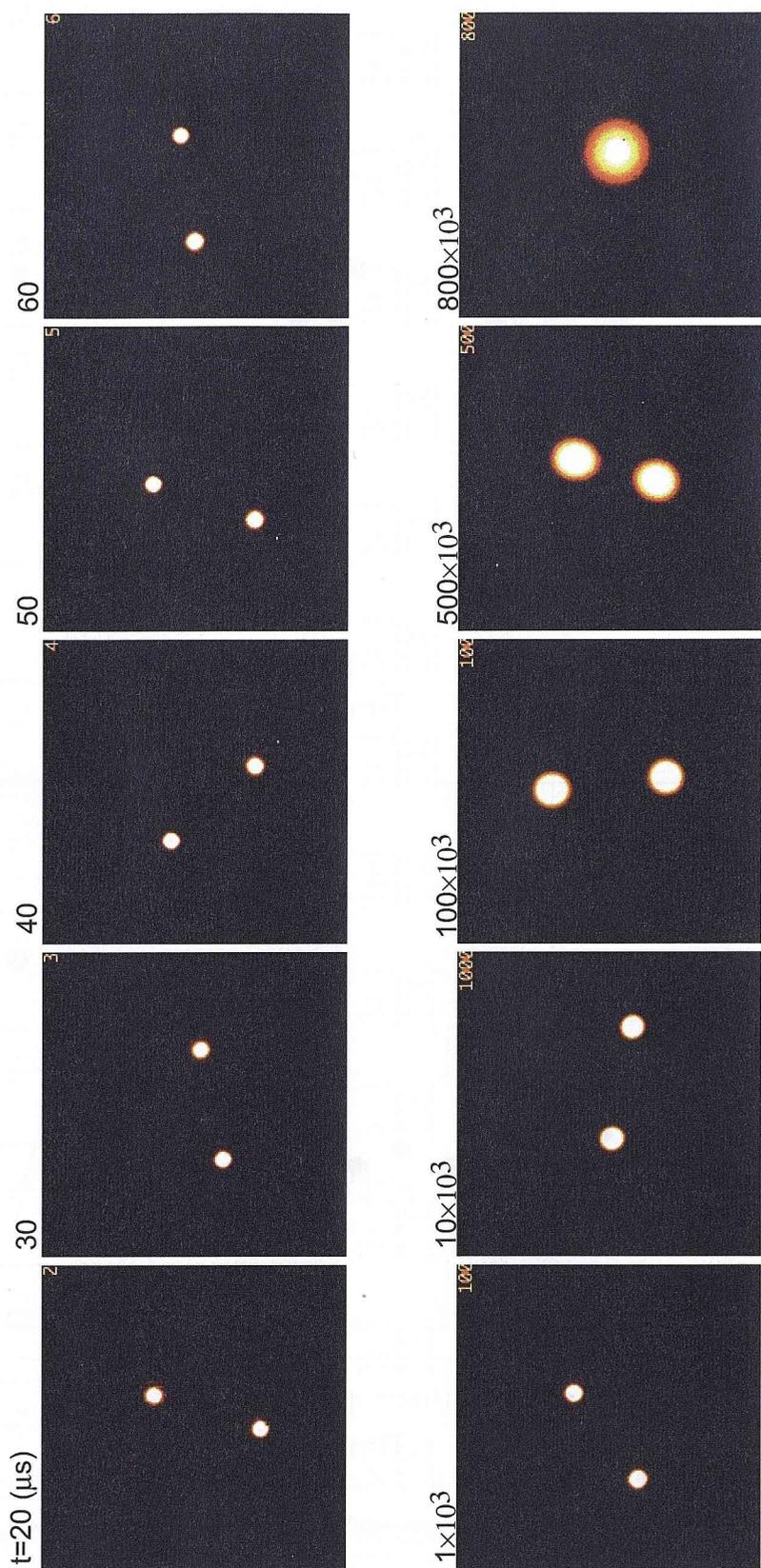


図 4.9: CCD カメラにより観測された 2 本の渦糸の運動.

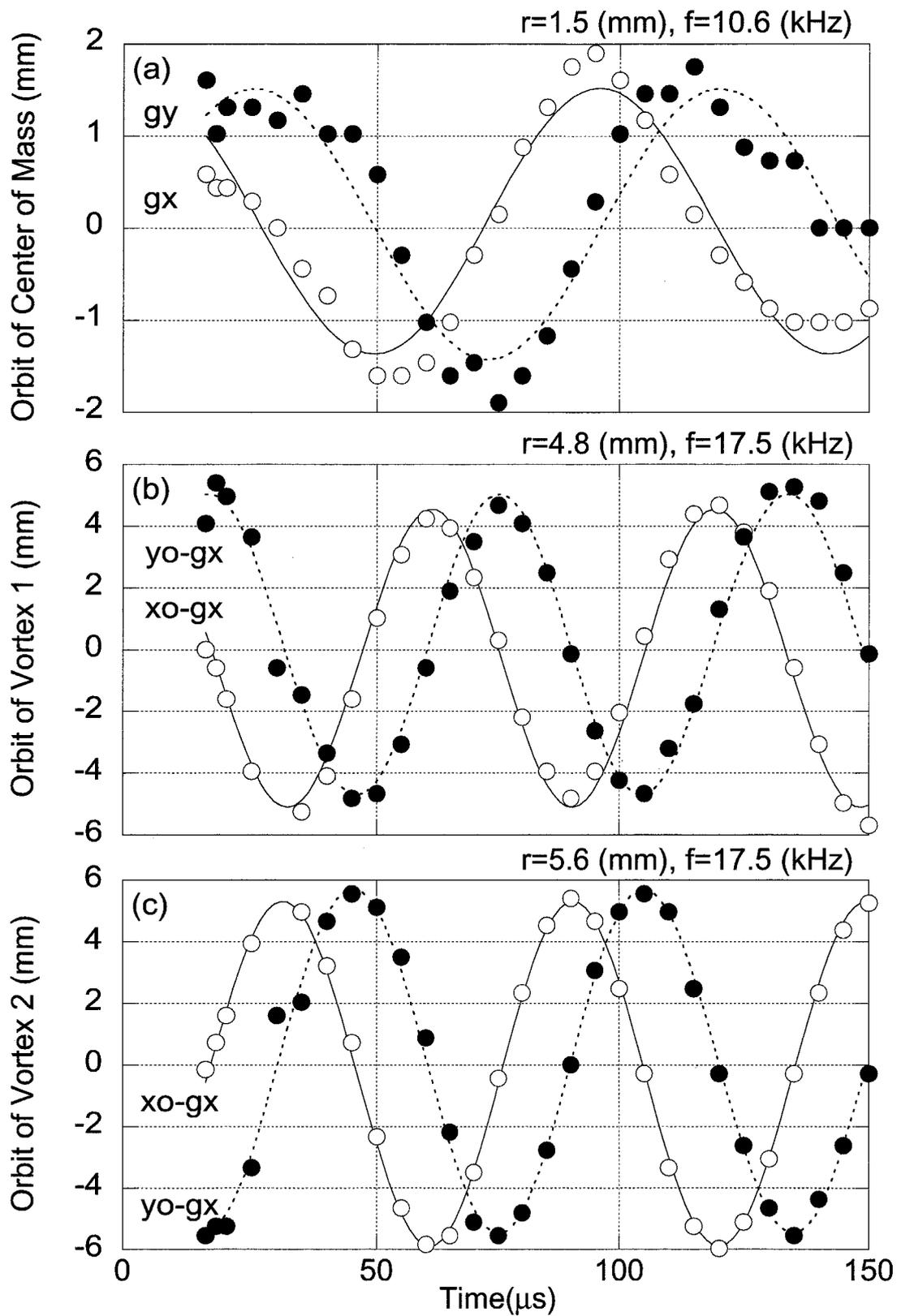


図 4.10: 真空中に 2 本の渦糸を導入した場合の軌道を示す。記号は観測された軌道表し、実線は三角関数によるフィッティング結果を表す。上から渦糸系の重心の軌道, 重心からみた 2 本の渦糸の軌道を示す。

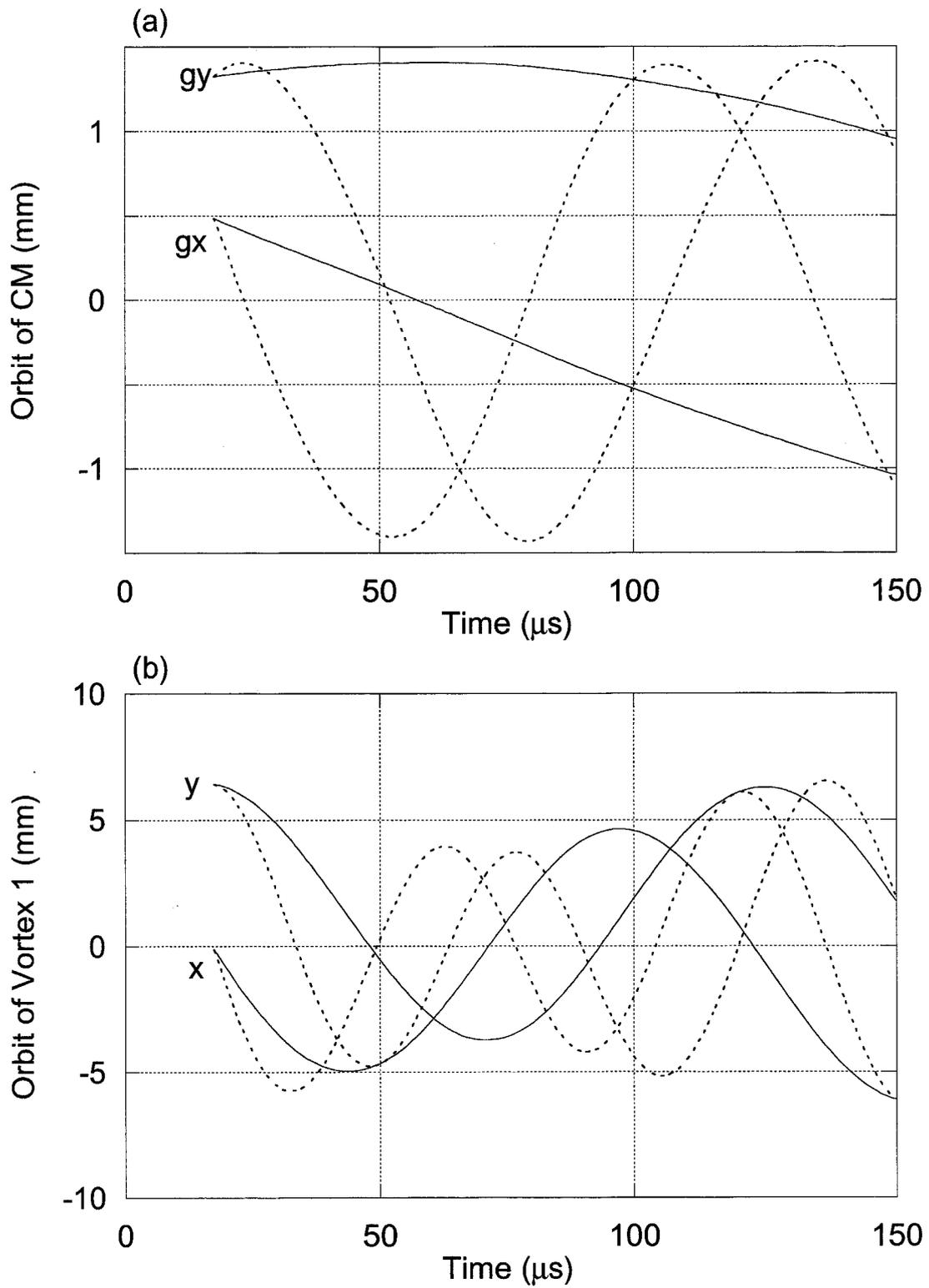


図 4.11: 渦糸の運動方程式から評価した渦糸系の重心の軌道と渦糸の軌道を示す。実線は外場による回転の効果を考慮しない場合、破線は考慮した場合の結果を表す。

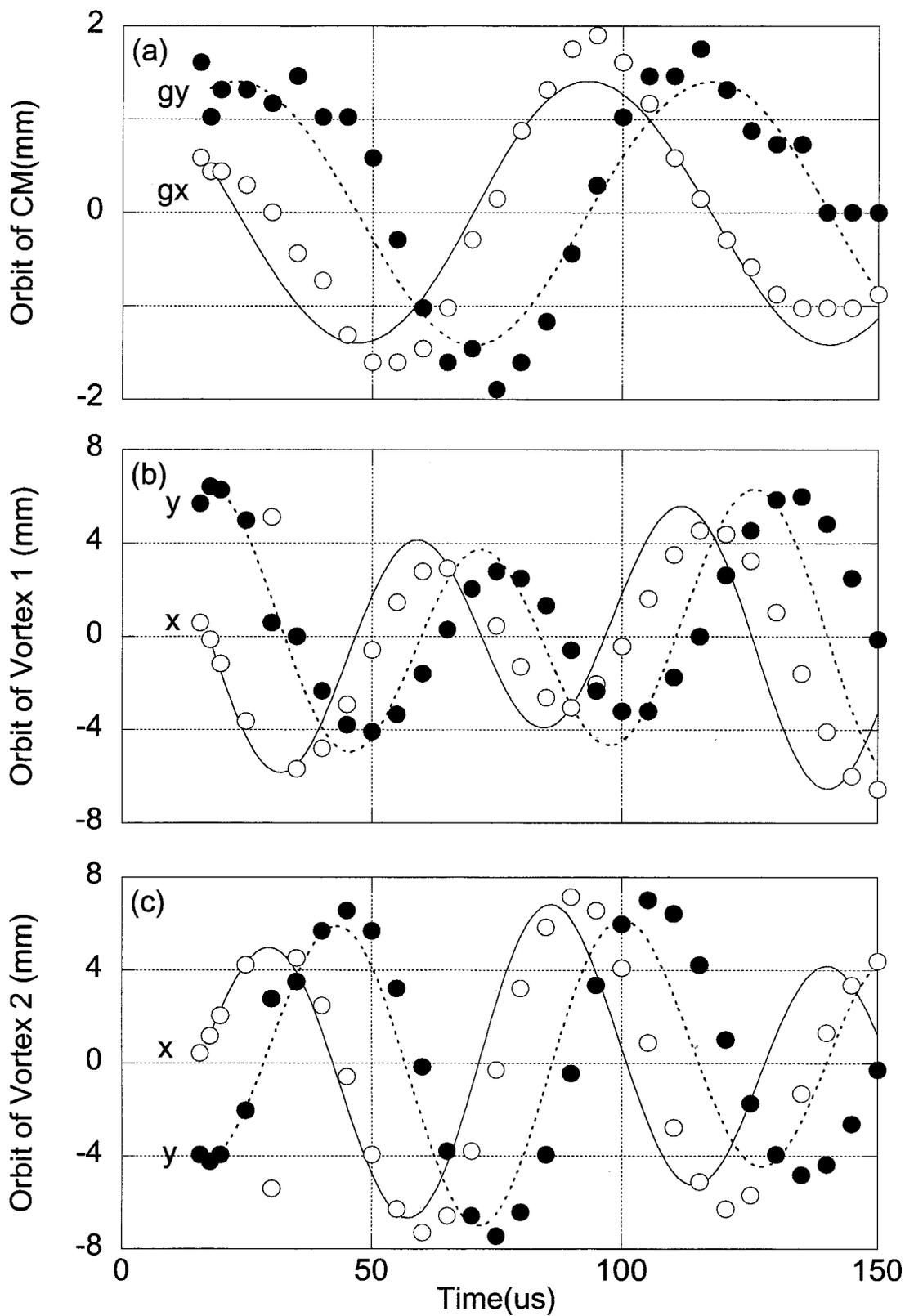


図 4.12: 2本の渦糸の運動の軌道を示す。記号は観測された軌道を、実線は運動方程式から予測された軌道を表す。上から、重心の軌道、それぞれの渦糸の軌道である。

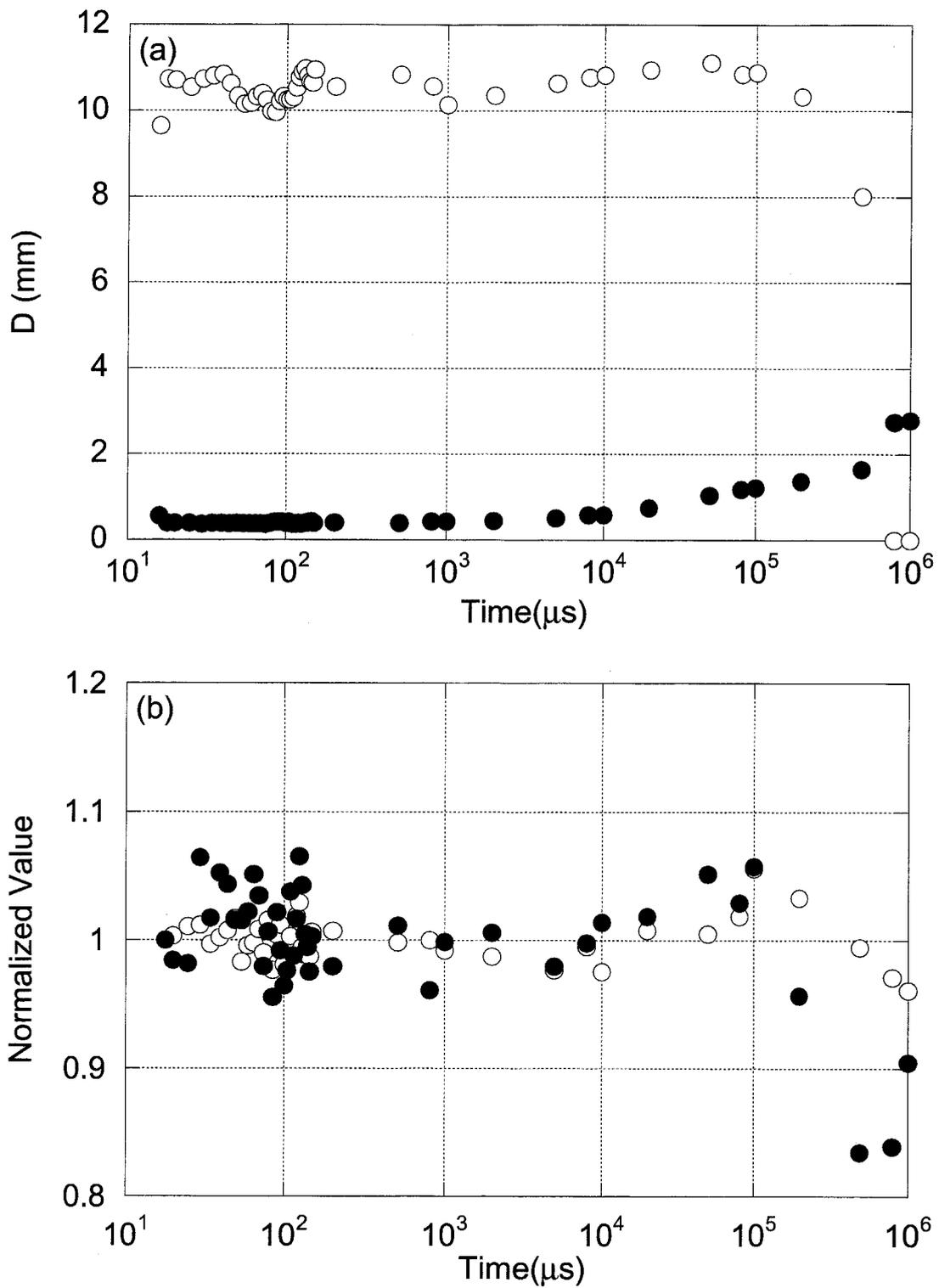


図 4.13: (a)2本の渦糸の間の距離 (○) と渦糸の $1/e$ 半径 (●) の時間変化. (b) 渦糸の全電子数 (○) と慣性モーメント (●) の時間変化.

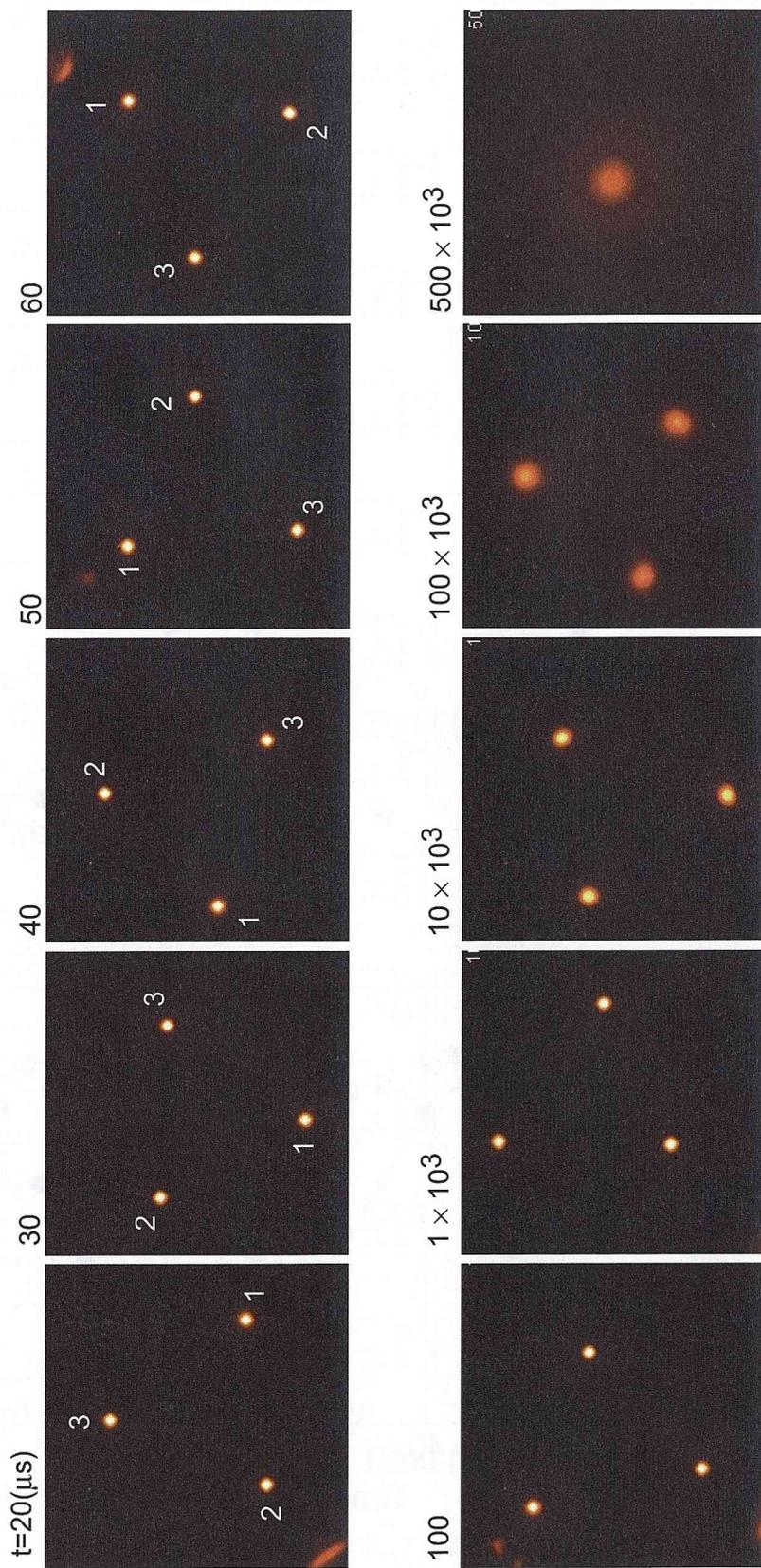


図 4.14: CCD カメラにより観測された 3 本の渦糸の運動.

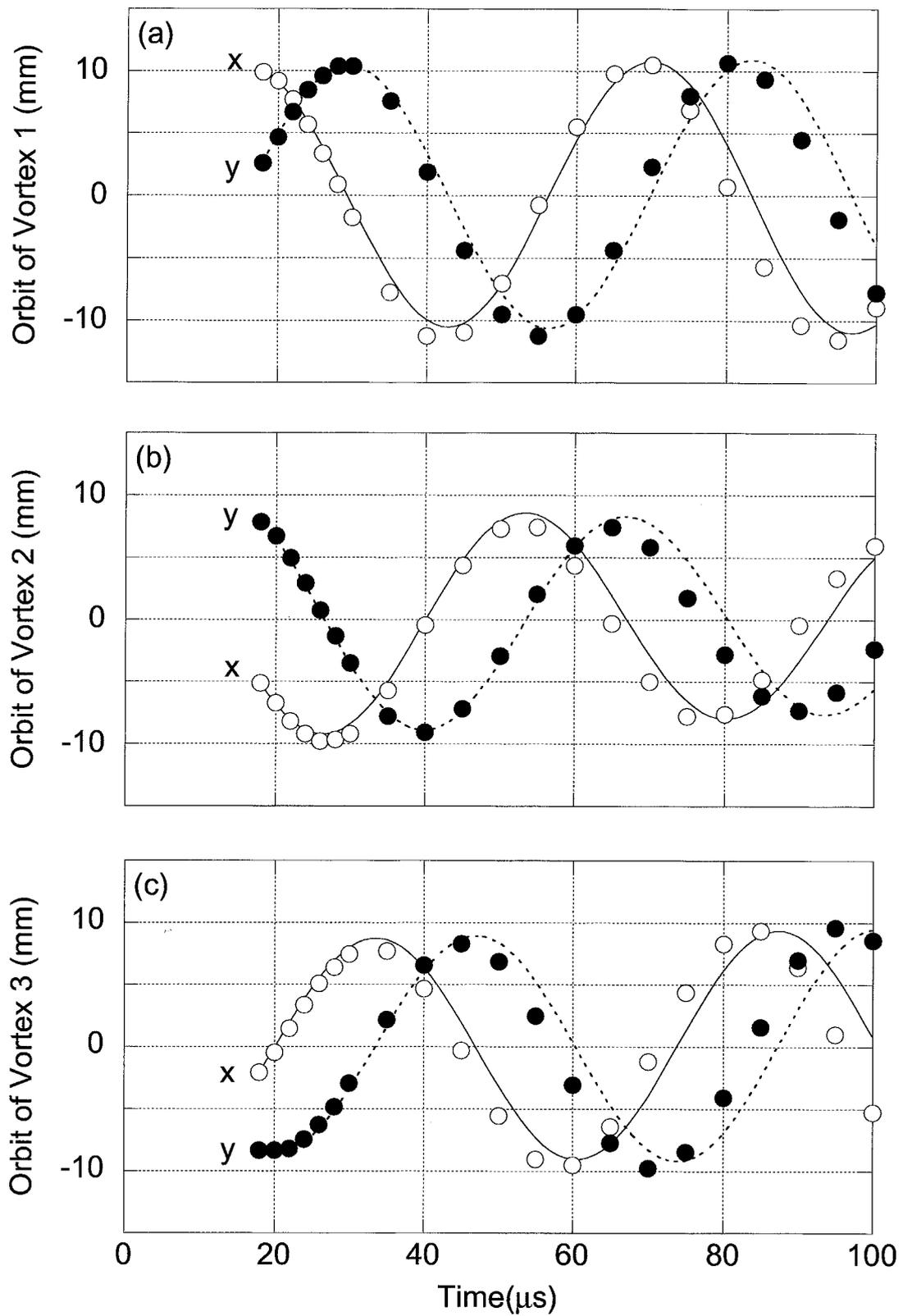


図 4.15: (a), (b), (c) に 3 本の渦糸のそれぞれの運動の軌道を示す。記号は観測された軌道を表し、実線と破線は運動方程式から予測された軌道を表す。

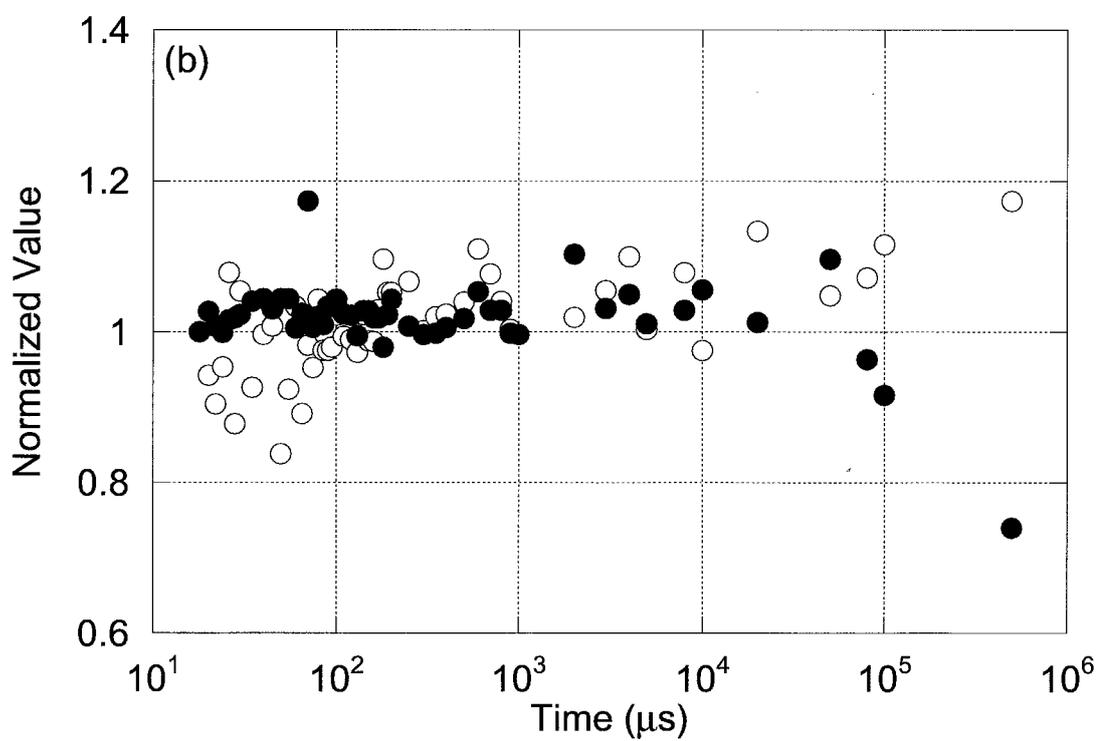
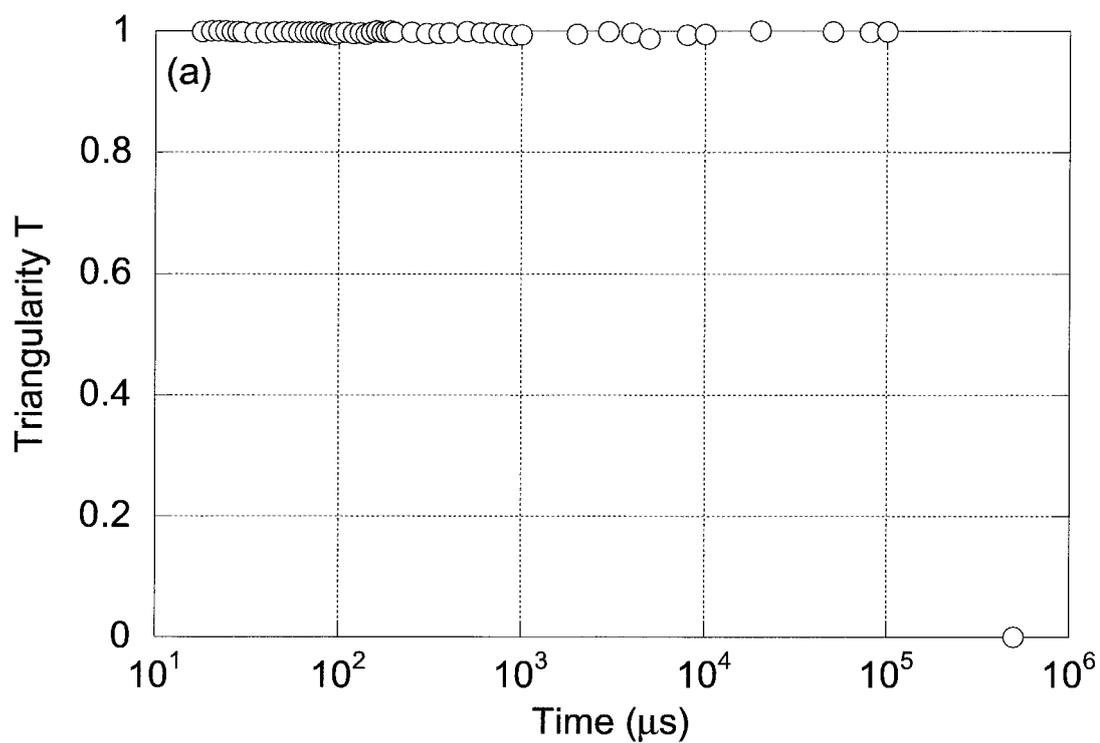


図 4.16: (a) 三角形度 T を時間の関数として示す. (b) 渦系に含まれる全電子数 (○) と渦系の慣性モーメント (●) の変化を時間の関数として示す.

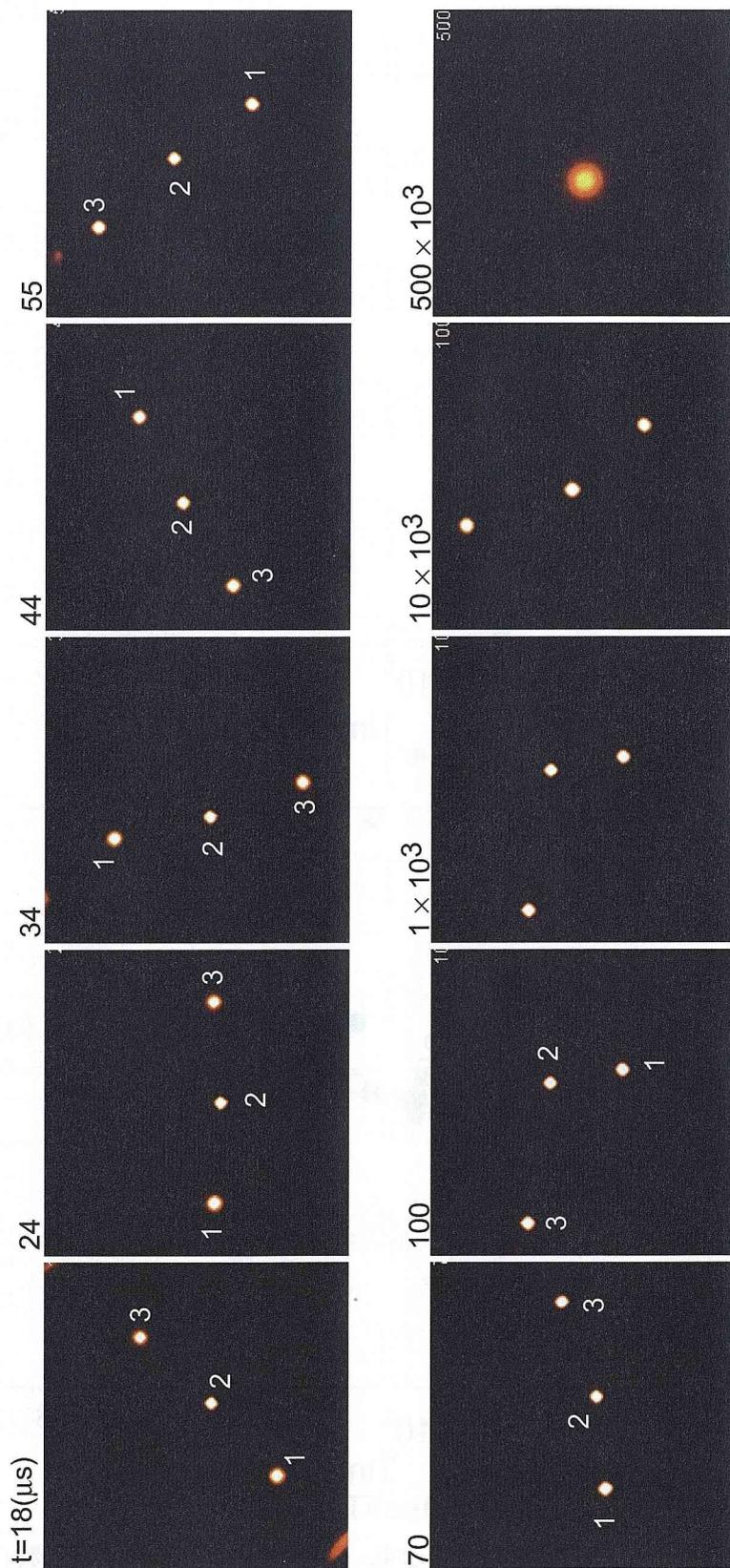


図 4.17: CCD カメラにより観測された 3 本の渦糸の運動.

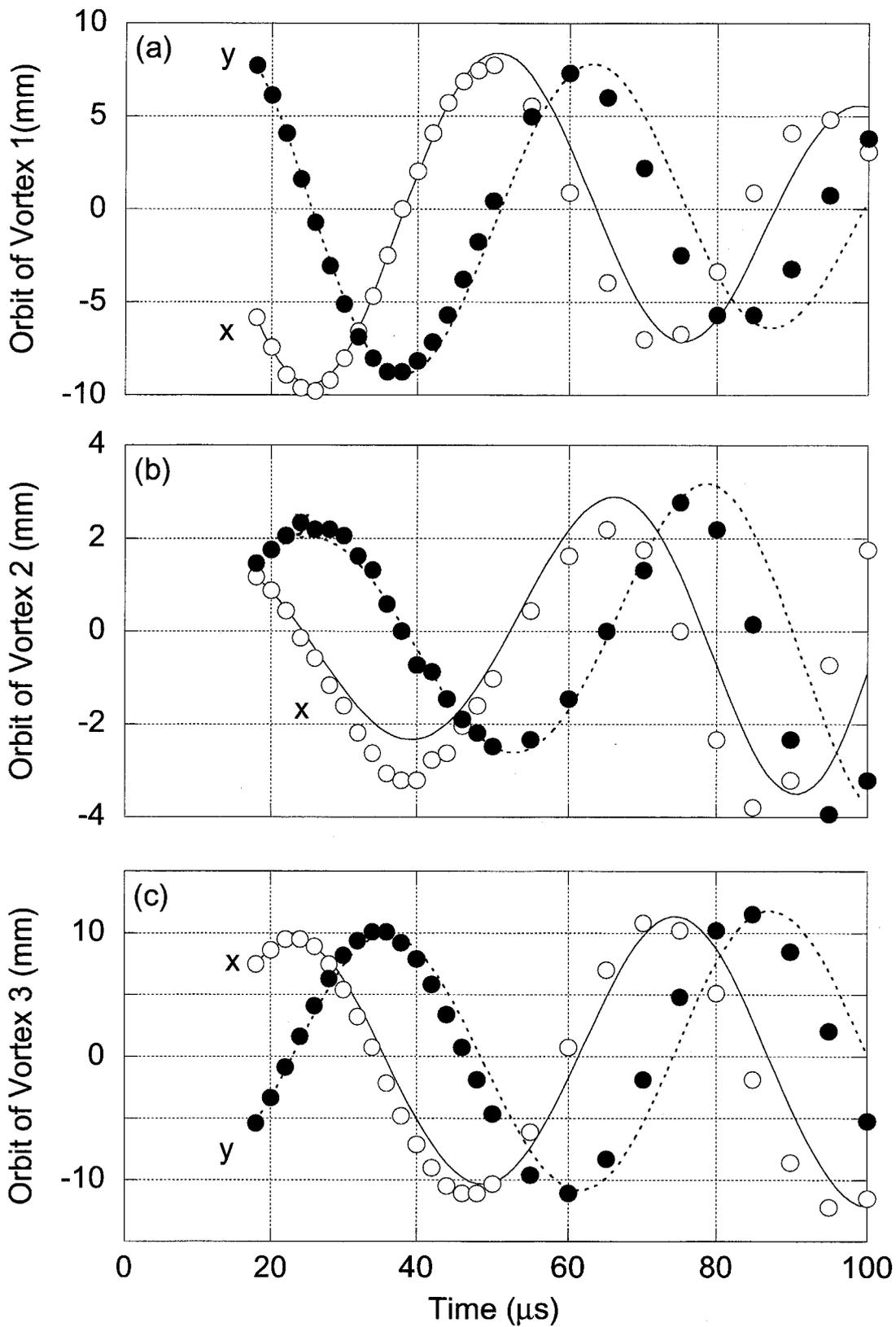


図 4.18: (a), (b), (c) に 3 本の渦糸のそれぞれの運動の軌道を示す。記号は観測された軌道を表し、実線と破線は運動方程式から予測された軌道を表す。

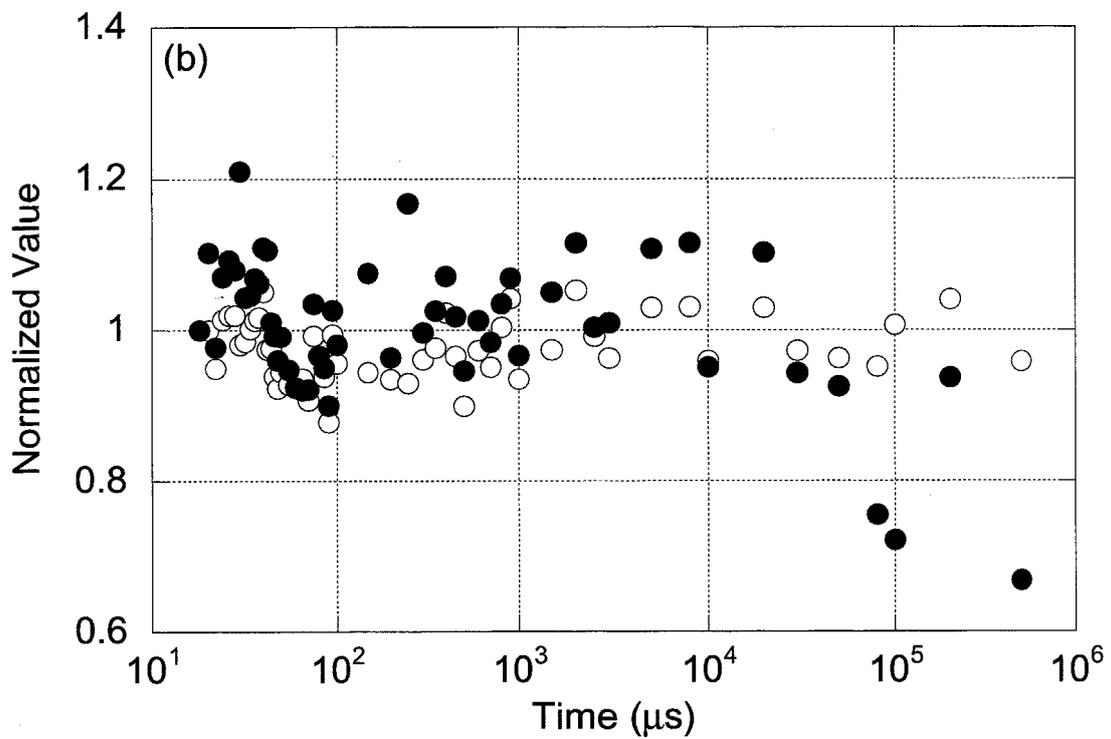
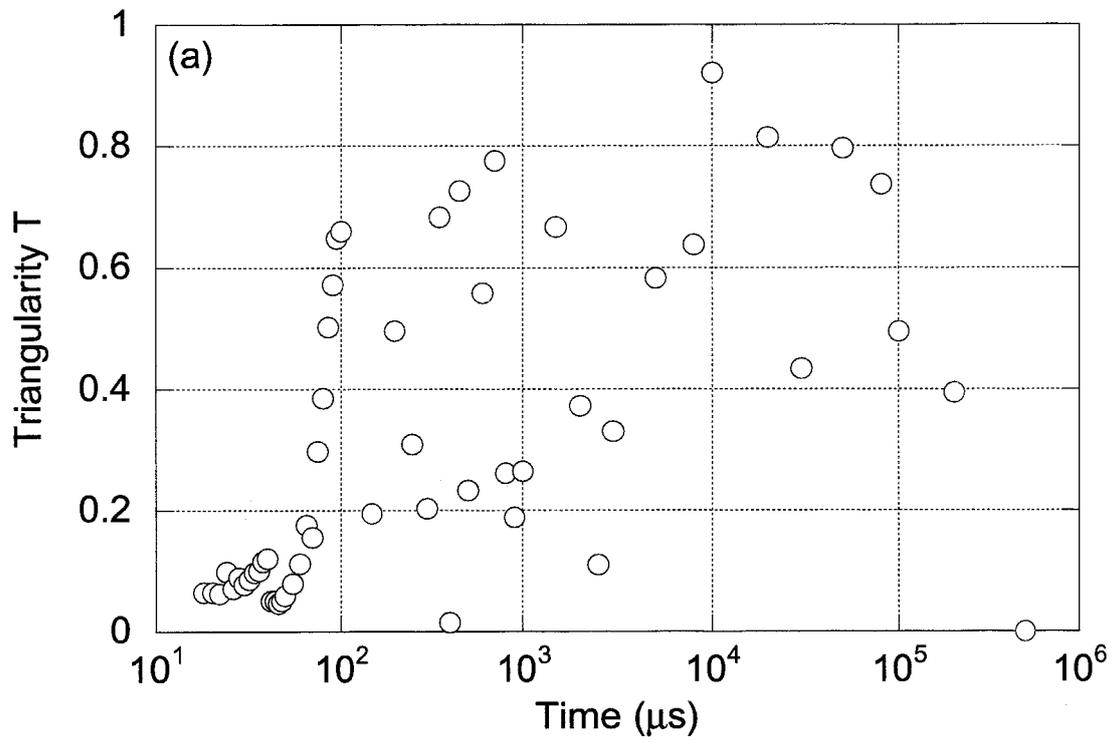


図 4.19: (a) 三角形度 T を時間の関数として示す. (b) 渦系に含まれる全電子数 (○) と渦系の慣性モーメント (●) の変化を時間の関数として示す.

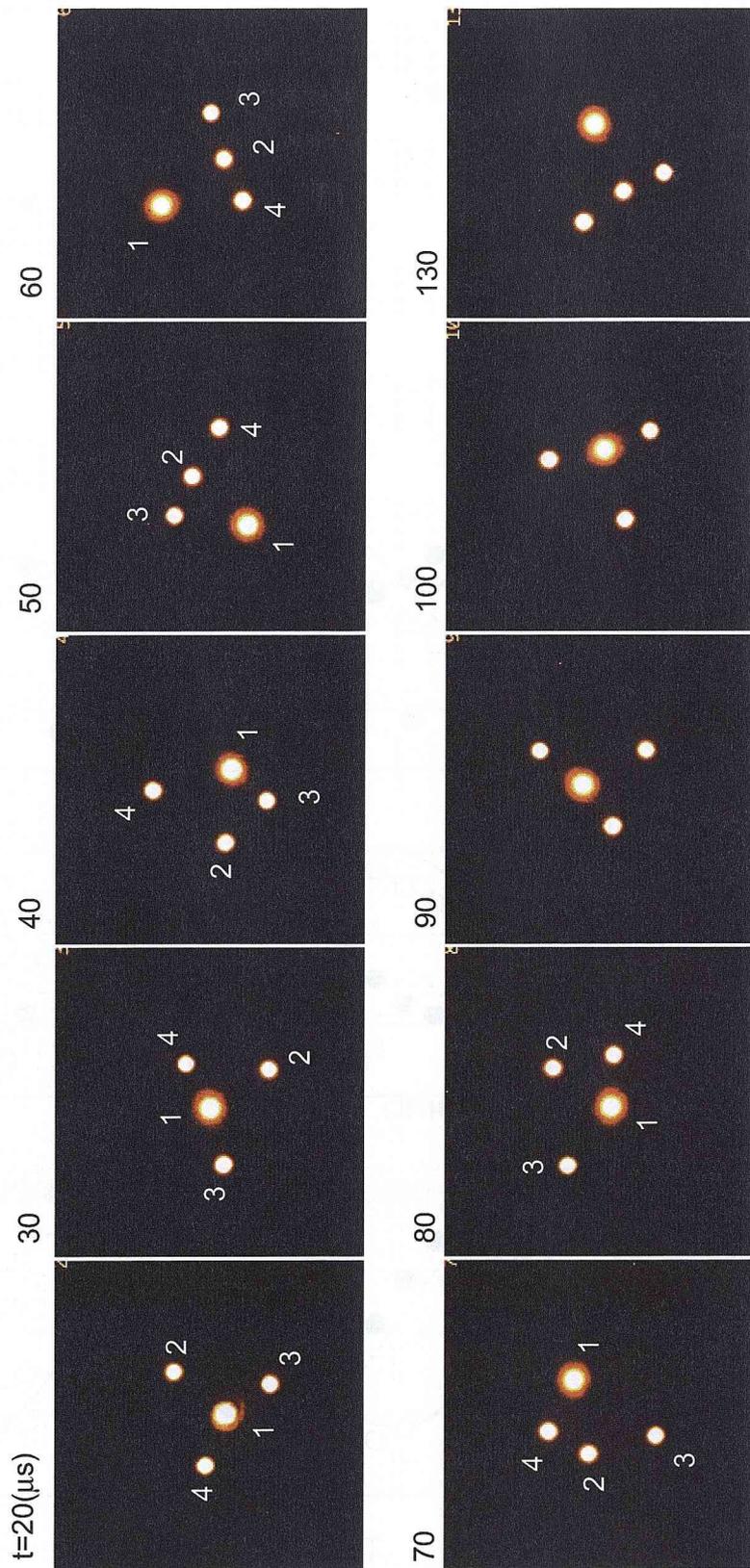


図 4.20: CCD カメラにより観測された 4 本の渦糸の運動。

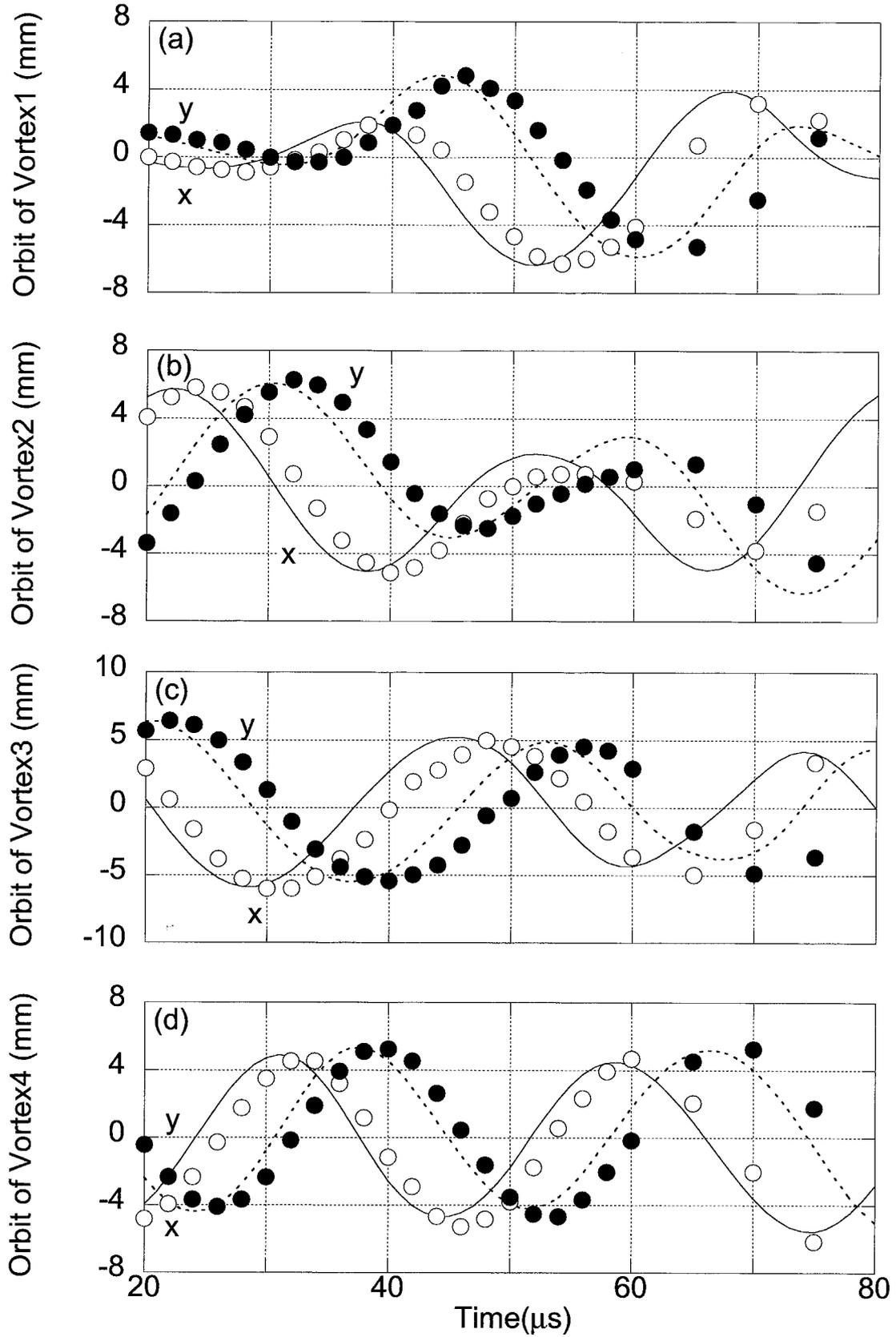


図 4.21: (a) 三角形の重心付近に入射された渦糸の軌道. (b)-(d) 三角形に入射された渦糸の軌道
記号は観測された軌道を表し, 実線と破線は運動方程式から予測された軌道を表す.

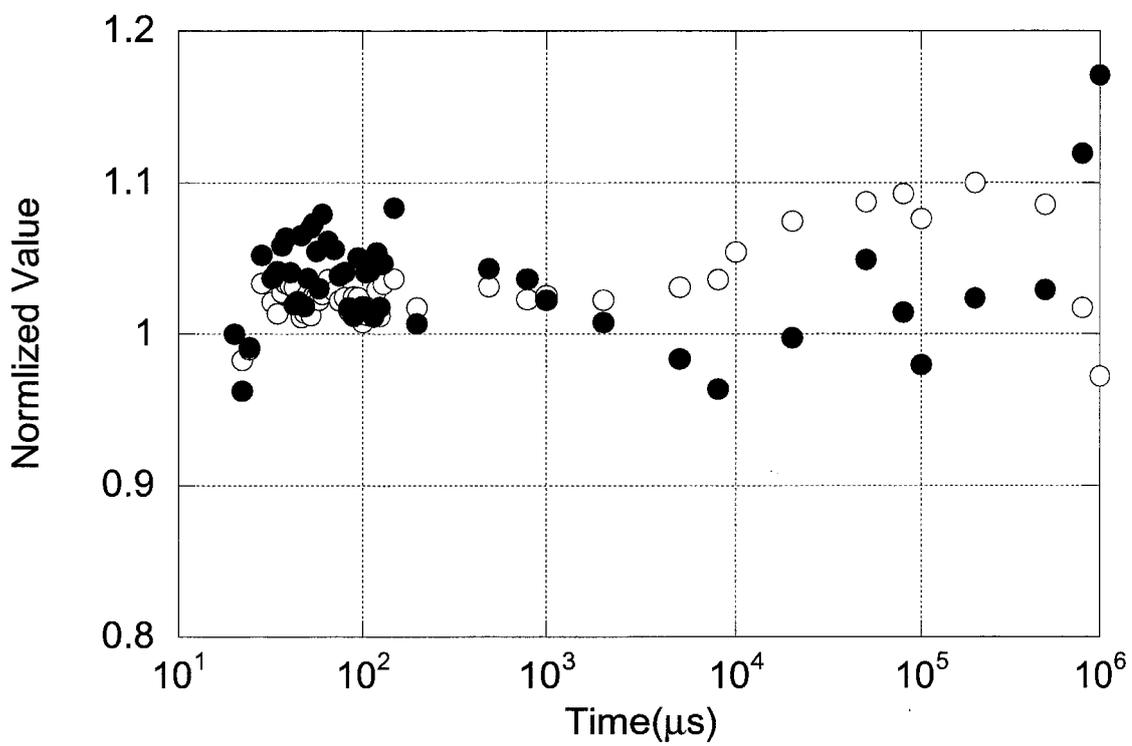


図 4.22: 渦系に含まれる全電子数 (○) と渦系の慣性モーメント (●) の変化を時間の関数として示す.

関連図書

- [1] W. T. Kelvin, *Mathematical and Physical Papers* (Cambridge University Press, Cambridge 1910).
- [2] J. J. Thomson, *A Treaties on the Motion of Vortex Rings* (Macmillian, London, 1883).
- [3] P. G. Saffman, *Vortex Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).
- [4] R. H. Levy, *Phys. Fluids* **11**, 920 (1968)
- [5] C. F. Driscoll and K. S. Fine, *Phys. Fluids B* **2**, 1359 (1990).
- [6] D. L. Eggleston, *Phys. Plasmas* **1**, 3850 (1994).
- [7] K. S. Fine, C. F. Driscoll, J. H. Malmberg, and T. B. Mitchell, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 588 (1991).
- [8] T. B. Mitchell and C. F. Driscoll, *Phys. Fluids* **8**, 1828 (1996).
- [9] D. Durkin and F. Fajans, *Phys. Fluids* **12**, 289 (2000).
- [10] 巽友正「新物理学シリーズ 21 流体力学」培風館
- [11] Y. Kiwamoto, K. Ito, A. Sanpei, A. Mohri, T. Yuyama and T. Michishita: *J. Phys. Soc Jpn.* **68** (1999) 3766.
- [12] D. W. Moore and P. G. Saffman, *J. Fluid Mech.* **69**, 465 (1975).
- [13] P. G. Saffman and R. Szeto, *Phys. Fluids* **23**, 2339 (1980).
- [14] V. J. Rossow, *J. Aircr.* **14**, 288 (1977).
- [15] M. V. Melander, N. J. Zabusky and J. C. McWilliams, *J. Fluid Mech.* **195**, 303 (1988).
- [16] R. W. Griffiths and E. J. Hopfinger, *J. Fluid Mech.* **178**, 73 (1987).
- [17] T. H. Havelock, *Philos. Mag.* **11**, 617 (1931).

第5章 背景渦中の渦糸の運動

5.1 背景と目的

前章では、真空中の渦糸 (離散的な渦) の相互作用について報告を行った。本章では渦糸のまわりの空間が渦度 (電子) によって満たされている場合、即ち大きく広がった渦の中に渦糸がある場合、に背景の渦度と渦糸がどのように相互作用し、運動するかを検討する。まず、渦糸のまわりに一様な渦度分布が存在する場合について考える。この場合、全体の渦度が一様に増すだけであり、ここを基底レベルと考えれば渦糸の運動は真空中の場合と比べて変化はない。

それでは、背景渦度が勾配をもつ場合には、渦糸はどのように運動するであろうか。このような運動は自転する惑星大気の力学の問題として検討されており、コリオリ力の緯度変化が広がった渦に対応すると解釈される [1, 2, 3, 4]。回転タンク中の流体渦を用いた実験も報告されており、定性的には渦糸の回転方向と背景渦の回転方向が渦糸周辺で反対向きであれば渦糸は背景渦の渦度分布の勾配を登り、同じ向きであれば背景渦度の勾配を下ることが知られている [5, 6]。

また、勾配を持つ背景渦度分布と渦糸、渦孔 (周辺に比べ渦度が低くなっている領域) との相互作用は、二次元の流体力学で重要な役割を演じると考えられている。たとえば、二次元乱流の減衰は背景渦度の勾配をゆっくりと下る渦孔によってコントロールされることが報告されている [7]。非中性プラズマを用いた実験で初めて観測された、渦糸が格子状に並ぶ渦結晶 (Vortex Crystal) においては、背景渦度が渦糸のランダムな運動を抑制 (Cooling) する重要な役割を果たしていると考えられている [8, 9, 10]。

本章では背景渦と渦糸の相互作用の素過程として、背景渦中の1本の渦糸の運動と、背景渦度分布に誘起される変形について検討する。まず、第5.2節と第5.3節で、実験的に観測された渦糸の運動とその一般的な特性について述べる。第5.4章ではこの渦糸の運動の物理的な機構を検討し、第5.5節でその線形モデル [11, 12] について紹介する。第5.6節で、渦糸の運動の特徴的な運動の時間スケールを実験と線形モデルで比較し、第5.7節で場の解析を用いてその速度を検討する。第5.8節では渦糸周辺の流線 (ポテンシャル) 構造を線形モデルと比較、検討する。第5.9節で背景渦中に誘起される構造の時間変化について触れ、第5.10節で本章をまとめる。

5.2 背景渦中の渦糸の運動

背景の渦度分布は実験的には次の操作をすることで形成する。まず適当なカソード (複数でも良い) からトラップ中に渦糸を導入する。数 ms の間隔で次々と渦糸を導入し、渦糸同士を合体、緩和させる。この操作を数百~千回繰り返して、広がりを持つ大きな渦を作る。その後、数秒程度

この渦を保持することにより、動径方向に単調に減少する安定な渦度分布を形成する。

この様な背景渦度分布を形成したあと、その周辺部に渦糸を入射した場合の渦度分布の時間発展を図 5.1, 5.2 に示す。上段は全渦度分布を時間経過に対して示している。下段の画像については後述する。左上の数字は時間を表す。背景渦の電子数 $N_b = 1.9 \times 10^8$ 、渦糸の電子数は $N_L = 3.0 \times 10^7$ である。背景渦の端に入射された渦糸が背景渦の中を時計方向に回転しつつ中心方向、即ち渦度の高い方向へと移動する様子が観測される。このとき渦糸の近辺から背景渦外側に向かって渦度の腕が伸びていく。この腕は長時間にわたり存在し背景渦中にスパイラル状の渦度の粗密構造を形成する。やがて渦糸が背景渦の頂点に達すると、渦糸はそこに落ち着く。その後は、スパイラル構造の巻き込みが時間の経過とともにもだんだんと強くなり互いの距離を近づけていく。更に時間が経過すると腕は互いに合体を繰り返し、動径方向に単調に減少する分布へと落ち着く。

図 5.1 に示した渦糸運動の軌道を図 5.3 (a) に示す。渦糸が半径方向に回転しながら中心に向かって移動の様子が確認出来る。図 5.3 (b) に渦糸の軌道を時間の関数として示す。公転の周期はおよそ $10 \mu\text{s}$ であり、真空中に渦糸を入射した場合に比べかなり速い。この運動は、背景渦が作る時計周りの速度場により駆動される。渦糸はおよそ $30 \mu\text{s}$ 程度で背景渦の中心にたどり着いており、方位角方向に数回転する間に背景渦度の中心にたどり着くことが分かる。前章で示したように真空中でも長時間経過した後は渦糸はその回転半径を小さくしていき、最終的には中心軸付近に落ち着く現象が観測される。これは、散逸により渦糸の慣性モーメントが失われるためであるが、この現象と背景渦中で観測される渦糸の動径方向運動のタイムスケールにはオーダー 5 の違いがあり、明らかに異なる機構で駆動されている。

ここで、図 5.1 に示したケースについて渦糸と背景渦の密度分布を比較しておく。画像データからもある程度は分かるが、より理解し易くするため $t = 18 \mu\text{s}$ における渦糸と原点を通る直線上での密度分布の断面を図 5.4 に示す。背景渦に比べ渦糸は非常に狭く、かつ高い密度分布を持つことがわかる。渦糸の密度はもっとも高いところで $1.7 \times 10^{13} \text{ m}^{-3}$ 、背景渦はもっとも高いところでも $7.3 \times 10^{12} \text{ m}^{-3}$ で、渦糸入射位置では $1 \times 10^{12} \text{ m}^{-3}$ 程度である。従って、背景に渦に比べ渦糸の密度の方が 2~10 倍程度大きい。しかし、背景渦は渦糸に比べ圧倒的に大きいため、渦糸の電子数は背景渦の電子数の 1/100 程度である。

図 5.5 に電子数 $N_b = 1.9 \times 10^8$ の背景渦中に、電子数 $N_F = 4.7 \times 10^6$ の渦糸を入射した場合の渦度分布の発展を示す。先のケースに比べ、渦糸を背景渦のより中心に近いところに入射している。この場合も渦糸は背景渦の中を時計方向に回転しつつ、背景渦の中心に向かって移動する。

5.3 勾配をもつ背景渦中の渦糸運動の一般的特性 [13]

渦糸は山型の背景渦では、背景渦度の勾配を登るように運動することが確認された。ここでは背景渦度分布の形状や渦糸の循環の強さに対する渦糸運動の依存性について検討する。背景渦度分布の広がりや傾き、循環は使用するカソードの組み合わせや混合する渦糸の数、混合終了後の保持時間等を変化させることにより制御することが出来る。また、カソード側のポテンシャル障壁を数 μs 程度の間下げるにより、一番密度の高い中心部のプラズマをカソード側に引きだし

て、中心部で密度が低い円筒状の分布を作ることも可能である。

まず、渦糸運動の背景渦度分布の形状に対する依存性について検討する。図 5.6 (a) に実験に用いた 3 種類の異なる背景渦度 (密度) 分布を示す。図は画像計測により得られた渦度分布をその重心を中心として方位角方向に平均化したものである。三角と四角は動径方向に単調に減少する密度分布であり、それぞれ電子数は $N_b = 3.5 \times 10^8$ と $N_b = 1.8 \times 10^8$ である。一方、黒丸は動径方向の途中に極大値をもつドーナツ状の分布であり、電子数は $N_b = 8.0 \times 10^8$ である。これらの背景渦度分布中に、カソード F から電子数 $N_F = 1.2 \times 10^7$ の渦糸を入射して動径方向の運動の変化を調べた。図中の矢印は渦糸の入射位置を表し、下向きの矢印が山形の分布への入射位置、上向きの矢印がリング状の分布への入射位置である。

ここで、渦糸の動径方向の運動を評価する基準点として渦糸の重心を採用する。何故なら、図 5.1 に示すように背景渦度は大きく変形するのでその中心を決めることは難しく、また原点 (中心軸) では渦糸と背景渦の相対的な運動を反映しないからである。渦糸の重心から渦糸までの距離 r を時間の関数として図 5.6 (b) に示す。実線については第 5.6 節で述べる。記号は背景渦度分布の違いを表し、図 5.6 (a) で用いた記号と対応している。ただし、白丸は真空中に渦糸を入射した場合の z 軸からの距離を表す。この場合は前章で記したように z 軸の周りで円運動を行なう。これに対し、背景渦度分布が山形の分布を持つ場合 (Δ , \square) には、渦糸は重心の方向、即ち背景渦度のより高い方向へと移動する。その速度は背景渦の勾配の大きな Δ の分布の方が、 \square の分布の場合よりも明らかに速くなる。一方、リング状の背景渦度分布の凹んだ位置に渦糸を入射した場合 (\bullet)、背景渦自身の不安定な振動に渦糸の運動による振動が加わるため、観測される渦運動はかなり複雑なものとなる¹。しかし、明らかに渦糸は動径方向外側に位置するリングの尾根に向かって移動し、尾根の頂上に留まり続ける。以上の結果から、背景渦度分布に勾配がある場合には、渦糸はその勾配を登る方向に運動することが確かめられる。

次に背景渦中の渦糸の運動が、渦糸の循環に対しどのように依存するかを検討する。図 5.7 (a) に背景渦度 (密度) 分布を示す。電子数は $N_b = 7.8 \times 10^7$ である。図中の矢印は渦糸の入射位置を表す。図 5.7 (b) に渦糸の重心から渦糸までの距離 r を時間の関数として示す。記号は渦糸の電子数を表し、それぞれ $N_v/10^6 = 1.6(\Delta)$, $4.4(\square)$, $8.7(\circ)$, $17(\bullet)$ である。渦糸の電子数が増加すると、渦糸が背景渦の勾配を登る速さも明らかに増加する。

以上の実験結果から、背景渦中の渦糸運動に関して次の特性が確認出来る。

- (1) 渦糸は背景渦の渦度勾配を登る。
- (2) その速度は、背景渦度分布の勾配に対して増加関数である。
- (3) その動径方向の速度は、渦糸の循環に対して増加関数である。

¹円周方向への回転速度が動径方向に極大値を持つと、その両側にあるズレを持つ流れの間に集団的相互作用が生じて渦度のリング状分布は振動を始める。これは流体力学では Kelvin - Helmholtz 不安定性とよばれ、非中性プラズマ物理学では Diocotron 不安定性と呼ばれる現象である [14]。

5.4 渦糸が渦度勾配を登る機構 [13]

渦糸が背景渦度の勾配を登るためには、そちらを向く速度場が必要である。そのためには、背景渦中に渦度勾配に直交する方向（この場合は方位角方向）の構造が必要となる。ここで、改めて図 5.1 や図 5.5 の上段を見ると、渦糸の運動に伴い、渦糸の周辺で背景渦が変形し渦度分布に構造が生じることが分かる。この背景渦度分布の構造の変化を強調するために、その摂動成分 $\delta\zeta(x, y, t)$ を次の操作により抽出する。

$$\delta\zeta(x, y, t) = \zeta(x, y, t) - \zeta_{b0}(x, y) \quad (5.1)$$

ここで、 $\zeta(x, y, t)$ は各時刻に観測された渦度分布であり、 $\zeta_{b0}(x, y)$ は渦糸入射前の背景渦度分布である。 $\delta\zeta$ を図 5.1, 5.2, 5.5 の下段に示す。緑色が $\delta\zeta = 0$ 、即ち渦度が増加しないことを表し赤色は渦度の増加 ($\delta\zeta > 0$) を青色は渦度の減少 ($\delta\zeta < 0$) を表す。白い点は渦糸である。

$\delta\zeta$ に注目すると、渦糸の進行方向前方で背景渦度が減少し、後方で増加していることが分かる。ここで、渦糸と同じ速度で回転する座標系で、背景渦度の摂動分により発生する速度場を考える。渦糸後方の渦度の増加した部分はこれを一つの渦と考え、その周りに時計周りの速度場を形成する。一方、前方の減少した部分は渦孔、逆符号の渦と考えられるので、その周りに反時計方向に回転する速度場を形成する。従って、この双極子状の渦度分布はその中心、即ち渦糸の位置に背景渦の中心に向かう速度場を形成する。その結果、渦糸とその近傍の流体要素（電子）は背景渦の中心、即ち渦度勾配の山を登るように運動することになる。

以上の考察から背景渦中にこの様な摂動が形成されれば、渦糸は背景渦度の山を登ると考えられる。次に、この様な構造が形成される機構について検討する。前章で述べたように、渦糸は時計方向に公転しつつ自身も時計回りに高速で自転している。この渦糸がつくる右回りの速度場に引きずられる形で渦糸近くの背景渦度の移動がおきる。このとき渦糸の進行方向前方に巻き込まれるのは渦糸の公転円より外側にあった低い渦度であり、後方に巻き込まれるのは内側にあった高い渦度である。この結果渦糸の前後にそれぞれ渦度の低い部分と高い部分が双極子状に形成されることになる。

背景渦度が中心から離れるほど大きくなるすり鉢状の分布をしている場合についても同様に考えることが出来る。この場合は、渦糸の前方では渦度が増加し後方では減少することになる。従って、渦度の摂動分による速度場は中心から外側に向くことになる。以上の考察から、渦糸と背景渦の渦度の符号が同じとき、即ち渦糸の回転方向と渦糸周辺の背景渦の速度場が逆を向くときには、渦糸は背景渦度の高い方向へと移動することが分かる。

この渦糸の運動は渦糸の保存量を用いて次のように解釈することも出来る。まず、 $\delta\zeta$ に注目すると、渦糸の通った後にはスパイラル状の航跡が残り、長時間維持されることがわかる。このスパイラル状の構造は、さきに見た双極渦構造が背景渦中に残された跡であると考えられる。ここで、航跡に沿って摂動分を見ると、背景渦度の分布は渦糸の公転軌道の外側で増加し、内側で減少している。即ち、背景渦がもつ慣性モーメントは増加することになる。しかし、二次元 Euler 流体においては、渦糸の慣性モーメントは保存されなければならない。従って、背景渦の慣性モー

メントが増加した分を補償するために渦糸の慣性モーメントが減少する、即ち重心までの距離を減らす、とする解釈である。

以上では渦糸の運動を流体力学的な解釈から定性的に検討した。ここで、渦度 \propto 電子密度であることを思い出すと、電磁気学的には次のように解釈することが出来る。渦度の高低は、電子密度の高低であるので、電子密度の摂動成分によって生じる電場の摂動分は渦糸の前方から後方に、即ち反時計方向を向く。いま磁場は紙面に対し垂直奥向きであり、電場は反時計方向をむくので、電子は $E \times B$ ドリフトにより動径方向内側、この場合は背景の密度の高いほうへと駆動されることになる。

背景渦中にこのような渦度分布の変形が誘起される機構は、渦糸の座標系に乗って見た等電位面を描くことにより理解出来る (図 5.8 参照)。いま、渦糸を原点とした局所的な座標系 (\tilde{x}, \tilde{y}) を導入する。ここで、 \tilde{x} 軸は実験室系では方位角方向の負の方向を、 \tilde{y} 軸は動径方向を向く。磁場は右手系で z 軸の正方向を向いている。実験室系では渦糸は右 (\tilde{x} 軸負の方向) に動いており、背景の密度は下 (\tilde{y} 軸負の方向) に向かって増加する。上段左に背景電子密度による電位分布を示す。これは、 \tilde{x} 軸に平行な直線群となる。これに上段右に示す渦糸の電子群による電位分布を重畳すると、下段に示したセパトリティクスを含む等ポテンシャル面が合成される。ここで、 $E \times B$ ドリフトによる電子の速度は $\mathbf{v}_d = \hat{z} \times \nabla\phi/B_0$ であるので、電子は等電位面に沿って運動する。従って、セパトリティクスの内側では渦糸の電子群が等電位面に沿って時計向きに回転している。一方、セパトリティクスの外部の等電位面に沿っては、 x 軸を挟んで逆向きに背景電子が流れている。ここで、渦糸の左右に注目する。実験室系で電子の進行方向前方にあたる右側には上の低密度側からの電子の流れが反射され、後方にあたる左側には下から高密度の電子の流れが反射される。この結果、渦糸の前方 (右側) に比べて後方 (左側) の電子密度が高くなり、前方から後方に向く (左向き) 摂動電場が発生する。この摂動電場と磁場による $E \times B$ ドリフトにより渦糸の位置には下向きの速度場が発生する。その結果、渦糸の電子群は背景密度が増加する向きに移動することになる。

5.5 背景渦中の渦糸の運動の線形モデル

以上の様な物理機構を考慮した理論モデルが本実験に併行してあらわれた [11, 12]。このモデルでは大きな循環をもつ背景渦の中に、十分に小さな循環をもつ渦糸 (理想的な渦糸であり断面はゼロ) を入射した場合の運動を考える。Slab 状の単純化した配位で Euler 方程式を線形化して、渦糸による背景渦度の分布の摂動を計算し、この摂動成分による速度場により渦糸が運動するとして、渦糸の速度を定量的に評価している。数値計算でも周囲より高い渦度を持つ領域が渦度の勾配を登る様子が観測されている [11, 12, 15]。

ここでは、この線形モデルを紹介する。上記の検討と同様に、局所的な座標系 (\tilde{x}, \tilde{y}) を導入する。背景渦の作る速度場は $\mathbf{v} = A\tilde{y}\hat{x}/\tilde{x}$ であり、 A は背景渦度分布がつくる速度場の Shear である。循環 Γ_v の渦糸が背景渦度に与える摂動を $\delta\zeta_b$ とすると Euler 方程式から、

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + A\tilde{y}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \right] \cdot \delta\zeta_b = -\zeta_0' \frac{\Gamma_v}{2\pi} \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} \quad (5.2)$$

となる。ただし、 ζ'_0 は初期の背景渦度分布の傾きである。この式から背景渦度に生じる摂動 $\delta\zeta_b$ は次のように評価される。

$$\delta\zeta_b = -\frac{\Gamma_v \zeta'_0}{4\pi A \tilde{y}} \ln \left[\frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}{(x - A\tilde{y}t)^2 + \tilde{y}^2} \right] \quad (5.3)$$

ここで式 (5.3) から背景渦度の摂動分の構造を評価しておく。式 (5.3) は

$$\delta\zeta_b = \frac{\Gamma_v d\zeta_{b0}/dr}{4\pi A \rho \sin \theta} \ln[1 + At \sin \theta (At \sin \theta - 2 \cos \theta)] \quad (5.4)$$

と書き換えることが出来る。ここで $\rho = (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)^{1/2}$, $\theta = \tan^{-1}(\tilde{y}/\tilde{x})$ である。 $A \rightarrow 0$ の極限をとると

$$\delta\zeta_b = -\frac{\Gamma_v d\zeta_{b0}/dr}{2\pi} \frac{t \cos \theta}{\rho} \quad (5.5)$$

となる。式 (5.5), (5.4) を等高線プロットにしたものを図 5.9 に示す。図 5.9 (a) は摂動が生じるまえの流線を表し、図 5.8 と等価である。縦軸が \tilde{y} 軸 (動径方向)、横軸が \tilde{x} 軸 (方位角方向、負の向き) である。図では \tilde{y} 軸負の方向 (下向き) に背景の渦度が増加し、実験室系でみると渦糸は \tilde{x} 軸正の方向 (右向き) に運動する。図 5.9 (b), (c) に $\delta\zeta$ を示す。黒い部分は渦度が増加した所で、白い部分は渦度が減少した所である。線形モデルから予測される $\delta\zeta$ と実験で観測される $\delta\zeta$ の構造は良く一致する。この摂動によって形成される速度場は流れ関数に矢印をつけて表してある。摂動渦度の双極子構造によって、その真ん中にある渦糸の位置に背景渦度の増加する下向きの流れが生じることが導き出される。図 (c) に示すように $A \neq 0$ の場合には、渦度の双極子構造の軸が $\theta = \tan^{-1}(2/At)$ だけ傾く。この傾きは実験室系での動径方向の速度の増加を制限し、方位角方向の速度を減らす役目をする。

渦糸の \tilde{y} 軸方向 (動径方向) の速度 dr/dt は渦度の摂動分がつくる速度場に等しいとして評価する。

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\Gamma_v \zeta'_0}{4\pi^2 A} \int_{l_1}^{l_2} \frac{dy}{y} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{u}{u^2 + 1} \ln \left[\frac{u^2 + 1}{(u - At)^2 + 1} \right]. \quad (5.6)$$

ここで、 $u = \tilde{x}/\tilde{y}$ であり、 l_1 と l_2 は \tilde{y} の積分の発散を抑えるために導入した上限と下限である。 l_1 と l_2 は物理的には渦糸の運動に寄与する速度場として何処まで考慮するかで定義することが出来る。ここでは $l_1 = l_s = \sqrt{\Gamma_v/2\pi|A|}$, $l_2 = cr$ と定義する。ただし、 l_s は渦糸からセパトリクスまでの距離 (セパトリクス半径) を表し、 c はオーダー 1 の定数である。その結果、渦糸の速度は次のように評価される。

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\Gamma_v d\zeta_b/dr}{2\pi |A|} \ln\left(\frac{cr}{l_s}\right) \tan^{-1}\left(\frac{|A|}{2}t\right), \quad (5.7)$$

ただし、 ζ_b は背景の渦度分布である。

5.6 実験と線形モデルの比較

次に、この線形モデルから得られた渦糸の運動方程式 (5.7) に実験的に決定されたパラメータを代入し、実験と線形モデルを定量的に比較する。式 (5.7) を解くために必要な各パラメータ Γ_v , $d\zeta_b/dr$, A , l_s は実験的には次のように決定する。渦糸の循環 Γ_v は画像計測により得られる渦度

分布のデータから渦糸に含まれる電子数を計測することにより決定する。背景渦度分布 $\zeta_b(r)$ 、とその Shear A の導出には画像計測により得られる渦糸入射前の背景渦のみの密度分布を用いる。実際には、図 5.1, 5.5 に示すように、背景渦度分布は渦糸との相互作用により時々刻々と、大きく変化する。従って、より現実的には、各時刻に観測された背景渦度分布から予測を行うべきであるかもしれないが、そもそも線形モデルでは変形するのは渦糸近傍のみで、背景渦全体の変形の効果は導入されていない。よってここでは ζ_b 、 A は初期の背景渦度分布で固定して計算を行なう。さらに計算を簡単化するため、まず背景渦度分布をその重心の周りで周方向に平均化して重心からの距離 r の関数として表し、これに $\exp f(r)$ でフィッティングを行ない、得られたフィッティング関数を用いて背景渦度分布を表すこととする。ただし、 $f(r)$ は r の多項式である。背景渦度は典型的には図 5.6 (a), 5.7 (a), 5.10 (a) に示した様な分布をしており、

$$n_b(r) = n_1 \exp \left[- \left(\frac{r}{b_1} \right)^2 \right] + n_2 \exp \left[- \left(\frac{r}{b_2} \right)^2 - \left(\frac{r}{b_3} \right)^4 \right] \quad (5.8)$$

で表すことが出来る。 $d\zeta_b/dr$ はこのフィッティング関数を微分することにより決定する。背景渦の作る回転速度場の Shear A も、 $n_b(r)$ から次式により計算する。

$$A(r) = r \frac{d\Omega}{dr} = \frac{r}{\varepsilon_0 B_0} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^2} \int_0^r dr r n_b(r) \right] \quad (5.9)$$

実験的に決定されたこれらのパラメータを式 (5.7) に代入し、これを 4 次の Runge-Kutta-Gill 法により数値的に解くことにより渦糸の運動を評価する。

図 5.1, 5.5 に示した二つの場合について、観測された渦糸の軌道と線形理論からの予測値を比較した結果を示す。この二つのケースでは背景渦度は同じ分布をしており、渦糸の循環と入射位置が異なっている。以降ではこの二つのケースを代表例として検討することとし、それぞれをケース 1, ケース 2 と呼ぶことにする。

図 5.10 (a) に背景渦度の初期分布を重心からの距離 r の関数として示す。全電子数は $N_b = 1.9 \times 10^8$ である。記号は画像計測で得た密度分布を周方向に平均化した値を表し、実線は式 (5.8) によるフィッティングの結果を表す。破線はフィッティング曲線から計算された背景速度場の Shear A である。

図 5.10 (b), (c) にケース 1, 2 について渦糸の軌道をそれぞれ示す。画像計測により得た渦糸の重心から渦糸までの距離 r を黒丸で表す。どちらのケースでも、渦糸は時間の経過とともに r を単調に減らしていき、 $r = 1$ mm 程度になったところで振動が観測される。時間が数百 μs を越えるとこの振動もなくなり、渦糸は渦背景渦の中心に落ち着く。実線は線形理論から予測される渦糸の軌道を表す。前述のように式 (5.7) 中の各値 Γ_p 、 $d\zeta_b/dr$ 、 A 、 l_s は実験から一意に定めることが出来る。しかし、 c についてはオーダーが 1 の定数としか言及されておらず、ここにパラメータの任意性が残っている。そこで、 $c = 0.5, 1, 2$ とした場合と、 $\ln(cr/l_s) = 1$ として c を含む \ln の項を無視した場合の、合わせて 4 通りの軌道を実線で示す。 c が大きくなるほど渦糸の移動速度は速くなる。これは式 (5.7) から明らかである。また、 c が大きくなるほど渦糸が背景渦の頂上近くまで到達出来るようになる。これは、渦糸と背景渦度の頂点の間の距離がセパトリクス半径 l_s の

$1/c$ になると、式 (5.7) の \ln の項がゼロとなり線形理論が破綻をきたすためである。 $\ln(cr/l_s) =$ とした場合には、 \ln の項が無視されるため、渦糸は背景渦の頂点まで登ることが出来る。

実験で観測される渦糸の軌道は背景渦の頂点から約 1 mm 程度の所までしか近づかない。この糸の到達距離に注目すると、 $c = 2$ とした場合が実験と最も良く合うが、その移動速度は実験値比べるとかなり速い。一方、初期の時間帯の渦糸の移動速度に注目すると、 $\ln(cr/l_s) = 1$ とした場合が最も良く一致する。図 5.6 (b), 5.7 (b) に示した実線も式 (5.7) に各実験で得られたパラメータを代入し $\ln(cr/l_s) = 1$ としてを計算した軌道である。これらの場合についても $\ln(cr/l_s) = 1$ すると予測値と観測値は良く一致する。以上の結果より、線形モデルにおいては $\ln(cr/l_s) = 1$ した場合が実験を最も再現することが確認できる。この結果を踏まえ、以降では線形モデルをいいる際には $\ln(cr/l_s) = 1$ とする。

ここで、図 5.6 (b), 5.7 (b) に示した渦糸の軌道に改めて注目する。これらのケースについても、図 5.10 (a), (b) に見られる渦糸の軌道の振動が現れる。このように渦糸の軌道には多くの合振動が観測される。一方、線形理論からの予測では振動が観測されることはない。従って、軌道の振動現象は線形理論で考慮されていない効果により発生していると考えられる。

さて、軌道の振動現象を除けば、実験的に観測された渦糸の運動と線形モデルから予測された渦糸の運動が良く一致することが確認されたので、次に実験に対し線形モデルがどの程度のパラメータ範囲で適用出来るかを確認する。そのために、背景渦度分布、渦糸の電子数、渦糸の初位置を変化させて実験を行い、それぞれのケースに対して線形理論により予想される軌道と比を行なった。ただし、実験ではその軌道に振動が観測されることから、半径距離にして $r/r_0 = \sim 90\%$ を移動するのに要する時間 τ について比較を行なった。ただし、 r_0 は重心から渦糸の入位置までの距離である。結果を図 5.11 に示す。横軸は線形モデルからの予測値 τ_m であり、縦が実験値 τ_{exp} である。記号は渦糸の初期位置の違いを表し、黒丸は $r_0/R = 0.13$ (カソード F) 白丸は $r_0/R = 0.26$ (カソード L) の場合である。渦糸の電子数は $N_v/10^6 = 1.6 \sim 17$ 、背景渦の子数は $N_b/10^8 = 0.78 \sim 7.0$ の間で変化させている。両者は係数 2 の違いで一致する。これは線形モデルが非常に単純化されたモデルであるにも関わらず、広いパラメータ範囲で実験を良く明出来ることを表している。

5.7 渦糸運動の速度の評価

前節の結果から、実験で観測される渦糸の運動はおおまかには線形モデルで説明出来ること確認されたが、同時に実験と線形モデルの間に二つの相違点を確認された。一つは実験において渦糸の軌道に振動が見られる点であり、もう一つは渦糸が背景渦度分布の頂点に近づくと実験の方が現象の進行が遅くなる点である。図 5.11 における係数 2 の差異はこれに起因すると考えられる。これは線形理論が非常に単純化されたモデルであり、実際の実験とはいくつかの相違があるからである。

とくに大きく異なるのは、線形モデルでは渦糸はその移動先で無摂動状態の背景渦に摂動を与えるとして、この摂動分による速度場しか評価していない点である。従って、理論モデルではそ

以前の時間に作った摂動分からの寄与は考慮されておらず、渦糸と背景渦の相互作用は渦糸周辺の局所的な領域についてしか考慮されていない。ところが実際には図 5.1, 5.5 に示すように、背景渦中に渦糸が作ったスパイラル状の構造は長時間にわたって存在しており、これらの構造が作る速度場も渦糸の運動に寄与するのは明らかである。

ここで、この実験で用いている渦が実際には電子の集まりであり、その運動は $E \times B$ ドリフトで表されることを思い出そう。電場は第 3 章に示した手法を用いることにより、観測された密度分布から計算することが可能である。従って場の計算を用いることにより、画像計測で得られる密度分布の情報を全て含んだ状態で渦糸の運動を評価することが可能である。以下で、電場分布から評価された渦糸の運動を観測された運動、線形モデルからの予測値と比較する。

場の計算の例としてケース 1 の $t = 30 \mu\text{s}$ の密度分布から計算したポテンシャルと電場を図 5.12 に示す。磁場は紙面に垂直奥向きで、各図の中心が z 軸と一致する。一辺の長さは 29.2 mm である。図 5.12 (a), (b) は図 5.1 に示した電子の密度分布 $n(x, y)$ とその摂動分 $\delta n(x, y)$ の分布である。

この密度分布がつくるポテンシャル分布 $\phi(x, y)$ を図 5.12 (c) に示す。接地された導体壁に囲まれた電子群がつくるポテンシャルなので、電子密度の高い中心軸付近で一番低く、導体壁ではゼロとなる。この図をみるかぎりでは渦度分布に対応するような微細なポテンシャル構造は認められない。

電場の動径方向成分 $E_r(x, y)$ の分布を図 5.12 (d) に示す。赤色が $E_r = 0$ であり、青くなるほど強い負の電場となる。 E_r はおおまかには、中心軸付近でゼロであり、動径方向の途中で極小値を持つリング状の分布となる。これは背景渦の動径方向に減少する密度分布に対応している。全体的には E_r は負の値、即ち中心軸方向を向いており、 $E \times B$ ドリフトにより渦糸が時計方向に回転していることが分かる。渦糸付近に強い電場がみられるが、これは背景渦の密度分布が作る電場に、その数倍高い密度を持つ渦糸の強い電場が加わるためである。背景渦が作る電場は渦糸を方位角方向に回転させ、渦糸が作る電場は渦糸自身を高速に自転させる。

図 5.12 (e) に電場の方位角方向成分 $E_\theta(x, y)$ を示す。前述の考察によると渦糸を背景渦度の高い側に押しやるのはこの $E_\theta(x, y)$ による $E \times B$ ドリフトである。緑色が $E_\theta = 0$ を表し、赤色は正の値を青色は負の値を表す。 E_θ を作るのは渦度分布の摂動分であり、 E_θ にはこの摂動分布に対応した構造が観測される。 E_θ は渦糸の上下(この場合は渦糸進行方向の前方と後方)で強く、渦糸を境にその符号が反転する。この渦糸付近の E_θ の反転は渦糸のつくる強い電場によるものであり、やはり渦糸を自転させる効果しかない。

渦糸に働く電場は次のようにして評価した。実験において渦糸は有限の大きさを持ち、また計算される電場には渦糸自身の作る電場も含まれる。従って、ここでは渦糸内部の電場の平均値 \bar{E} を渦糸に作用する電場と仮定して渦糸の運動を評価する。この操作により、強度は強いが渦糸を自転させる効果しかない渦糸の自己場を相殺することが出来る。電場の平均化を行なう範囲は、渦糸の渦度がその最大渦度の $1/e$ 以上の範囲とする。ケース 1 について渦糸内の電場の平均値 \bar{E} の動径方向成分 \bar{E}_r (■) と方位角方向成分 \bar{E}_θ (□) を重心からの距離 r の関数として図 5.13 に示す。実線は渦糸入射前の背景渦度分布 $\zeta_{b0}(x, y)$ から評価した電場の動径方向成分 E_{r0} を表す。 E_{r0} と \bar{E}_r は良く一致しており、渦糸の自己場がキャンセルされていることが確認出来る。また、 \bar{E}_r に対

する摂動分の寄与は小さいことが分かる。一方、 \bar{E}_θ は \bar{E}_r に比べ 1/10 程度と小さいがゼロではない。この \bar{E}_θ により渦度が動径方向に駆動されると考える。

ケース 1 について、 \bar{E}_θ から評価した $E \times B$ ドリフト速度 $v_d(\square)$ を観測された渦糸の軌道から評価した動径方向の移動速度 v_o (実線)、線形理論から予測される速度 v_m (破線) とともに時間の関数として図 5.14 (a) に示す。ここで、 v_o は観測された軌道 (○) に対して多項式によるフィッティングを行ない (細い実線)、その回帰曲線を微分することにより評価した。 v_o は時間の経過にともない増加し、 $t = 30 \mu\text{s}$ 程度で最大となる。その後、緩やかに減少し、 $t = 50 \sim 70 \mu\text{s}$ では正となる。 v_o が正となるのは渦糸が背景渦の外側に向かって動くときである。これに対し、 v_m は $t = 30 \mu\text{s}$ までの比較的初期の時間帯においては v_o と良く一致する。しかし、 v_o の増加がすぐに頭打ちになるのに対し、 v_m は増加をつづけ $t = 35 \mu\text{s}$ では v_m は v_o の 4 倍程度大きな値となる。その結果、線形モデルでは速く渦糸が背景渦の中心へと到達し、 $t = 40 \mu\text{s}$ には $v_m = 0$ となる。当然、 v_m が正となることはない。一方、 v_d は若干のバラつきがあるもの v_o と良く一致し、 $t = 50 \sim 70 \mu\text{s}$ の時間帯では v_d が正の結果も得られる。

式 (5.7) より、渦糸の速度は $\zeta'_b(r)$ と $A(r)$ の関数で与えられるので、各方法で評価した速度を時間の関数として比較するよりも、むしろ r の関数とする方が適当である。各速度を動径方向の距離の関数として図 5.14 (b) に示す。渦糸は背景渦度分布の周辺部から背景渦の中心部に向かって移動するので、現象は右から左に向かって進行する。 v_o と v_d は良く一致すること、また v_o と v_m は渦糸入射直後には比較的良く一致するが、背景渦の中心に近づくとその差が大きくなることが改めて確認出来る。

同様に、ケース 2 について各速度を図 5.15 に示す。ケース 1 との違いは渦糸の入射位置であり、ケース 2 の方がより背景渦の中心近くに入射している。この場合も v_o と v_d は良く一致する。ただし、ケース 1 に比べ、 v_o と v_m も良く一致する。しかし、背景渦の中心付近では v_m の方が v_o や v_d に比べ速くなるのはケース 1 と同じである。

ケース 1、ケース 2 については速度の観測値 v_o と $E \times B$ ドリフト速度 v_d は良く一致し、 v_m は背景渦中心付近ではこれらより速くなることが確認された。この傾向を確認するために背景渦度分布、渦糸の電子数、渦糸の初期位置を変化させた場合について各速度を評価した。

図 5.16 (a) に重心からの距離 r を媒介変数として、 $v_o(r)$ を $v_d(r)$ の関数として示す。記号は渦糸の入射位置 r_0 の違いを表し、黒丸は $r_0/R = 0.13$ を、白丸は $r_0/R = 0.26$ の場合を表す。実線は $v_o = v_d$ を表す。 v_o と v_d はほぼ実線上に乗っており、良く一致することが確かめられる。また、渦糸の軌道が振動して背景渦の外側に向かって動く時、即ち正の速度を持つときには v_d も正の値を持つことも確認出来る。この場合、入射位置による傾向の違いも殆ど見られない。この結果から、 $E \times B$ ドリフトを用いて渦糸の運動を評価する方法が極めて有効であることがわかる。

同様に、 v_o を v_m の関数として図 5.16 (b) に示す。線形モデルでは渦糸の軌道に振動は表れないので、速度がゼロ以下の場合についてのみ表示してある。ほとんどの点が直線より上方に分布しており、 v_o に比べ v_m の方が速いことが分かる。ただし、黒丸に比べ白丸の方が明らかに直線から離れた所に分布をしている。従って、背景渦の中心からより離れた所に渦糸を入射すると理論値と実験値のズレが大きくなる傾向があることがわかる。図 5.16 (c) には v_d を v_m の関数として

示す。図 5.16 (a) に示すように $v_o \approx v_d$ であるので、(b) の場合と同様に、 v_d の方が v_m よりも遅く、背景渦度分布の端に入射した場合の方がそのズレは大きくなる。

ここで、実験的に評価された渦糸の速度 v_o , v_d と線形モデルから予測される速度 v_m の差異の原因について検討する。もう一度、図 5.14 (b) に注目しよう。渦糸が背景渦に入射された直後は、 v_o と v_m は比較的一致しているが、渦糸が背景渦の中心に近づくほど両者のズレが大きくなるのがわかる。そこで、渦糸 L を用いた場合 (図 5.16 では○) だけについて、図 5.17 に v_o を v_m の関数として示す。記号は重心からの距離 r を表し、 $0.9 \geq r/r_0 > 0.7$ (○), $0.7 \geq r/r_0 > 0.5$ (△), $0.5 \geq r/r_0 > 0.3$ (□), $0.3 \geq r/r_0 > 0.1$ (×) である。渦糸が背景渦の中心に近づくにつれて両者のズレが大きくなることが確認できる。

以上の結果から、観測される渦糸の運動と線形モデルから予測される運動の相違は、渦糸の運動がそれ以前の時間に背景渦中に誘起した構造がつくる速度場の影響と考えられる。ここで、図 5.1, 5.5 の下段 (背景渦度の摂動成分) を改めて良く見てみる。時間の経過とともに背景渦中に誘起されたスパイラル状の構造が発達し、また、初期には渦糸の前方にあった渦孔が、時間が経つにつれて渦糸の公転面外側 (側面) へと移動していくことを確認出来る。渦孔が渦糸の側面に移動すると、その後は渦糸から離れることなくペアで運動する様子が観測される。渦孔は渦糸とは反対符号の渦度をもつ渦と考えることができ、背景渦度の山をゆっくりと下ることが知られている。このことから、渦糸と渦孔が直接あるいは背景渦を介して相互作用を行なうため、渦糸の運動が減速されると考えられる。特に、図 5.2 の $t = 50 \mu\text{s}$ を見ると渦孔が強く発達しており、スパイラル状の腕を変形させている。この時間帯は渦糸が背景渦の外側に向かって動いている時であり、このことから渦孔が渦糸の運動に大きな影響を与えることが伺える。このように、渦糸の運動が背景渦中に誘起した構造が渦糸のその後の運動に大きな影響を与え、それは渦糸の運動を抑制する方向に作用すると考えられる。

さて、第 5.4 節において、渦糸が背景渦の渦度を局所的に平均化するため、背景渦の慣性モーメントが増加し、これを補償するために渦糸が重心に近づく、との解釈も可能であることを記した。ここで、ケース 1 における、実際の慣性モーメントの時間変化を図 5.18 に示す。まず、図 5.18 に初期値で規格化した全電子数 \tilde{N} (●) と規格化された慣性モーメント \tilde{I} (■) の時間変化を示す。いずれも 2 % 程度のバラ付きしかなく、良く保存されている。

図 5.18 (b) に渦糸全体の慣性モーメント (■) と渦糸の慣性モーメント (□) の時間変化を示す。破線は渦糸の軌道を表している。渦糸の持つ慣性モーメントは r の減少とともに 3 桁程度減少する。しかし、渦糸の慣性モーメントは渦糸全体の慣性モーメントに比べ、二桁以上小さく、この変化は実験の再現性の中に埋もれてしまう。

5.8 回転座標系で見たポテンシャル分布

背景渦度の勾配を登るように渦糸を駆動する双極渦構造が背景渦中に誘起されるためには、図 5.8, 図 5.9 に示したような流線の構造が渦糸周りに生じていることが必要である。ここでは、場の計算を用いて渦糸の実際のポテンシャル構造について検討する。

図 3.1 (c) や図 5.12 (c) に示したように渦度分布から計算されたポテンシャル分布からは、渦度分布に対応する細かな構造を抽出することが出来ない。これは、渦系全体が高速で回転しているために、それよりも遅い変化がかき消されてしまうためである。このような場合は適当な回転座標系によってポテンシャルを観測することにより、遅い変化を際立たせることが出来る [16]。

ここでは方位角方向の渦系運動と同じ速度で回転する座標系でポテンシャルを観測する。そのために、まず渦系の方位角方向の速度を評価する。渦系の動径方向速度を評価したのと同様の手法を用い、観測された密度分布から計算された電場分布を渦系の最大密度の $1/e$ 以上の密度となる範囲で平均化して、その動径方向成分 \bar{E}_r による $E \times B$ ドリフト速度を渦系の方位角方向の速度 v_θ とする。

$E \times B$ ドリフトによる渦系の方位角方向の速度は $v_\theta(r_v) = \bar{E}_r(r_v)/B_0$ であり、従って回転速度は $\omega_0 = \bar{E}_r(r_v)/r_v B_0$ となる。ただし、 $r_v = |r_v|$ は渦系の重心から渦糸までの距離である。よって、渦糸の公転運動の角速度 ω_0 で回転する座標系を考えると、各場所での方位角方向の速度 $v_\theta(r)$ は

$$v_\theta(r) = r\omega_0 = r \frac{\bar{E}_r(r_v)}{r_v B_0} = \frac{E_\omega(r_v)}{B_0} \quad (5.10)$$

ここで、 E_ω はこの回転する系がもつ電場であり

$$E_\omega(r) \equiv \frac{\bar{E}_r(r_v)}{r_v} r \quad (5.11)$$

である。よって、この系のポテンシャルは次式で与えられる。

$$\phi_\omega(r) \equiv - \int_b^r E_\omega(r) dr = - \frac{\bar{E}_r(r_v)}{2r_v} (r^2 - b^2) \quad (5.12)$$

ただし、 b は任意の基準点の座標である。従って、回転座標系で見たポテンシャル $\tilde{\phi}$ は、

$$\tilde{\phi} = \phi(r, \theta) - \phi_\omega(r) = \phi(r, \theta) + \frac{\bar{E}_r(r_v)}{2r_v} (r^2 - b^2) \quad (5.13)$$

となる。ここで、簡単のために回転座標系でみたポテンシャル $\tilde{\phi}$ が渦糸の中心 (x_v, y_v) でゼロとなるように b を決定する。

$$b^2 = r_v^2 + \frac{2r_v}{\bar{E}_r(r_v)} \phi(x_v, y_v) \quad (5.14)$$

これより、回転座標系でみたポテンシャル $\tilde{\phi}$ として、次の表式を得る。

$$\tilde{\phi}(x, y) = \phi(x, y) - \phi(x_v, y_v) + \frac{\bar{E}_r(r_v)}{2r_v} (r^2 - r_v^2) \quad (5.15)$$

図 5.19 (a) に例として、ケース 1 の $t = 18 \mu\text{s}$ の密度分布から計算したポテンシャルを示す。破線は観測された渦度分布の断面図であり、 $r = 9.8 \text{ mm}$ の鋭い分布が渦糸を表す。実線は観測された密度分布から計算された実験室系で見たポテンシャル ϕ の断面図である。 ϕ は中心部では下に凸であるが、端の方では密度が急激に減少するために上に凸の分布となる。良く見ると、渦糸周辺で ϕ の分布は変形していることがわかる。しかし、その変形は非常に小さい。一点鎖線は式 (5.12) から決定した渦糸の公転運動の速さで剛体回転する系のポテンシャル ϕ_ω である。 ϕ_ω は渦糸の中心で ϕ と接する放物線となる。図 5.19 (b) に回転座標系で見たポテンシャル $\tilde{\phi}$ (実線) を示す。渦

系の近傍でポテンシャルが減少しており、実験室系ではほとんど確認出来なかったポテンシャル構造があることが分かる。

ケース 1, 2 について実験室系で観測したポテンシャル $\phi(x, y)$ と回転座標系で観測したポテンシャル $\tilde{\phi}(x, y)$ を渦度分布 $\zeta(x, y)$ と重ねて図 5.20, 5.21 にそれぞれ示す。実線が等ポテンシャル線 (流線) である。矢印は $E \times B$ ドリフト速度の方向を示す。色調の変化が渦度分布を示す。

図 5.20, 5.21 の上段は実験室系で観測した等ポテンシャル線である。どちらのケースも、等ポテンシャル線は同心円状の構造をしており、際立ったポテンシャル構造は観測されない。ただし、渦糸周辺では等ポテンシャル線はわずかに歪んでいる。これは渦糸のポテンシャルに起因する構造であるが、背景渦に比べ数倍という高い密度を持つ渦糸でもこの程度のごくわずかな歪みしか作ることが出来ない。従って、大きくても背景渦度の数十 % 程度しかない背景渦度の摂動分の作るポテンシャル構造は実験室系では観測することが出来ない。

下段は渦糸の公転運動と同じ速度で回転する座標系でみたポテンシャル分布 $\tilde{\phi}$ である。初期の時間帯には渦糸の周りに閉じた等ポテンシャル線が存在し、渦糸の公転面内側と外側にそれぞれセパトトリクスが存在することが確認出来る。このポテンシャルの構造は図 5.8 下段に示したポテンシャル構造と良く一致する。渦糸の運動によって生じるスパイラル状の密度の腕が、等ポテンシャルに沿って発達していく様子も観測される。このように、実験室系では観測できなかったポテンシャル構造が回転座標系では明確に観測することが可能となる。従って、回転座標系で流線を検討することは、渦運動を解析する上で非常に有効な手段であるといえる。

図 5.20, 5.21 より、時間の経過とともに内側のセパトトリクスが消失することが分かる。図 5.22 にセパトトリクス半径 l_s の変化を重心からの距離 r の関数として示す。上段はケース 1, 下段はケース 2 の場合に対応する。

実線は線形モデルで用いたセパトトリクス半径 $l_s = \sqrt{\Gamma_v/2\pi A}$ を表す。渦糸が背景渦の頂点に近づくと背景渦の Shear A が小さくなるためセパトトリクス半径は急激に増加する。一点鎖線と実線の交点は重心から渦糸までの距離 r とセパトトリクス半径 l_s が等しくなる点を表す。これは線形モデルで $c = 1$ とした場合に渦糸が到達出来る距離を表す。

回転座標系で見たポテンシャル分布 $\tilde{\phi}$ から評価したセパトトリクス半径 l_s を三角で表す。内側に出来るセパトトリクスまでの距離を \blacktriangle で、外側に出来るセパトトリクスまでの距離を \triangle で表す。渦糸が背景渦の端にあるときは、実験で観測されるセパトトリクス半径と線形モデルのセパトトリクス半径は良く一致する。しかし、渦糸が背景渦の中心にセパトトリクス半径程度まで近づくと ($r \approx l_s$) 内側のセパトトリクス (\blacktriangle) は消失する。これは渦糸が背景渦の頂点に近づき、セパトトリクスが背景渦の頂点を越えてしまうためである。一方、外側のセパトトリクスは内側のセパトトリクスが消失した後も存在し、線形モデルのセパトトリクス半径と良く一致する。

5.9 長いタイムスケールでの渦度分布の発展

渦糸が背景渦を登りきった後に、渦度分布がどのように変化するか簡単に触れておく。図 5.2 に図 5.1 のさらに後の時間帯における渦度分布の変化を示す。渦糸の近くにあった、渦孔が渦糸のそ

ばをはなれ背景渦の山を下っていく。渦糸が背景渦度の山に登る際に形成したスパイラル構造は時間の経過とともにだんだんと巻き込みが強くなり互いの距離を近づけていく。その過程でスパイラル状の腕が波を打つ減少が観測される。これは、前述の回転速度の Shear に起因する K-H 不安定性により生じる。この波打ち減少や、巻き込みが更にきつくなり腕同士が相当の距離まで接近すると腕は合体する。

ただし、二次元 Euler 流体では渦同士の合体は生じない。従って、実験でみられるような渦度の腕の合体が生じるのは、純電子プラズマと二次元 Euler 流体の等価性が何処かで破綻しているためと考えられる。その原因としては、腕同士の距離が Larmor 半径より近づいたり、腕同士の相互作用により Larmor 半径以下の微小な構造が形成された可能性がある。第 1 章で記したよう、電子プラズマの運動と二次元 Euler 流体の等価性が成り立つのは $E \times B$ ドリフトに注目した場合である。従って Larmor 半径以下の運動に関してはこの等価性は成立せず、渦同士が合体することも考えられる。実験条件ではラーマ半径は約 $70 \mu\text{m}$ であり、画像計測の空間分解能は $140 \mu\text{m}$ であるので、粗視化によりこのような構造が実際に形成されていることを直接確認することは出来ない。しかし、渦中に微細な構造が形成されていることから考えても、その可能性は高いと考える²。

スパイラル状の腕同士が合体することにより、背景渦中に多くの渦孔が形成される。この渦孔はゆっくりと背景渦の外に吐き出されたり、合体したりしながらその数を減らしていく。渦度の穴が背景渦の山を下る現象は、前述のようにこれを負の渦度をもつ渦と考えることで理解することが出来る [11, 12]。やがて背景渦中に渦度の山を挟んで大きな二つの空隙が残る「Cat's Eye」と呼ばれる構造を形成する。この構造は安定であり、非中性プラズマの実験ではしばしば観測されている [7]。また Euler 流体渦の数値計算においても形成が確認されている [17]。最終的にはこの Cat's Eye 構造も無くなり、半径方向に単調に減少する渦度分布へと落ち着く。

5.10 まとめ

この章では、背景渦度分布中の渦糸の運動について報告した。

背景の渦度分布が勾配を持つときには、渦糸は背景渦度の高い方向へと移動し、同時に背景渦中に螺旋状の構造が生成されることを観測した。渦糸の移動速度が、背景渦度分布の勾配、渦糸の循環（電子数）に対し増加関数となることを実験的に確認した。渦糸の運動を背景渦中に生じる渦度構造が作る速度場から説明し、この構造が渦糸と背景渦の相互作用により誘起されることを示した。

観測された渦糸運動を線形モデルと定量的に比較し広いパラメータ範囲で良い一致を得た。しかし、実験では渦糸の軌道に振動が観測され、また背景渦の中心付近で現象の進行が遅くなる等の線形モデルとの相違点も観測された。一方、密度分布から評価した電位分布を用いると渦糸の運動を良く再現できることを示した。この結果から、実験と線形モデルの相違は背景渦度分布の非線形な発展に起因することが確かめられた。またこれは、電場から渦運動を評価する手法が極めて有効であることを示唆している。

²二次元 Euler 流体と純電子プラズマ系の等価性については詳しくは第 6.4 節で議論する。

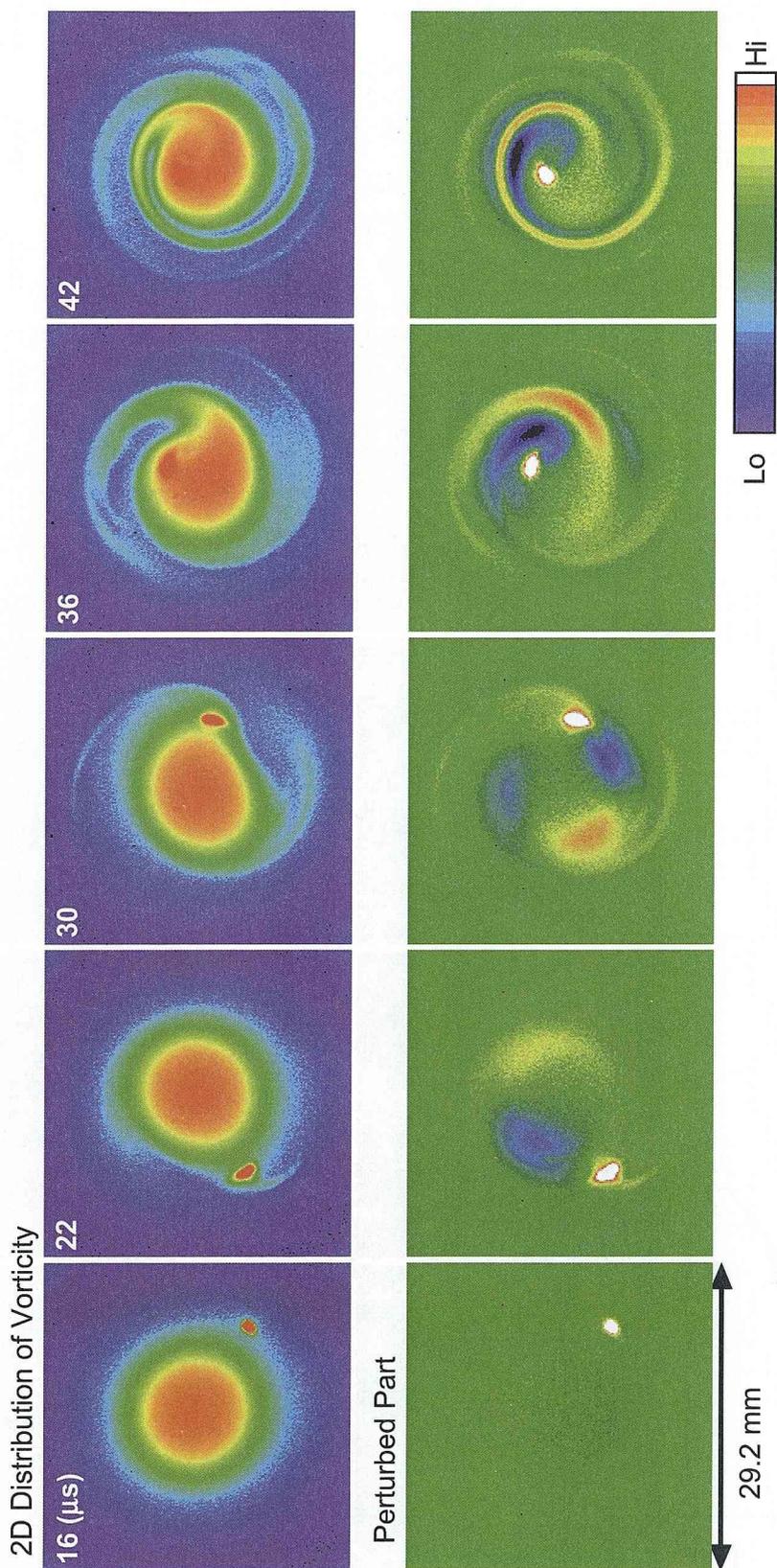


図 5.1: 実験的に観測された渦度分布の時間発展. 背景渦の電子数は $N_b = 1.9 \times 10^8$, 渦糸の電子数は $N_L = 3.0 \times 10^6$ である. 上段は全渦度の分布を, 下段は初期の背景渦度分布からの摂動成分を示す.

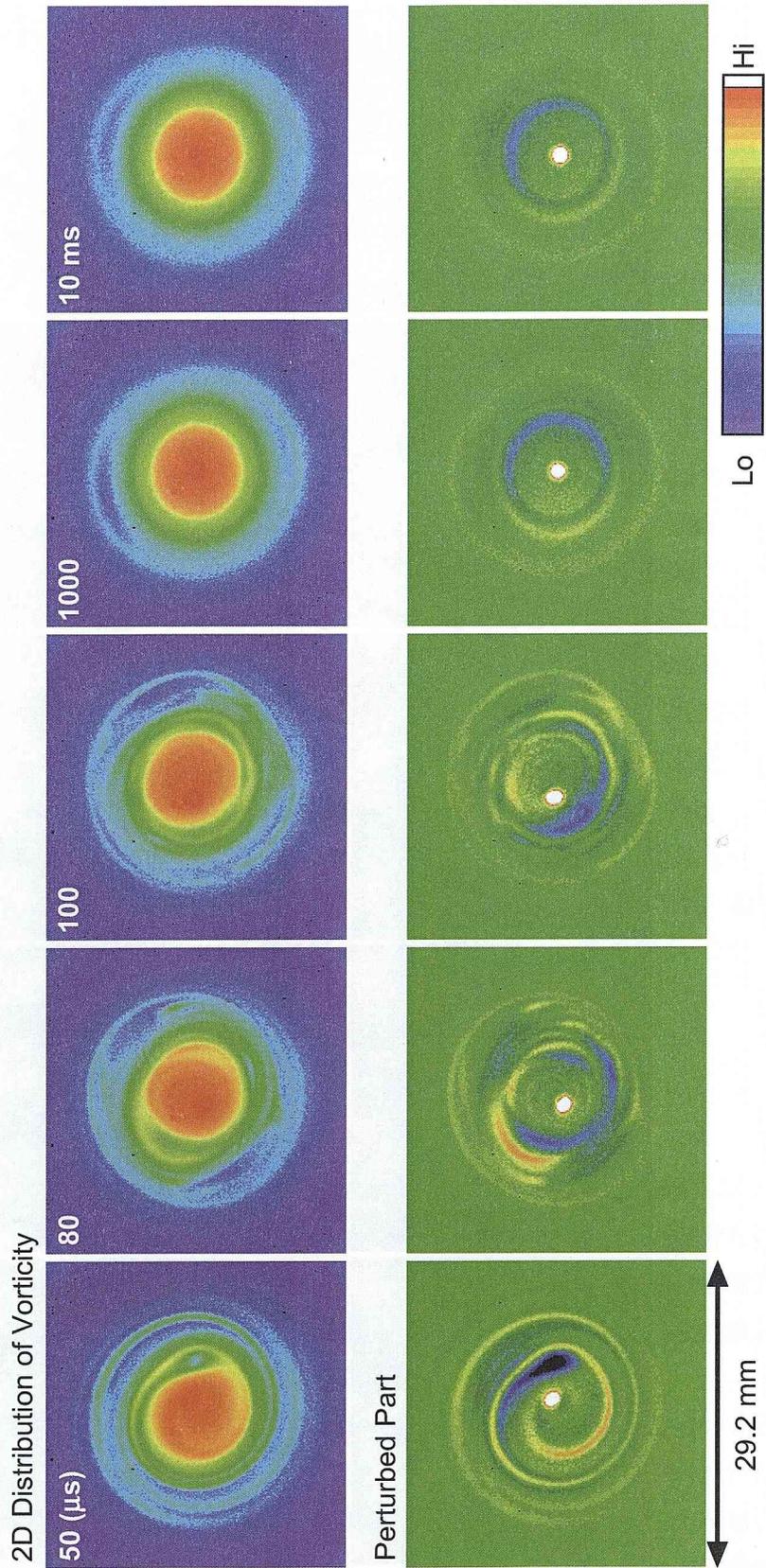


図 5.2: 実験的に観測された渦度分布 (上段) と背景渦度分布の摂動成分 (下段) の時間発展. 図 5.1 の続きである.

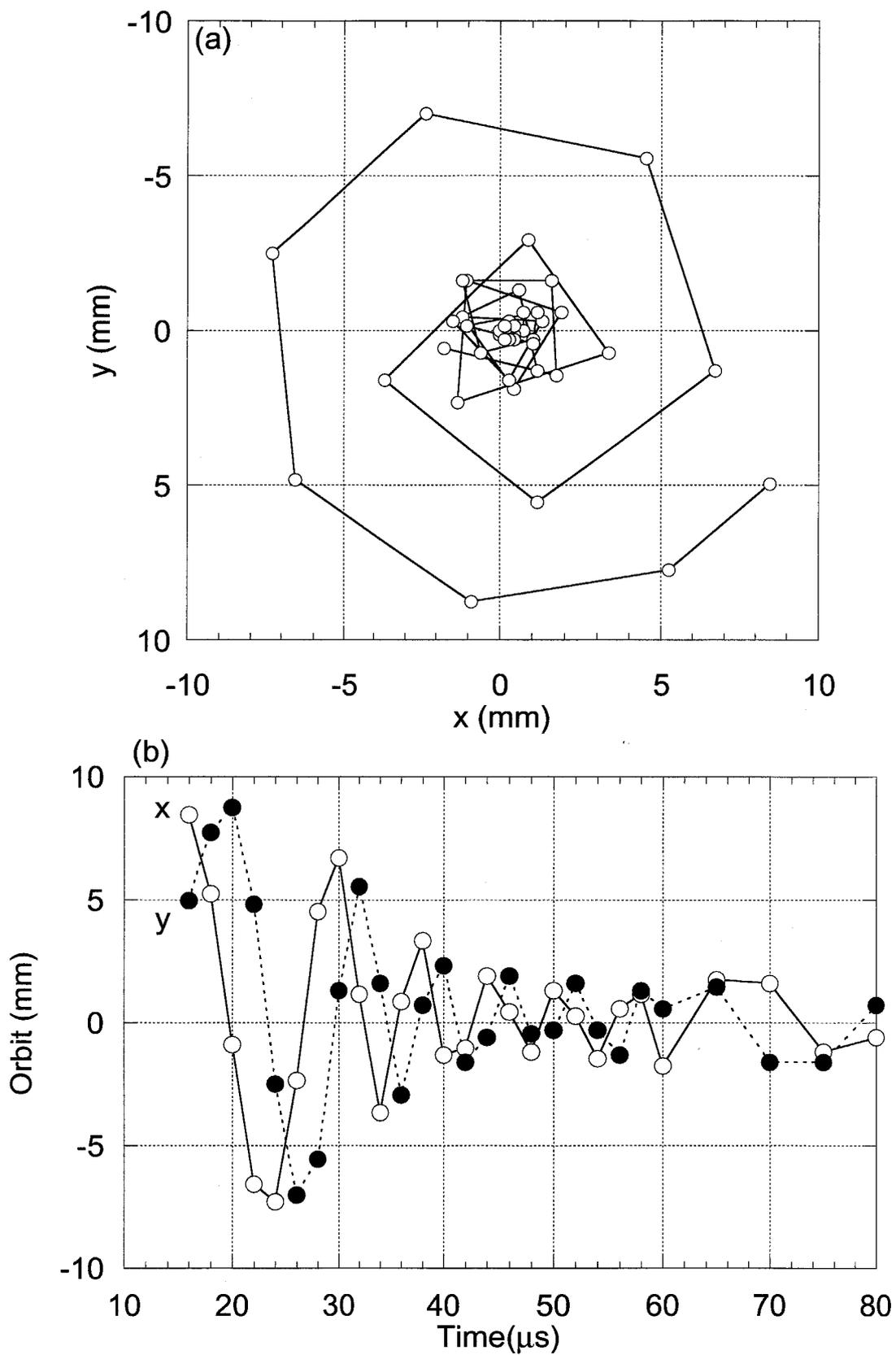


図 5.3: (a) 背景渦中の渦糸運動の軌道. (b) 同じく渦糸の軌道を時間の関数として示す.

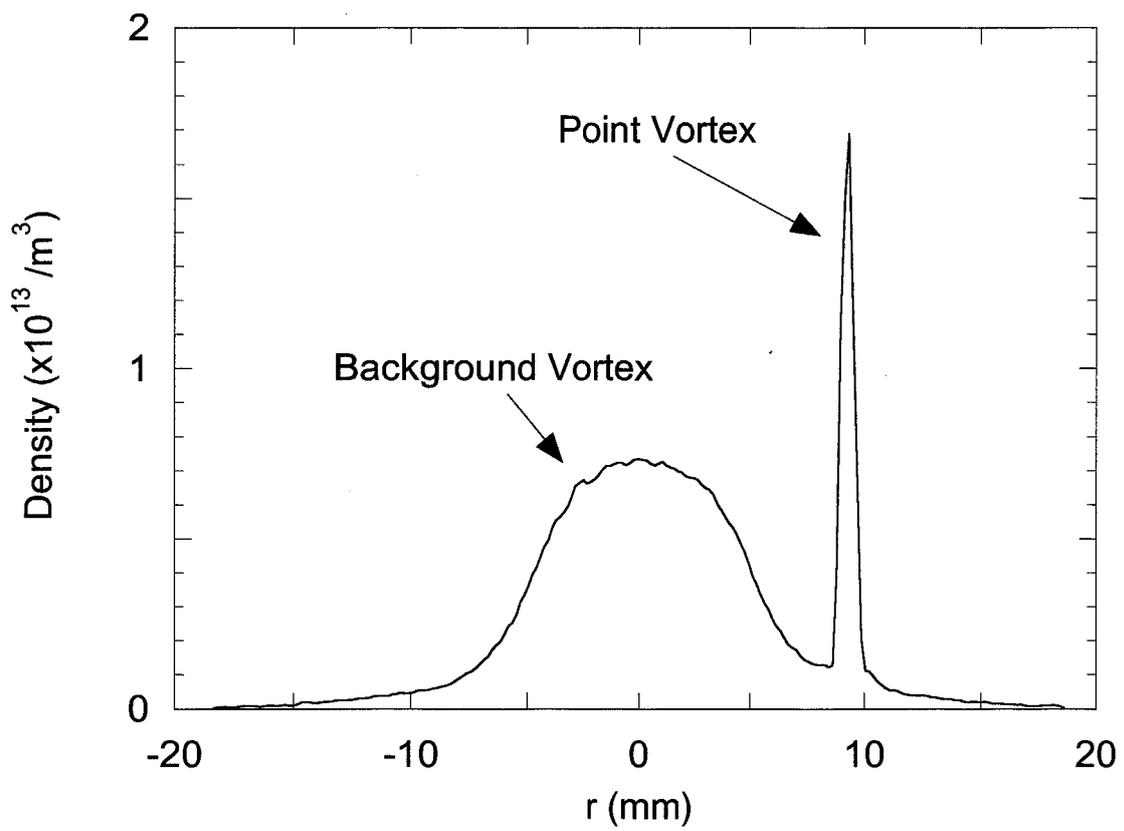


図 5.4: 図 5.1 の $t = 18 \mu\text{s}$ における電子密度分布の断面図.

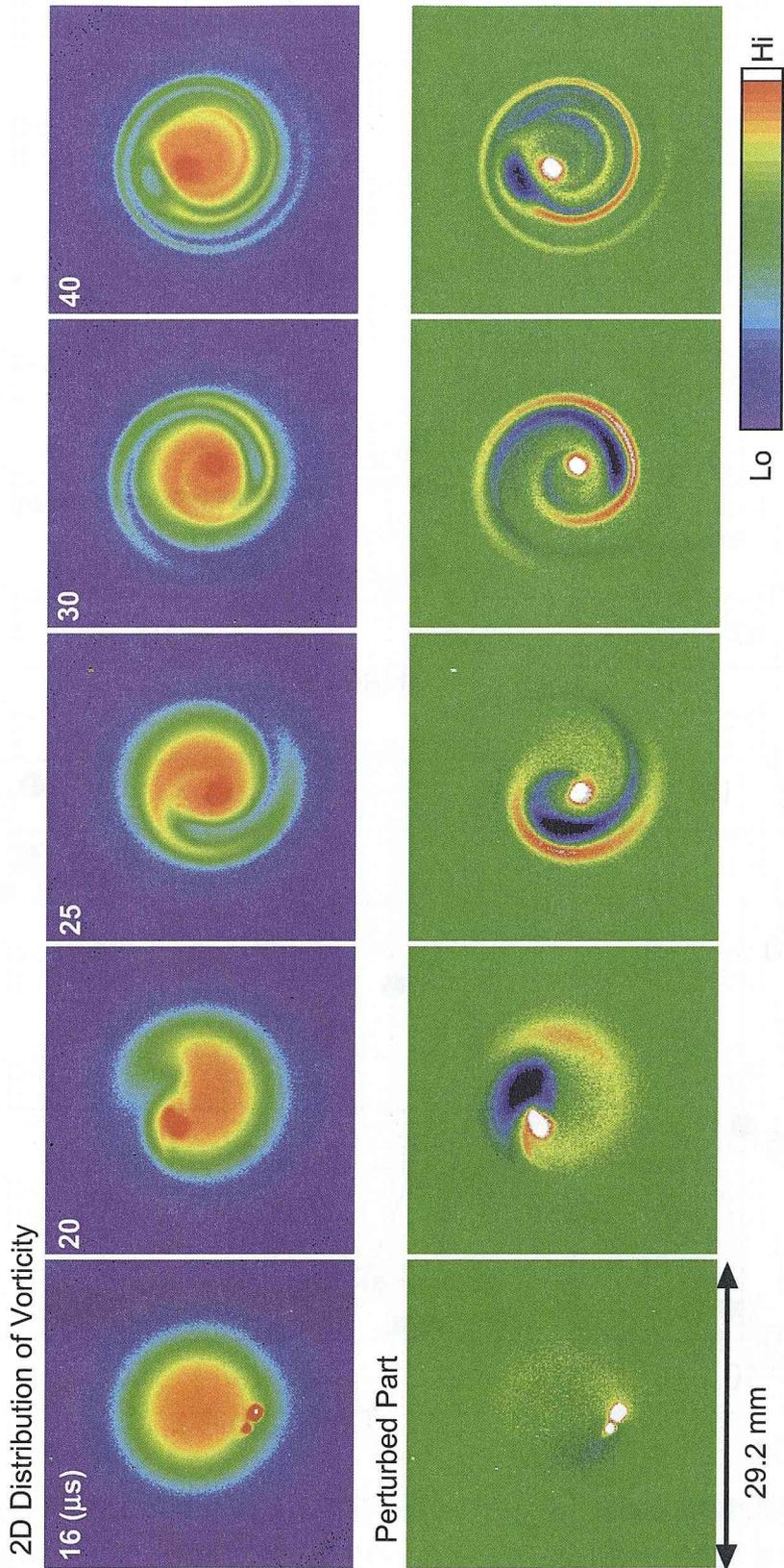


図 5.5: 実験的に観測された渦度分布の時間発展. 背景渦の電子数は $N_b = 1.9 \times 10^8$, 渦糸の電子数は $N_F = 4.7 \times 10^6$ である. 上段は全渦度の分布を, 下段は初期の背景渦度分布からの摂動成分を示す.

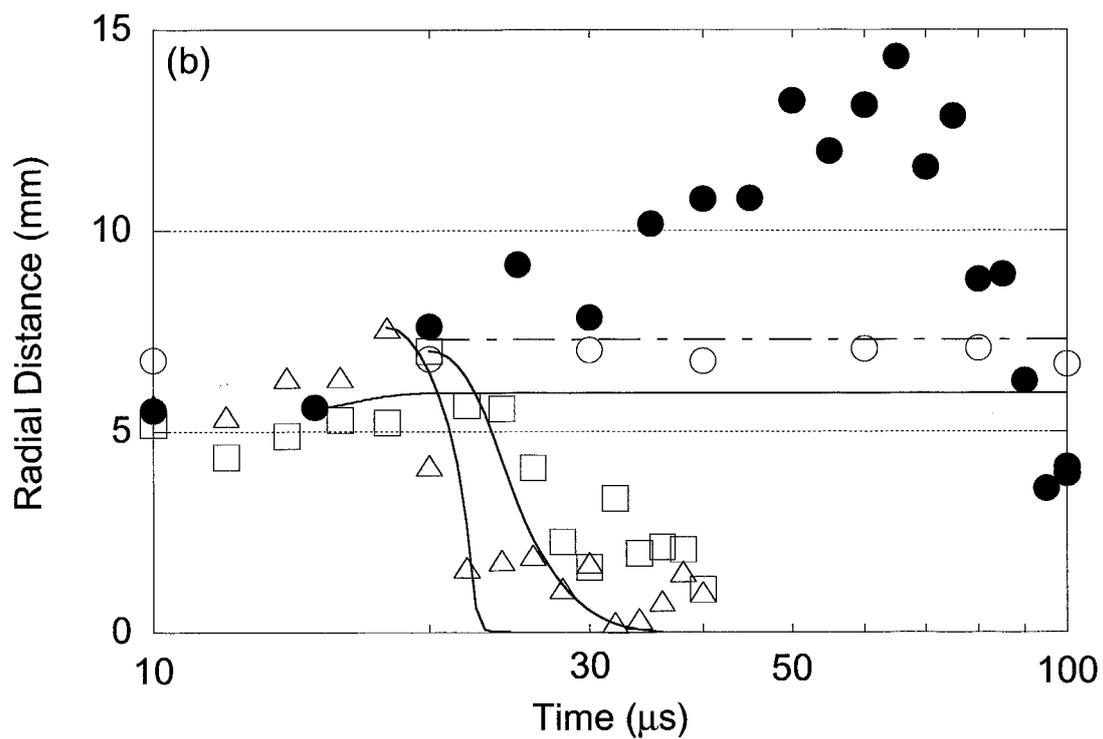
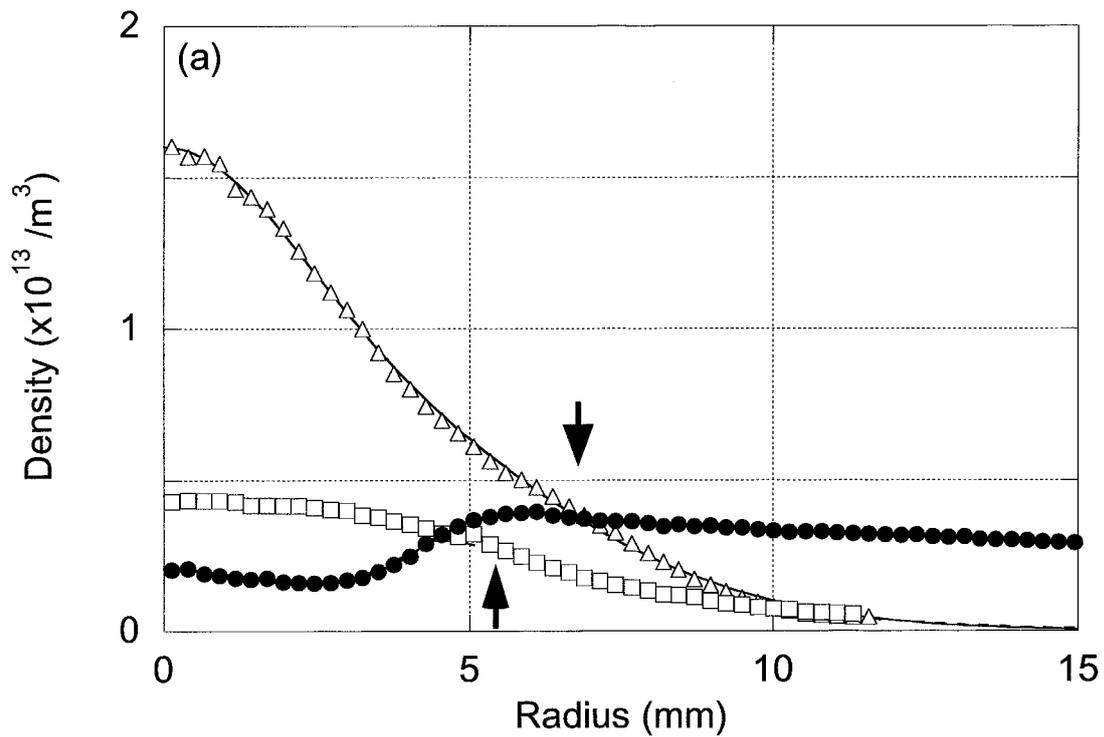


図 5.6: (a) 背景渦の初期渦度分布. それぞれの電子数は $N_b/10^8 = 3.5(\triangle)$, $1.8(\square)$, $8.0(\bullet)$. 渦糸の入射位置を下向きの矢印 (\triangle \square) と上向きの矢印 (\bullet) で示す. (b) 渦糸の重心から渦糸までの距離の時間変化. 渦糸の電子数は $N_v = 1.2 \times 10^7$. 記号は入射した背景渦度分布の違いを表し (a) の記号と対応している. 真空中の渦糸の運動を \circ で表す. 実線は線形モデルにより予測された渦糸の軌道を表す.

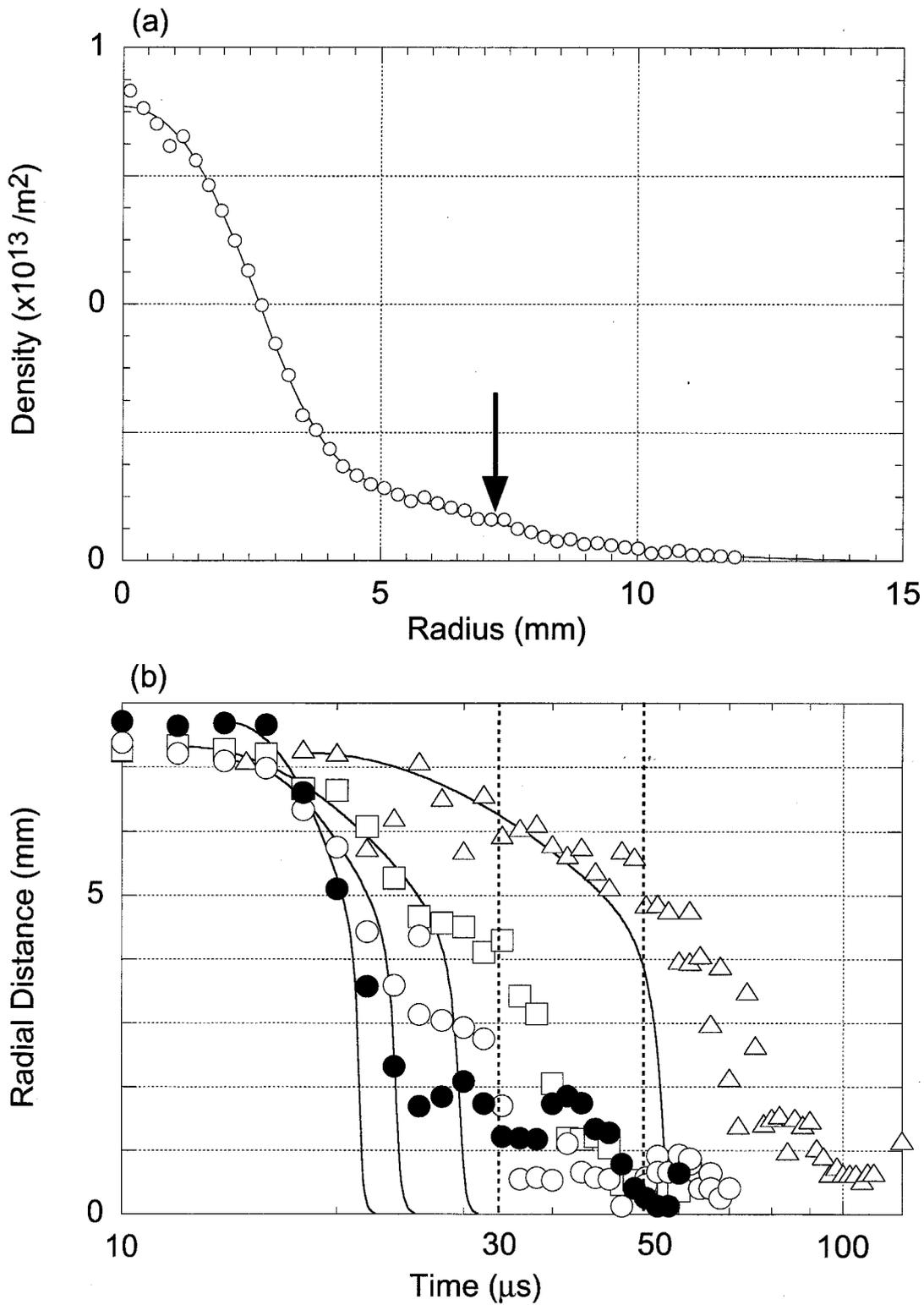


図 5.7: (a) 背景渦度の初期分布. 電子数は $N_b = 7.8 \times 10^7$. 矢印は渦糸の入射位置を表す. (b) 渦糸の重心から渦糸までの距離を時間の関数として示す. 渦糸の電子数は $N_v/10^6 = 1.6(\triangle)$, $4.4(\square)$, $8.7(\circ)$, $17(\bullet)$. 実線は線形モデルにより予測された渦糸の軌道を表す.

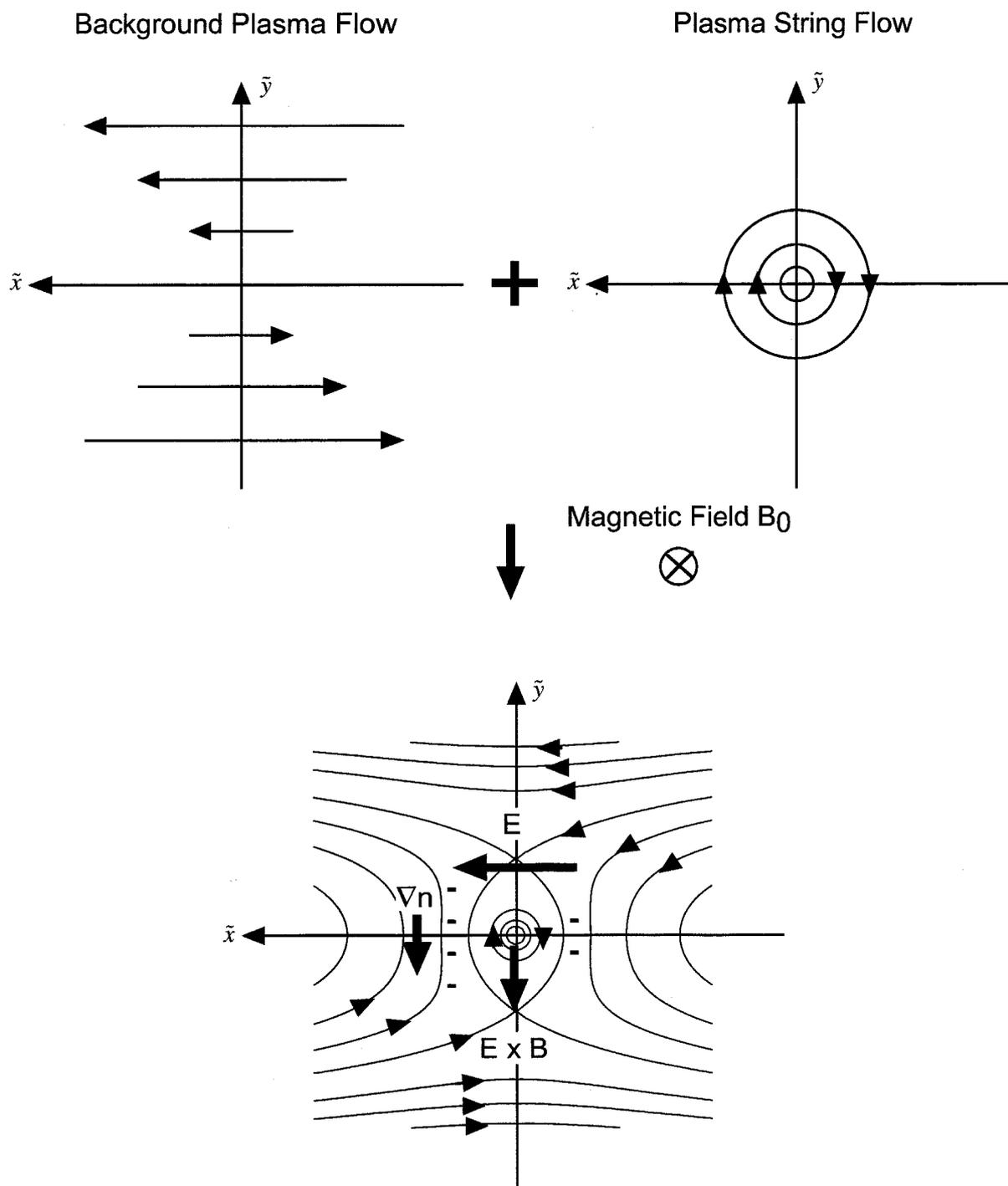


図 5.8: 渦糸と一緒に動く系で見た等ポテンシャル面の模式図. 上段左は背景渦が作る速度場. 上段右は渦糸が作る速度場. 下段は両者を合成した速度場. \tilde{x} , \tilde{y} は局所的な座標系で, \tilde{x} は方位角方向と逆向きを, \tilde{y} は動径方向を向く.

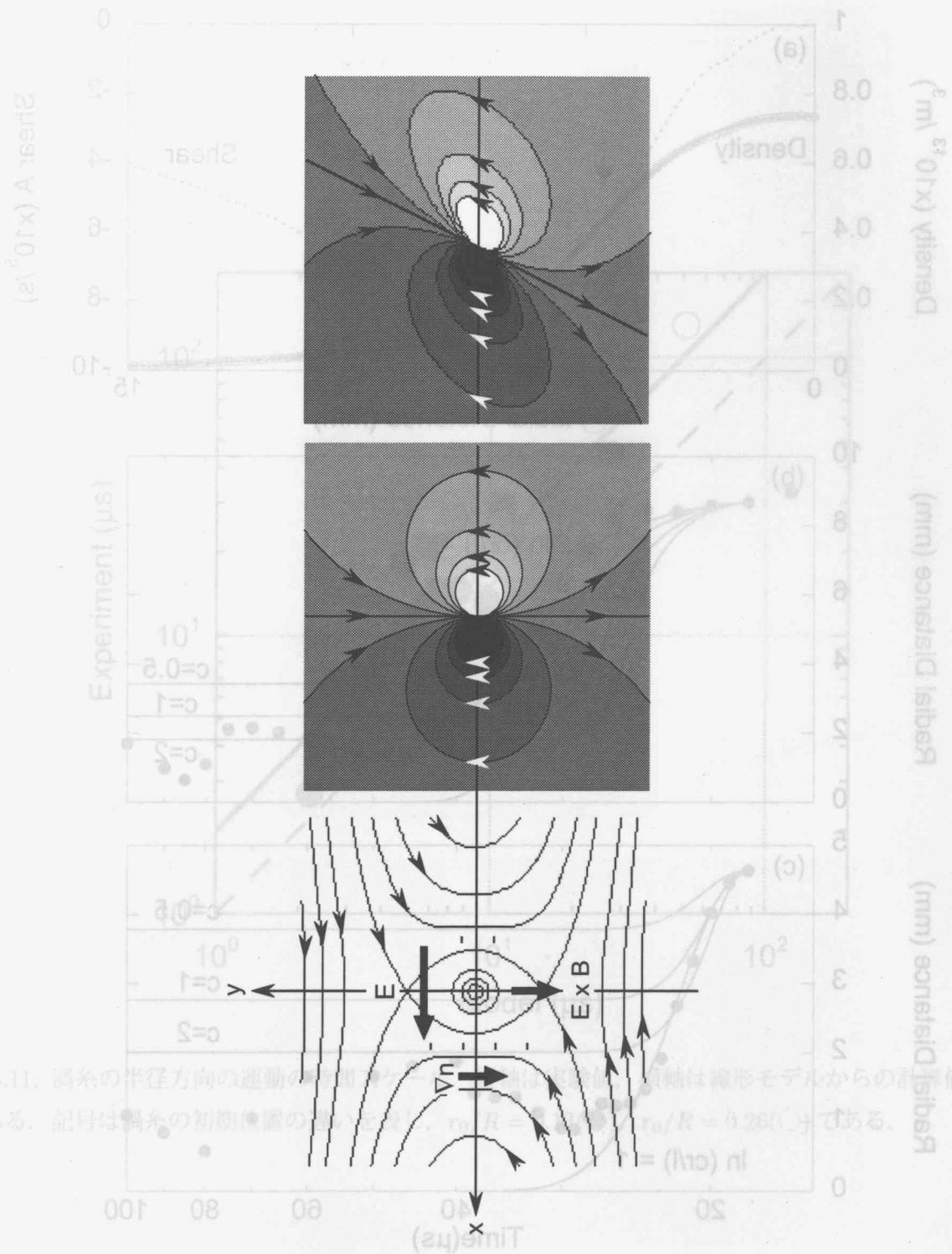


図 5.11: 渦糸の半径方向の運動... 線形モデルからの評価... 記号は渦糸の初期位置の... $r_0/R = 0.26$...

図 5.9: (a) 渦糸と一緒に動く系で見た等ポテンシャル面. (b) 線形モデルにより評価した $A = 0$ の場合における背景渦度の摂動成分. (c) 同じく $A \neq 0$ の場合における渦度の摂動成分.

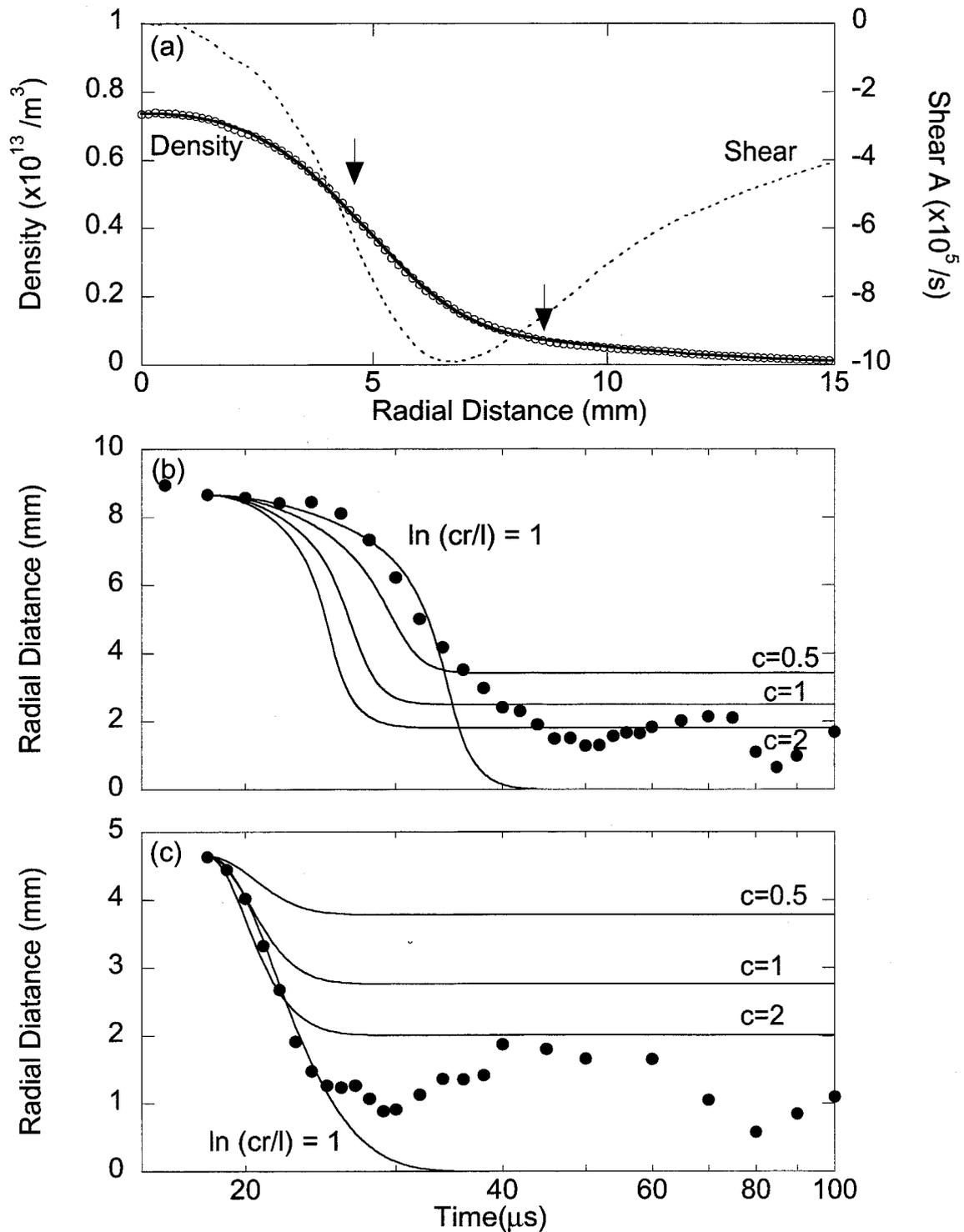


図 5.10: (a) 背景渦度と背景渦の作る回転速度場の Shear A の初期分布. 矢印は渦糸の入射位置を表す. (b) 渦糸 ($N_L = 3.0 \times 10^6$) の動径方向の運動の軌道. 記号は観測された軌道を表し, 実線は線形モデルからの予測値を表す. (c) 同じく渦糸 ($N_F = 4.7 \times 10^6$) の軌道.

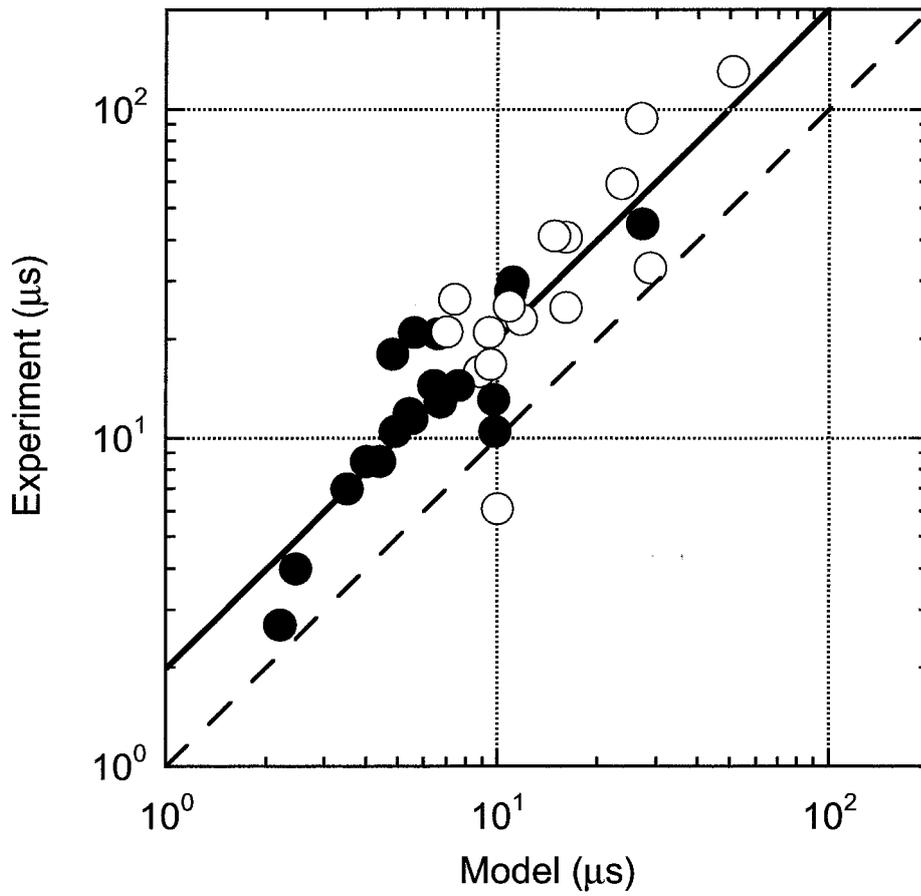


図 5.11: 渦糸の半径方向の運動の時間スケール. 縦軸は実験値, 横軸は線形モデルからの計算値である. 記号は渦糸の初期位置の違いを表し, $r_0/R = 0.13$ (●), $r_0/R = 0.26$ (○)である.

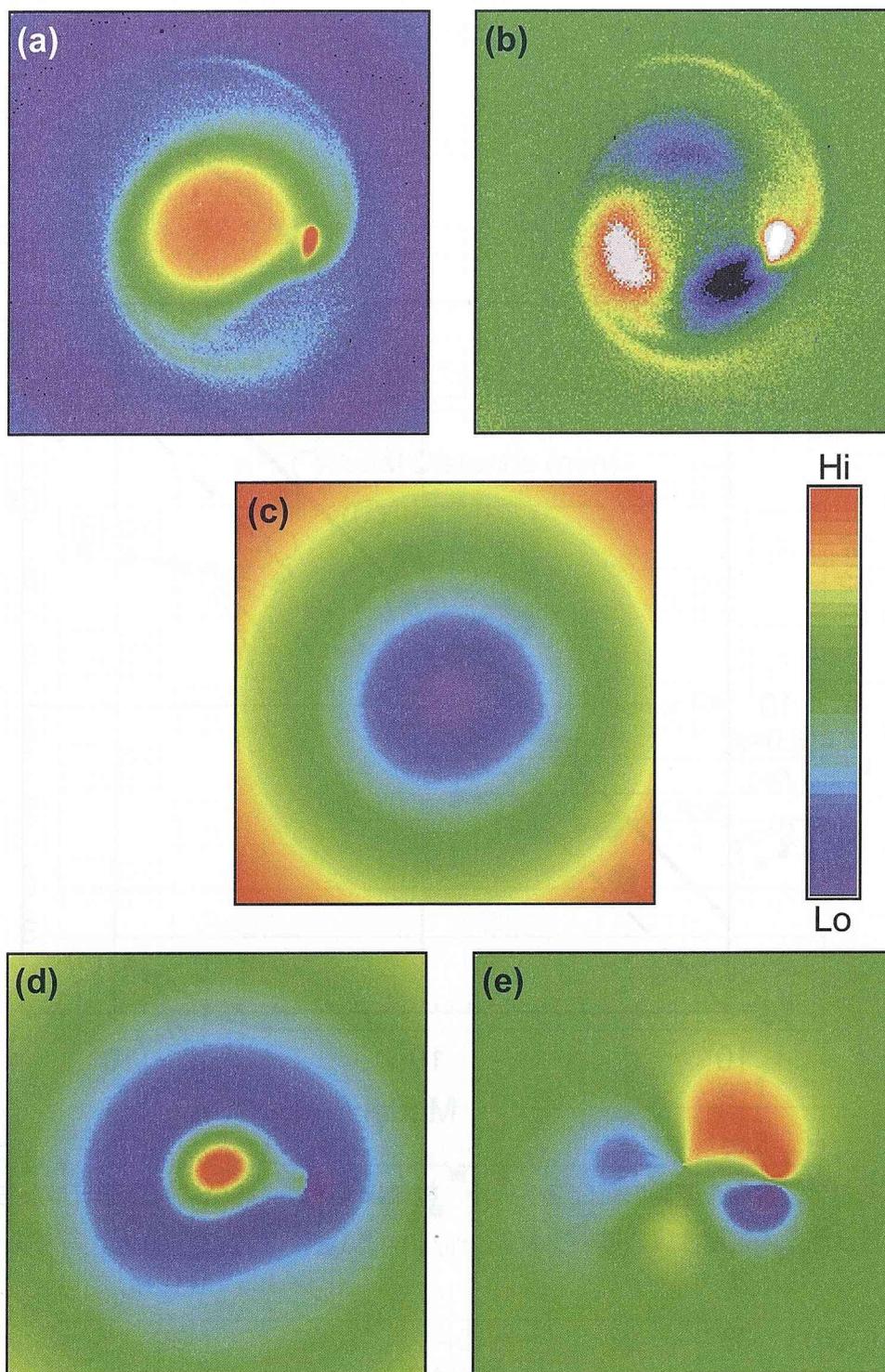


図 5.12: (a) CCD カメラにより観測された渦度 (電子密度) の二次元分布 (図 5.1 の $t = 30 \mu\text{s}$). (b) 背景渦度の摂動成分. (c) ポテンシャル分布. (d) 電場の半径方向成分の分布. (e) 電場の方位角方向成分の分布.

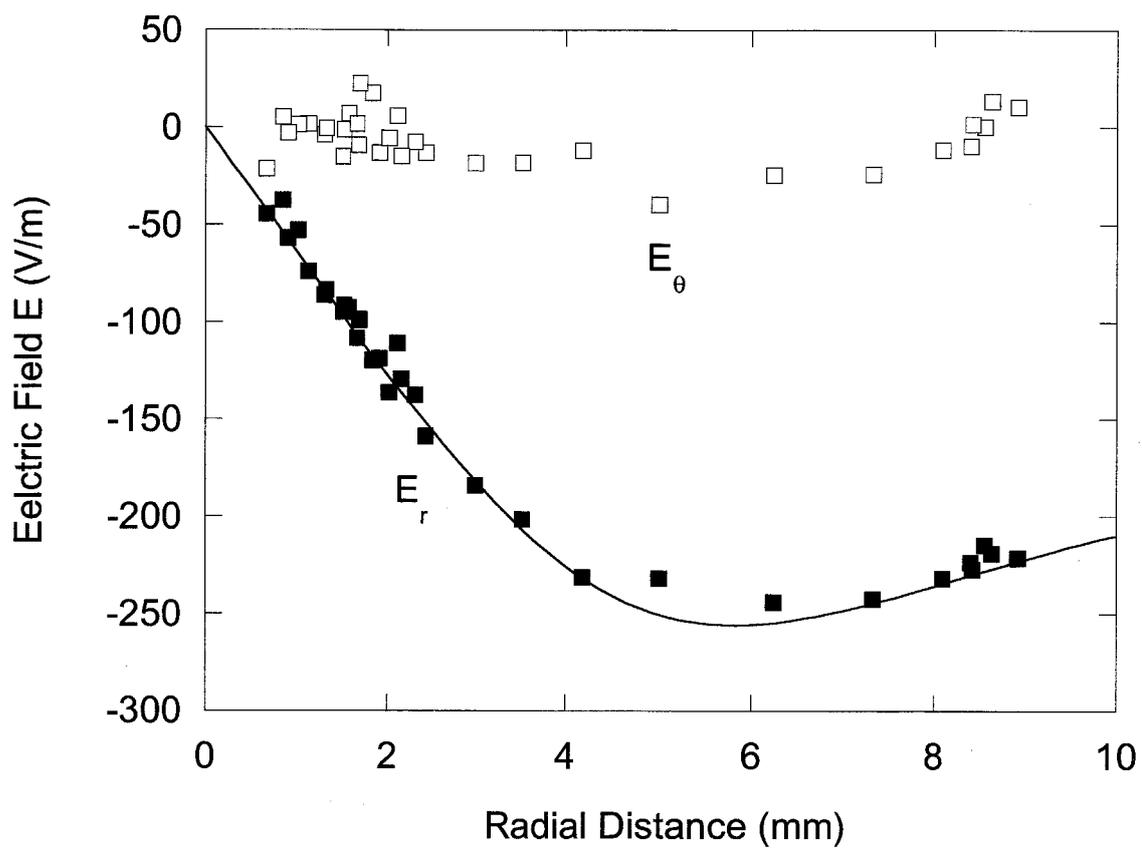


図 5.13: 渦糸内の電場の平均値 (背景の摂動を含む) を径方向距離の関数として示す. それぞれ動径方向成分 (■), 方位角方向成分 (□) である. 実線は初期の背景渦度分布 (無摂動) から計算された動径方向電場の分布.

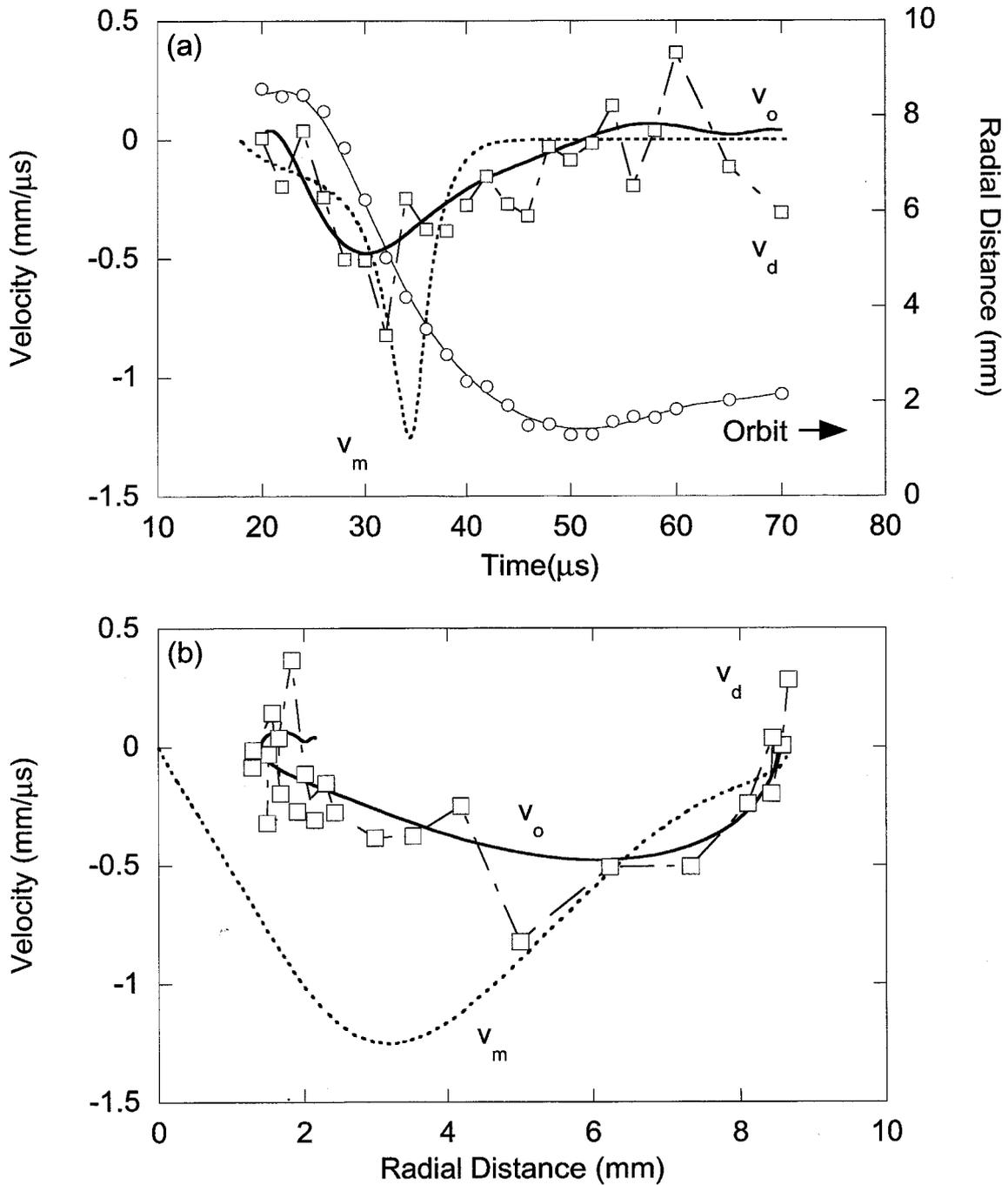


図 5.14: (a) 渦糸の半径方向への移動速度を時間の関数として示す。○は観測された渦糸の半径方向の位置、細い実線は回帰曲線を表す。太い実線は回帰曲線を微分することによって得られた半径方向の移動速度である。□は観測された密度分布から計算された $E \times B$ ドリフトの速度を表す。波線は線形理論からの予測値である。(b) 渦糸の半径方向への移動速度を渦糸の位置の関数として示す。

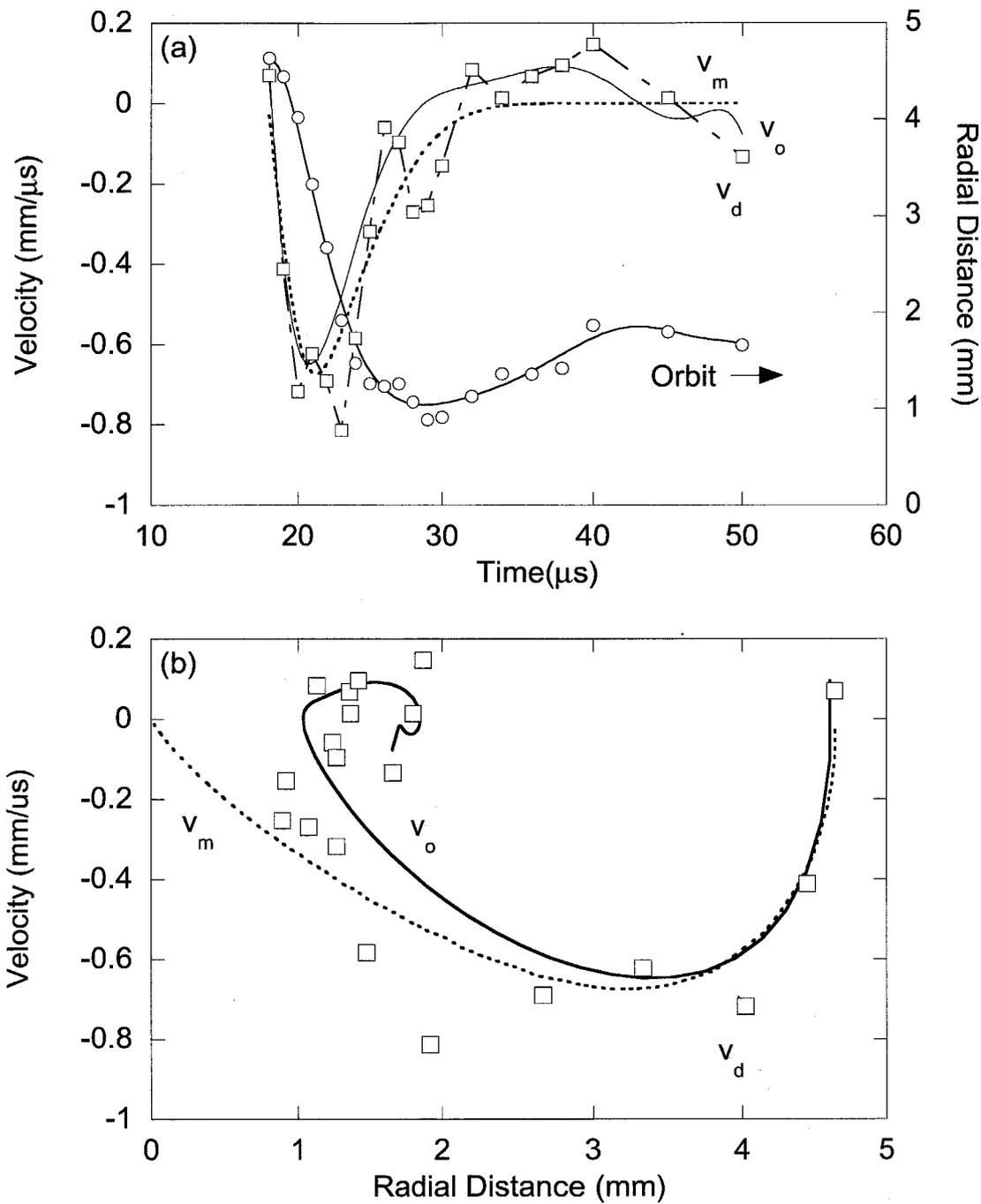


図 5.15: (a) 渦糸の半径方向への移動速度を時間の関数として示す。○は観測された渦糸の半径方向の位置，細い実線は回帰曲線を表す。太い実線は回帰曲線を微分する事によって得られた半径方向の移動速度である。□は観測された密度分布から計算された $E \times B$ ドリフトの速度を表す。波線は線形理論からの予測値である。(b) 渦糸の半径方向への移動速度を渦糸の位置の関数として示す。

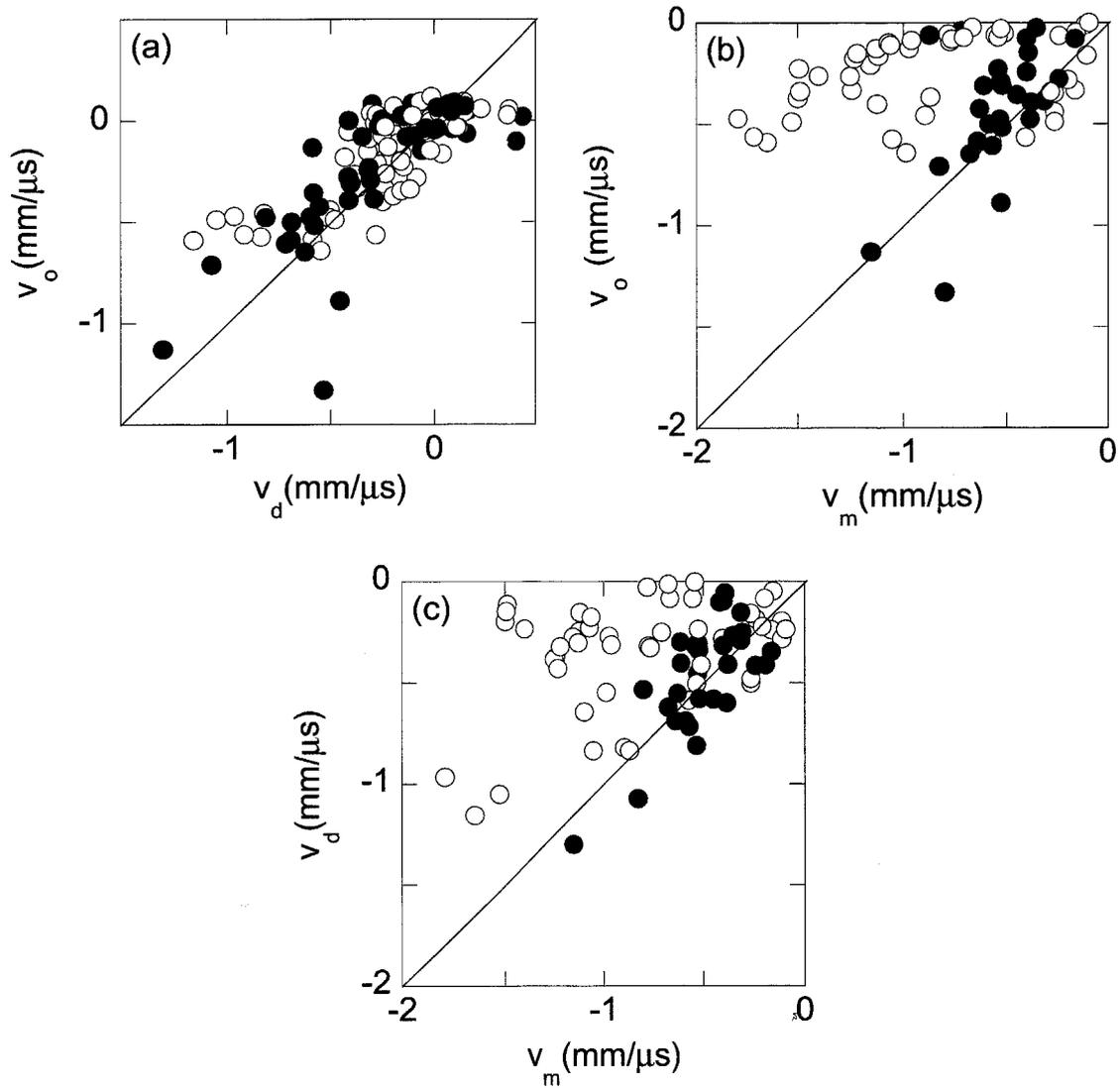


図 5.16: (a) 重心からの距離 r を媒介変数とし, 速度の観測値 v_o を $E \times B$ ドリフトから評価した速度 v_d の関数として示す. (b) 同様に v_o を線形モデルからの予測値 v_m の関数として示す. (c) v_d を v_m の関数として示す. 記号は渦糸の入射位置を表し, $r_0 = 4.8$ mm(●), $r_0 = 9.8$ mm(○) である.

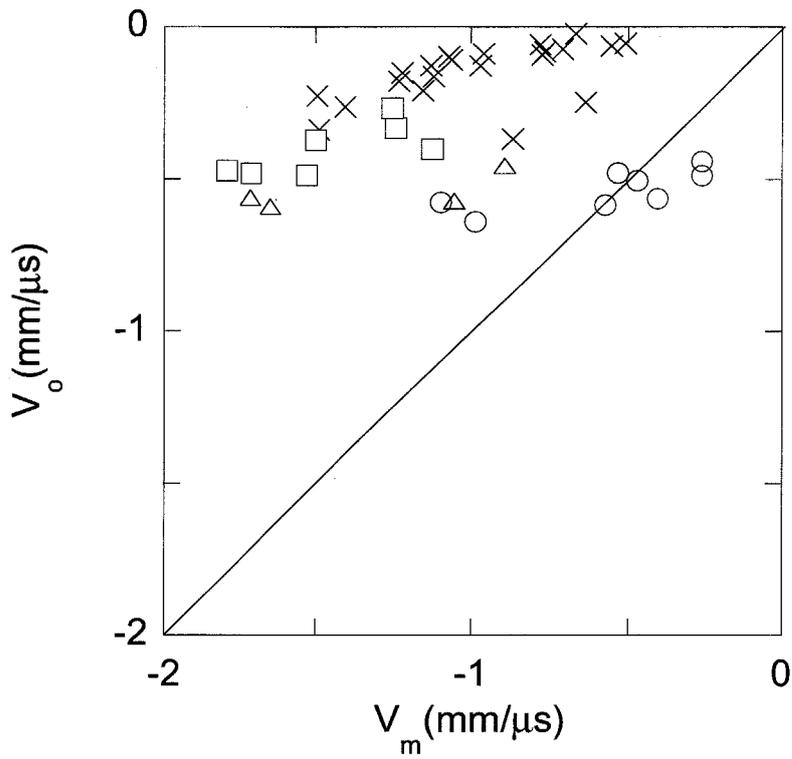


図 5.17: 重心からの距離 r を媒介変数とし, 渦糸の入射位置 $r_0 = 9.8$ mm の場合について, 速度の観測値 v_o を線形モデルからの予測値 v_m の関数として示す. 記号は入射後の経過時間の違いを表し, \times は $r/r_0 = 0.1 \sim 0.3$, \square は $0.3 \sim 0.5$, \triangle は $0.5 \sim 0.7$, \circ は $0.7 \sim 0.9$ である.

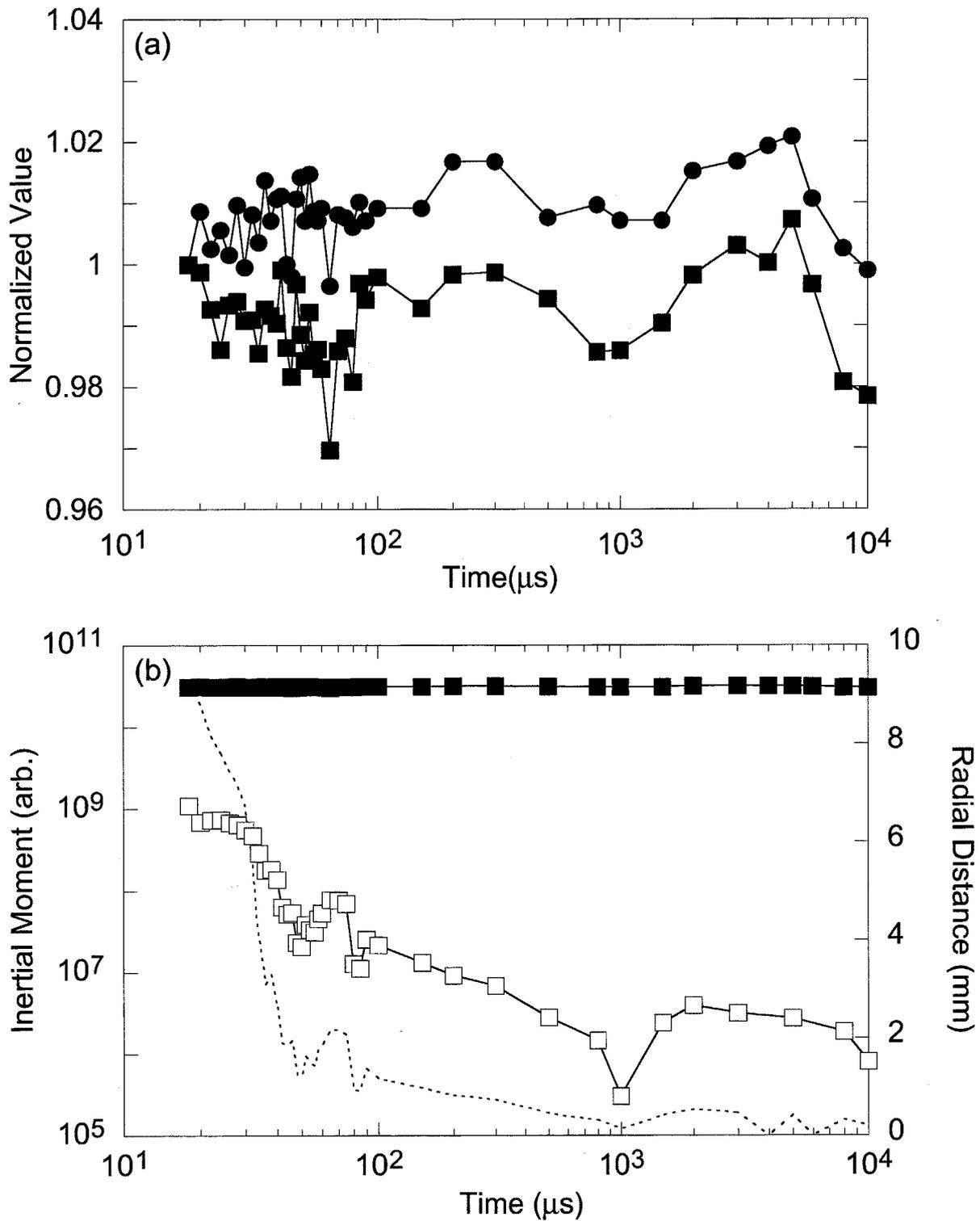


図 5.18: (a) ケース 1 について、電子数 (●) と渦系全体の慣性モーメント (■) の時間変化を示す。いずれも初期値で規格化してある。(b) 渦系全体の慣性モーメント (■) と渦糸の慣性モーメント (□) の時間変化を示す。破線は重心から渦糸までの距離を表す。

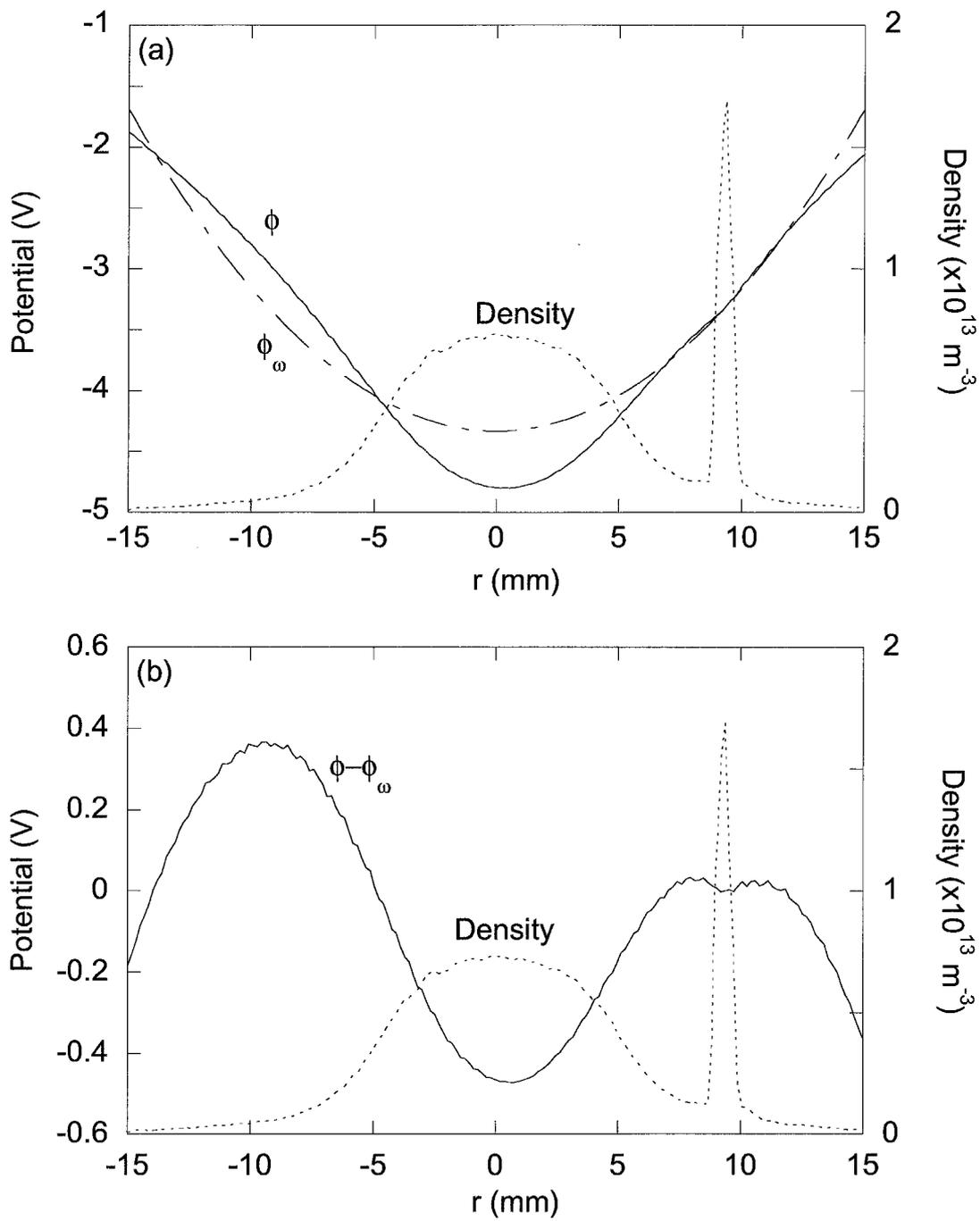


図 5.19: (a) 観測された密度分布 (破線) 実験室系でみたポテンシャル (実線), 渦糸の公転運動の速さで剛体回転する系のポテンシャル (一点鎖線) の断面図を示す. (b) 観測された密度分布 (破線) と回転座標系でみたポテンシャル (実線) の断面図を示す.

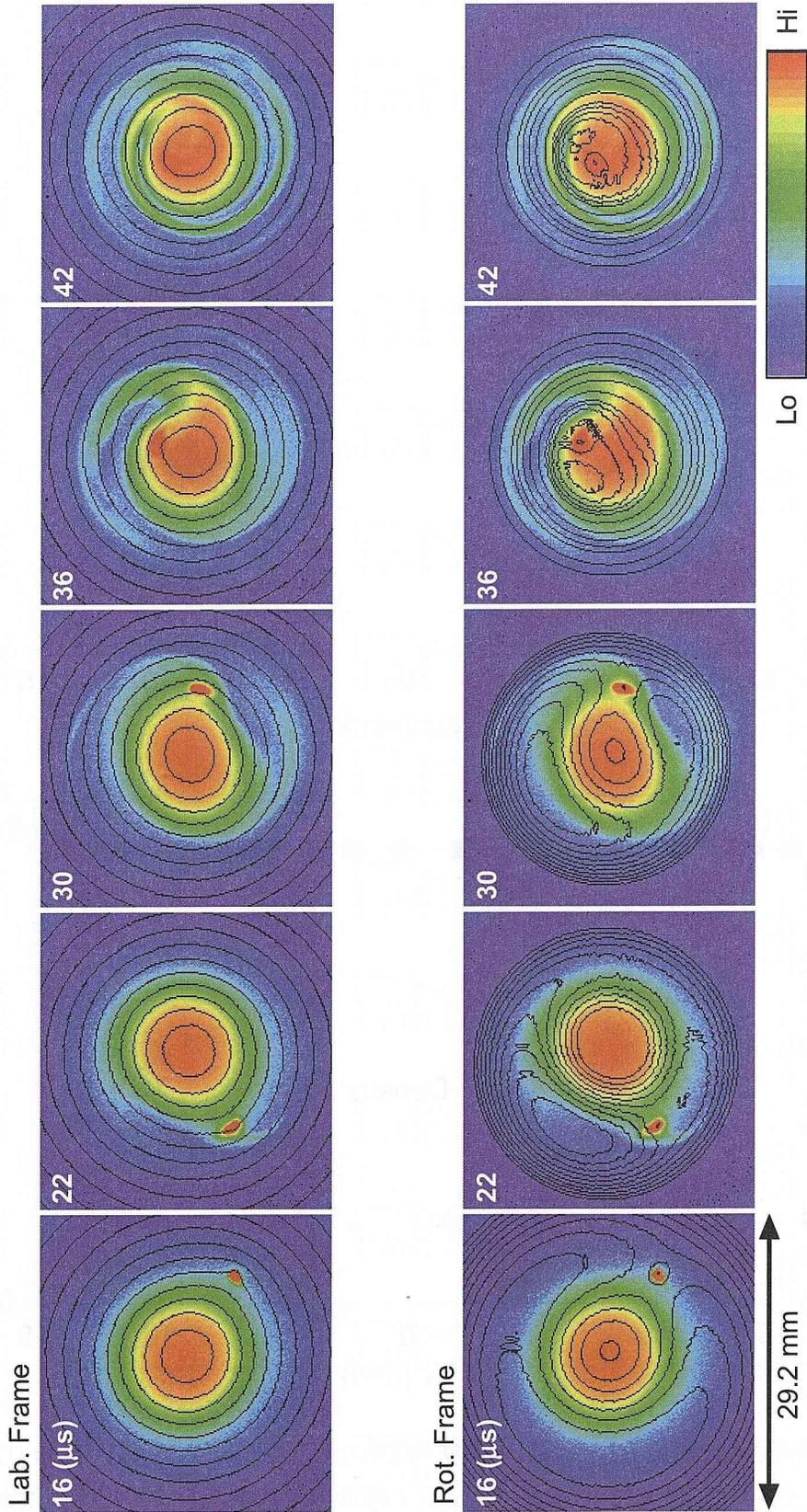


図 5.20: ケース1について, 密度 (渦度) と等ポテンシャル (流れ関数) の時間発展を示す. 実線は等ポテンシャル面 (流線) を表す. 上段には実験室系で観測した等ポテンシャル面を示し, 下段には渦糸と同じ速さで回転する座標系から見た等ポテンシャル面を示す.

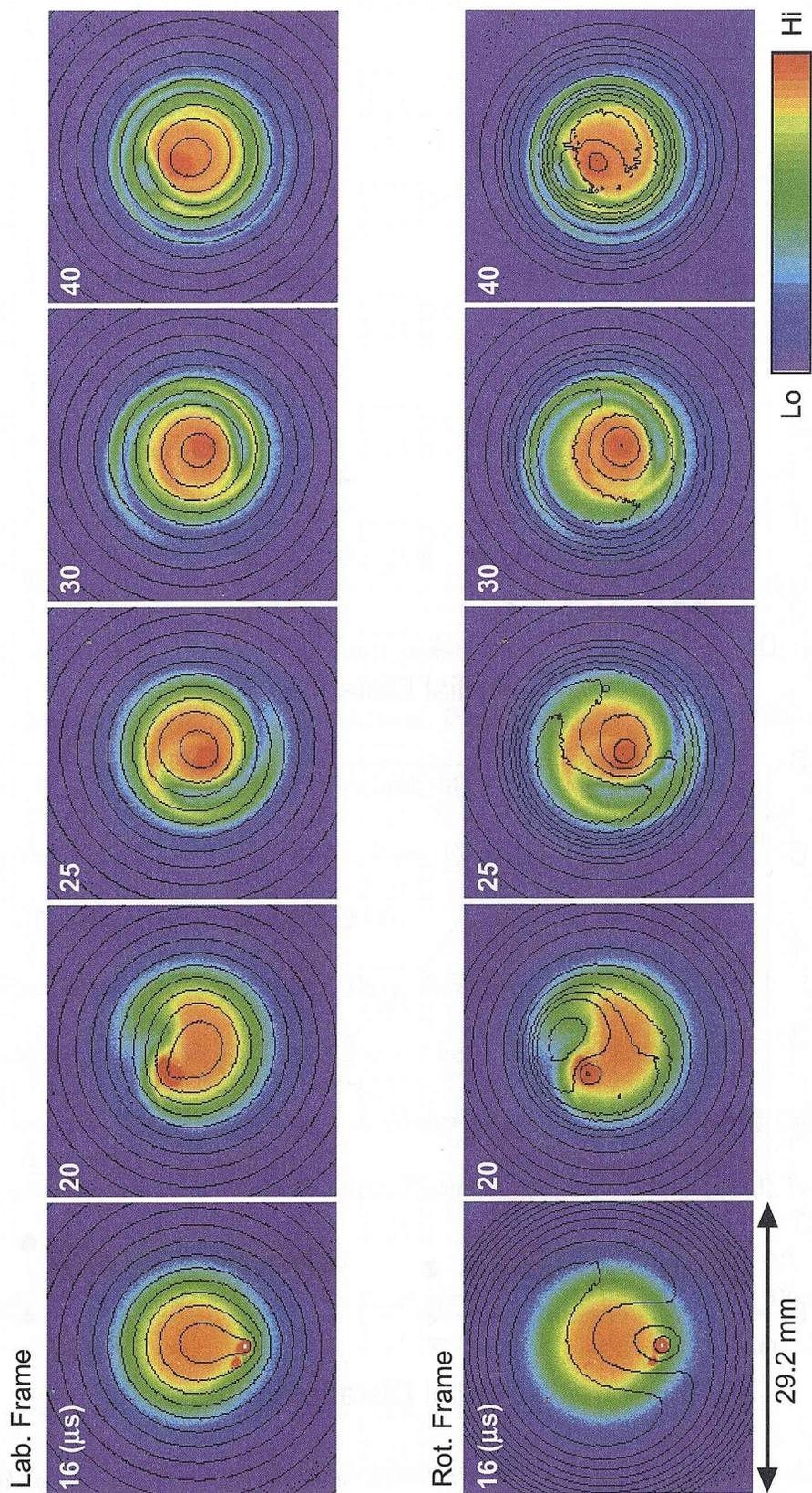


図 5.21: ケース 2 について、密度 (渦度) と等ポテンシャル (流れ関数) の時間発展を示す。実線は等ポテンシャル面 (流線) を表す。上段には実験室系で観測した等ポテンシャル面を示し、下段には渦糸と同じ速さで回転する座標系から見た等ポテンシャル面を示す。

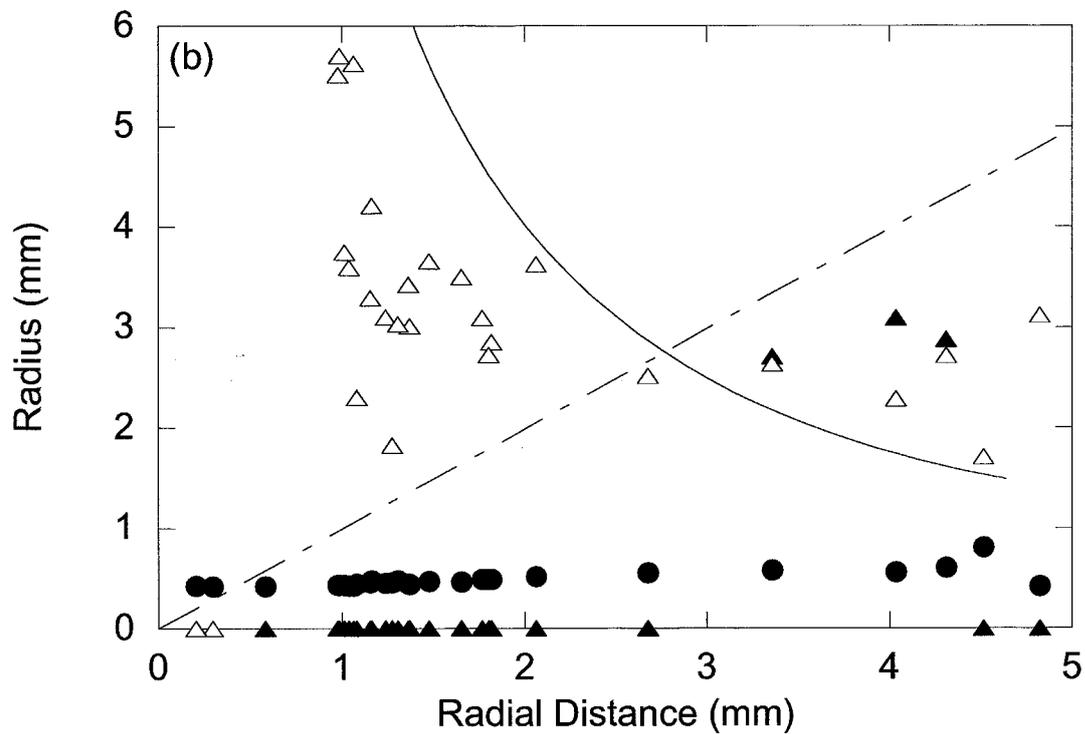
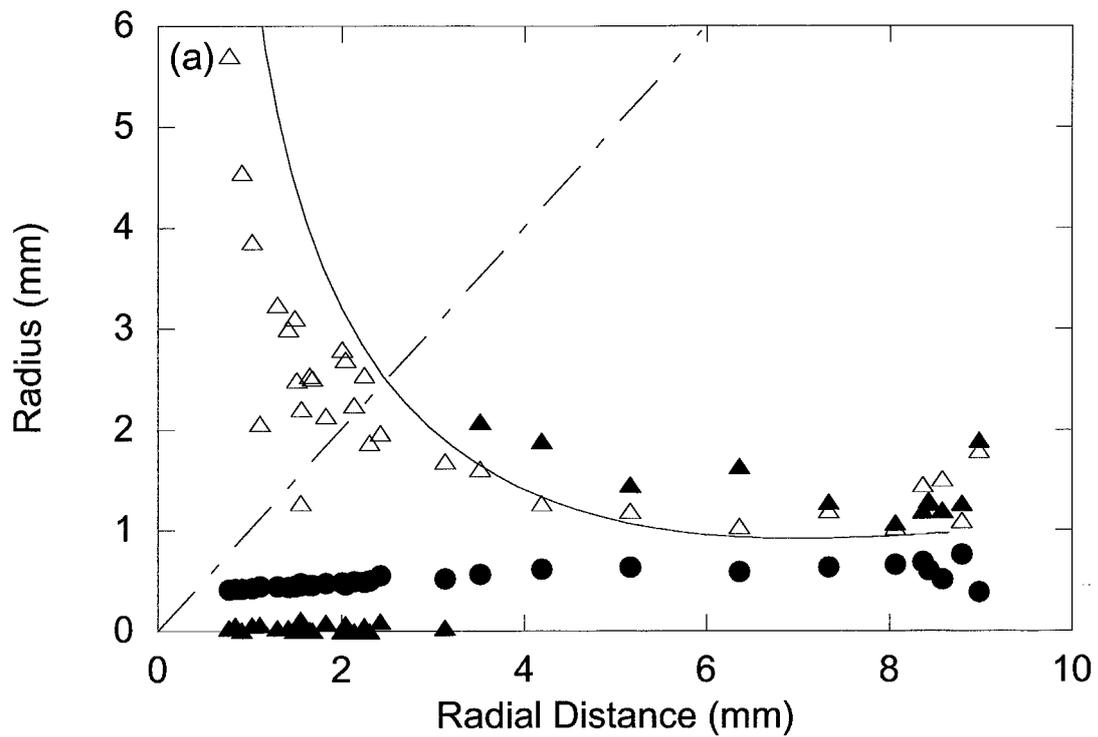


図 5.22: 渦糸からセパトリクスまでの距離を重心から渦糸までの距離の関数として示す。実線は線形モデルで使用した l_s を表す。背景渦の山側に出来るセパトリクスまでの距離を▲で、谷側に出来るセパトリクスまでの距離を△で表す。●は渦糸の $1/e$ 半径 $r_{1/e}$ を表す。それぞれケース 1(a), ケース 2(b) の場合の結果である。

関連図書

- [1] C. G. Rossby, *J. Mater. Res.* **7**, 175 (1948).
- [2] C. H. Liu and Lu Ting, *Comput. Fluids* **15**, 77 (1987).
- [3] G. M. Reznik, *J. Fluid Mech.* **240**, 405 (1992).
- [4] G. G. Sutyryn and G. R. Flierl, *J. Atmos. Sci.* **51**, 773(1994).
- [5] G. F. Carnevale, R. C. Kloosterziel and G. J. F. van Heijst, *J. Fluid Mech.* **233**, 119 (1991).
- [6] G. F. Carnevale, P. Cavazza, P. Orlandi and R. Purini, *Phys. Fluids A* **3**, 1411 (1991).
- [7] X. P. Huang, K. S. Fine, and C. F. Driscoll, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4424 (1995).
- [8] D. Z. Jin, D. H. E. Dubin, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 4434 (1998)
- [9] D. A. Schecter, D. H. E. Dubin *et al.*, *Phys. Fluids* **11**, 905 (1999).
- [10] M. Kono, *Physica Scripta*, **61**, 489 (2000).
- [11] D. A. Schecter and D. H. E. Dubin, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2191 (1999).
- [12] D. A. Schecter and D. H. E. Dubin, *Phys. Fluids*. **13**, 1704 (2001).
- [13] Y. Kiwamoto, K. Ito, A. Sanpei and A. Mohri, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3173 (2000).
- [14] R. C. Davidson, *Physics of Nonneutral Plasmas*, Addison-Wesley (1990) Redwood City, CA.
- [15] M. Romé, M. Brunetti, F. Califano, F. Pegoraro and R. Pozzoli, *Phys. Plasmas* **7**, 2856 (2000).
- [16] M. V. Melander *et al.*, *J. Fluid Mech.* **178**, 2062 (1997).
- [17] M. V. Melander *et al.*, *J. Fluid Mech.* **178**, 137 (1997).

第6章 背景渦中での渦紐の変形と崩壊

6.1 背景と目的

前章で背景渦中に渦紐を入射した場合、渦糸が背景渦度の勾配を登ることを示した。この運動は渦糸が背景渦度分布を変形させ、その擾動が作る速度場により駆動される。前章ではこの背景渦度分布の変形に注目した。ここで、改めて渦糸に注目しよう。図 5.1, 5.5 に示すように渦糸自身も方位角方向に引き伸ばされ、変形していることが分かる。この様に背景渦中に渦糸を入射した場合、渦糸が背景渦度分布を変形させると同時に、背景渦により渦糸自身も変形する。本章では、勾配をもつ背景渦度中に入射された渦糸の変形について検討する。

流体力学の分野では Shear を持つ背景流中の渦領域の変形は、渦運動の基本的な問題の一つとして検討されている。二次元 Euler 流体における Shear 流中の渦領域の変形については Moore と Saffman の研究がある [2]。彼らは渦無しの Shear 流中に置かれた一様渦度の領域 (定渦度領域と呼ぶ) の形状を楕円形に限定して、それがどのように変形するか Slab モデルを用いて解析的に検討した。その結果、定渦度領域の楕円度 E が Shear A と渦度 ζ_0 の比の関数として表されることを示した。また、渦領域が定常的に存在出来る Shear の限界値、およびその時の楕円度の臨界値についても示している [2]。その後、Kida により背景に一様な渦度を持つ Shear 流がある場合の定渦度領域の振る舞いについて解析が行われている [3]。渦領域の安定性の実験的な研究は Eggleston により Malmberg Trap 中の非中性プラズマを用いて行われた [4]。彼は、Malmberg Trap の中心軸に沿って設置された線状電極にバイアス電圧を印加することにより Shear を持つ流れ場を形成し、その中に入射された細い円柱状の電子プラズマ (渦領域) の渦度分布の発展の様子を調べた。その結果、渦領域が崩壊する現象を観測し、そのタイムスケールは Saffman/Kida のモデルから予測される渦領域の安定性の臨界値を越えると急激に短くなることを報告している。

これらの研究ではいずれも定常的な背景速度場を考えており、渦領域が背景速度場に与える影響は考慮されていない。一方、本研究においては背景渦と渦糸の相互作用により両者が強く変形を受けることが既に明らかにされた。つまり、これまでの研究はあまりに単純化されており、現実を反映していないと言わざるを得ない。この章では、このように双方向に影響する系において渦糸に誘起される変形について検討する。これまでは、紐状の電子プラズマをそのサイズを無視して渦糸と呼んできた。しかし、ここではその変形に注目するので渦糸と呼称することは適当ではない。そこで以降では、小さな断面積を持つ細い渦と言う意味で「渦紐」と呼ぶこととする。まず、第 6.2 節で渦紐の安定な変形について記す。次に、第 6.3 節で渦紐が崩壊する条件について検討する。最後に第 6.4 節で純電子プラズマと二次元 Euler 流体との等価性を検討し、これらの結果についてまとめる。

6.2 渦紐の楕円化

本章では渦紐の変形に注目して解析を行なうので、まずは渦紐の定義と観測された画像データから渦紐を抽出する方法について述べる。背景渦中に渦紐を入射した場合、観測される渦度分布の断面図は図 5.4 に示すようになる。ここでは、画像計測で得られる全渦度分布 $\zeta(x, y, t)$ は連続的に変化する山型の背景渦度分布 $\zeta_b(x, y, t)$ の上に渦紐の鋭い渦度分布 $\zeta_v(x, y, t)$ が重畳されていると考える。従って、 $\zeta(x, y, t)$ を $\zeta_v(x, y, t)$ と $\zeta_b(x, y, t)$ に分離して、 $\zeta_v(x, y, t)$ を抽出する必要がある。ここで、簡単のために各時刻の渦紐近傍の背景渦度分布 $\zeta_b(x, y, t)$ は渦紐入射前の背景渦度分布 $\zeta_{b0}(x, y)$ に等しいとして $\zeta_v(x, y, t)$ を次式で近似する。

$$\zeta_v(x, y, t) \equiv \begin{cases} \zeta(x, y, t) - \zeta_{b0}(x, y) & (\text{for } \zeta_v \geq \zeta_{vm}/20) \\ 0 & (\text{for } \zeta_v < \zeta_{vm}/20) \end{cases} \quad (6.1)$$

ただし、 ζ_{vm} は渦紐内部の最大渦度である。第一式で表される演算は、前章で背景渦度の摂動分 $\delta\zeta(x, y, t)$ を抽出したのと同じ操作であり、図 5.1 下段の白く抜けた部分が渦紐の渦度分布に相当する。

渦紐を抽出することが出来たので、その変形に注目する。図 5.1, 5.5 に示すように背景渦中に置かれた渦紐は方位角方向に引き伸ばされる。この渦紐の変形を見易くするために、図 5.1 の渦紐周辺の渦度分布を 10 倍に拡大して図 6.1 に示す。この時、ただ拡大しただけでは画像が粗く見づらいので、図 6.1 では 3 次のスプライン補間により画素数を 100 倍に増やしてある。白色の実線は渦紐の渦度が最大値の $1/e$ となる等高線であり、黒色の実線は実験室系で観測した流線を表す。流線が波打っているのは、級数展開を用いた計算の精度の問題と考えられる。

図 6.1 (a) に渦紐入射直後 $t = 16 \mu\text{s}$ における渦紐周辺の渦度分布の拡大図を示す。渦紐の $1/e$ 断面はほぼ円形をしている。図 6.1 (b) には渦紐の動径方向の移動速度がもっとも速くなる $t = 30 \mu\text{s}$ における渦度分布を示す。渦紐は流線に沿って引き伸ばされ、楕円形となることが確認出来る。図 6.1 (c) は渦紐が背景渦の中心に到達して十分に時間が経過した $t = 10 \text{ ms}$ における渦度分布である。渦紐は再び丸くなっているが、その半径は入射直後に比べ増加する。

渦紐の形状として渦度が最大渦度の $1/e$ となる断面の形状の変化に注目する。図 6.1 に示すように、引き伸ばされた渦紐の断面はほぼ楕円形となる。ケース 1 について渦紐の $1/e$ 断面を楕円で近似して、その長軸 $2a(\square)$ と短軸 $2b(\triangle)$ の時間変化を図 6.2 (a) に示す。入射直後には渦紐は円形をしており長軸と短軸はほぼ等しくなっている。しかし長軸は急激に増加し $25 \mu\text{s}$ で最大となったあと減少し $200 \mu\text{s}$ には入射直後の値に戻る。このとき、長軸は流線の方向を向いている。一方、この時間帯では短軸の長さはほとんど変化しない。その後 1 ms 程度までは、長軸、短軸ともほとんど変化しないが、それを越えると両者とも緩やかに増加する。これは現象が顕在化する時間スケールから電子間の Coulomb 衝突に起因する緩和過程と考えられる。図 6.2 (b) に渦紐の楕円度 $E = a/b$ を時間の関数として示す。渦紐が楕円状に変形するのは $t < 200 \mu\text{s}$ の時間帯であることが確認出来る。また、渦紐の軌道に振動が見られる $t \approx 60 \mu\text{s}$ の時間帯には楕円度にも振動が観測される。このことから、渦紐の楕円化は渦紐の動径方向の運動、すなわち渦度の勾配や Shear の強さと密接に関係していることが分かる。

一方、二次元 Euler 流体においては Shear 流中の渦領域の変形について良く検討されており、このとき渦領域は楕円形となることが知られている [2, 3]. 本実験で観測された渦紐の楕円化の傾向を Moore と Saffman の理論モデル [2] と比較しよう. 彼らの検討によると、渦無し Shear 流中に置かれた渦度 ζ_0 の定渦度領域は、Shear の強さを A とすると、 $|A/\zeta_0| < 1$ のとき、すなわち背景の Shear よりも渦領域の渦度が強いときに楕円形の定常解をもち、その長軸 a 、短軸 b の間にはつぎの関係が成立する.

$$\left| \frac{A}{\zeta_0} \right| (a^2 + b^2) = a^2 - ab \quad (6.2)$$

このとき、長軸は Shear 流の流線と平行な方向を向く. 式 (6.2) から渦紐の楕円度の表式として、

$$E = \frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4(|A/\zeta_0|)(1 - |A/\zeta_0|)}}{2(1 - |A/\zeta_0|)} \quad (6.3)$$

を得る. ただし、楕円形の渦領域の安定性の線形解析によると、渦領域が安定であるための条件は次式で与えられる [2].

$$\sigma^2 = \frac{\zeta_0^2}{4} \left\{ \left(\frac{2mab}{a^2 + b^2} - 1 \right)^2 - \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^{2m} \right\} \quad (6.4)$$

ここで、 m は周方向の摂動のモード数である. $\sigma^2 < 0$ の時に渦領域は外乱に対して不安定となる. 従って、 $m = 2$ の楕円型の摂動を考えると、 $\sigma^2 = 0$ となる楕円度の臨界値 E_c は、

$$E_c = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \approx 2.89 \quad (6.5)$$

となる. これは渦領域の安定性の線形解析の結果であり、渦領域を楕円形にする要因は Shear 流に限らず何でもよい. 以上より、Shear 流中で渦領域が安定に存在出来るのは、

$$\left| \frac{A}{\zeta_0} \right| \leq \frac{E_c(E_c - 1)}{E_c^2 + 1} = \frac{1}{4} \left\{ 3 - \sqrt{5} + \sqrt{2(\sqrt{5} - 1)} \right\} \approx 0.584 \quad (6.6)$$

の領域であることが分かる.

このモデルと実験を比較する. そのためには各時刻において背景渦度分布が渦紐の周辺に作る Shear $A = -r\partial\Omega/\partial r$ を観測された渦度分布から評価する必要がある. ここで、 Ω は背景渦が作る速度場の方位角方向の回転速度であり、 $E \times B$ ドリフトによる Ω は背景渦度分布の作る電場の動径方向成分 E_r から評価することが出来る. よって Shear A は観測された渦度分布から決定することが可能である. ただし、前述のように観測される渦度分布には渦紐の渦度分布と背景渦の渦度分布が含まれる. 従って今度は、観測された渦度分布から背景渦度分布 $\zeta_b(x, y, t)$ のみを抽出する必要がある. ここでは、前述の方法で抽出された渦紐の渦度分布 $\zeta_v(x, y, t)$ を用い次のように $\zeta_b(x, y, t)$ を抽出する.

$$\zeta_b(x, y, t) = \zeta(x, y, t) - \zeta_v(x, y, t) = \begin{cases} \zeta_{b0}(x, y) & (\text{for } \zeta_v \geq \zeta_{vm}/20) \\ \zeta(x, y, t) & (\text{for } \zeta_v < \zeta_{vm}/20) \end{cases} \quad (6.7)$$

この演算は、観測された渦度分布 $\zeta(x, y, t)$ 中の渦紐に相当する部分を渦紐入射前の背景渦度分布 $\zeta_{b0}(x, y)$ で置換したものを背景渦度分布 $\zeta_b(x, y, t)$ とすることに相当する.

ケース1について背景渦度分布の作る Shear を重心から渦紐までの距離 r の関数として図 6.3 (a) に示す. 白丸が各時刻において観測された背景渦度分布 $\zeta_b(x, y, t)$ から評価した Shear A を表す. 実験では Shear が空間分布を持つので, 渦紐に作用する成分として渦紐の $1/e$ 断面内での平均値を用いた. A は r の減少に伴い一度増加したあと, 減少して背景渦の中心でゼロとなる. 中心付近で A のばらつきが大きくなるのは, r が小さくなると級数展開の次数が小さくなり, 計算の精度が落ちるためである. 渦紐入射前の背景渦度分布から計算した Shear A_0 を実線で表す. A は若干のばらつきが在るものの, 大略 A_0 と一致しており, 上述の手法による Shear の導出が上手く行われていることを表している. 以降では, Shear として各時刻の画像から評価した値を用いる.

さて, 理論モデルでは渦領域内で渦度が一定としているが, 実際の渦紐は図 5.4 に示したように Gauss 分布に近い渦度分布をもつ. ここで, 次の換算式を用いて, 観測された渦紐の密度分布 $n(x, y)$ を理論モデルの一様渦度 ζ_0 と関連づける [4, 5].

$$\zeta_0 = \frac{e\bar{n}}{\varepsilon_0 B_0} \quad (6.8)$$

$$\bar{n} = \frac{\lambda}{\pi R_v^2} \quad (6.9)$$

$$\lambda = \int dS n(x, y) \quad (6.10)$$

$$R_v = \frac{3}{2} \frac{1}{\lambda} \int dS n(x, y) |\mathbf{r} - \mathbf{R}_{cm}| \quad (6.11)$$

$$\mathbf{R}_{cm} = \frac{1}{\lambda} \int dS n(x, y) \mathbf{r} \quad (6.12)$$

ここで, ζ_0 が換算された渦度である. λ は渦紐の単位長当たりの電子数であり, \mathbf{R}_{cm} は渦紐の重心である. ケース1について ζ_0 の変化を重心からの距離の関数として図 6.3 (a) に黒丸で示す. 渦紐入射直後の $r = 9.8$ mm における ζ_0 が他に比べ一桁程度大きいのは, この時点では電子プラズマがカソードと電氣的に結合しているためである. 従って, 本来の渦紐ではないので除外する. 次の瞬間には, 電子プラズマがカソードから断絶することにより渦紐となり, ζ_0 は $2 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ 程度になる.

まず, ケース1の場合について, 実験結果と理論モデルを比較する. 図 6.3 (b) に渦紐の楕円度 E を $|A/\zeta_0|$ の関数として示す. 実線は式 (6.3) から予測された楕円度を表す. 楕円度は $|A/\zeta_0|$ の増加に対して単調に増加する. 実験的に観測された渦紐の $1/e$ 断面の楕円度を黒丸で表す. 現象は矢印の方向に進行する. 観測された楕円度も理論モデルと同様に $|A/\zeta_0|$ の増加に対して増加する傾向を示す. ただし, 実験値は理論値に比べ大きな値となることが分かる.

次に, 楕円度の変化の傾向を確認するために, 背景渦度分布, すなわち Shear 分布, と渦紐の渦度を様々に変化させて実験を行った. 楕円度 E の変化を $|A/\zeta_0|$ の関数として図 6.4 に示す. 実線は式 (6.3) により計算された楕円度を表し, 実験的に観測した渦紐の $1/e$ 断面の楕円度を▲で表す. 楕円度の理論値は $|A/\zeta_0|$ の増加に伴い単調に増加し, その曲線は下に凸となる. 一方, 実験値も $|A/\zeta_0|$ の増加にともない増加するが, その傾向は上に凸であり $|A/\zeta_0|$ が大きくなると楕円度は飽和する. そのため, 楕円度は $|A/\zeta_0| < 0.45$ では理論モデルからの予測値よりも実験値の方が大きく, $|A/\zeta_0| < 0.45$ では実験値よりも予測値の方が大きくなる.

図中の一点鎖線は式 (6.5) で評価した楕円度の線形安定の臨界値 $E_c \approx 2.89$ を示す。観測された楕円度の最大値は 2.6 程度であり E_c より小さく、渦紐の変形は線形解析から予測される安定領域内にあることが分かる。ただし、理論モデルによれば楕円形の安定解が存在するのは $|A/\zeta_0| < 0.584$ の場合であり [式 (6.6)], 定常解が存在するのは $|A/\zeta_0| < 1$ の時であるが、実験ではこれらの範囲を大きく越えて安定な渦紐が観測される。

実験では渦紐内に密度分布が存在するので、断面をとる場所によりその形状が変化する懸念がある。そこで、 $(1 - 1/e)$ 断面 (○), $1/10$ 断面 (□) の変化も図 6.4 に合わせて示す。どちらの場合も、楕円度は $|A/\zeta_0|$ の増加にともない増加するが、増加の傾向は上に凸であり $1/e$ 断面の変形と同様の傾向を示す。ただし、より高い渦度で断面をとるほど楕円度が大きくなる傾向がある。

この様に実験値と理論モデルで楕円度 E の $|A/\zeta_0|$ に対する依存性に違いはあるものの、観測される楕円度の上限は理論モデルからの予測と良く一致する。楕円度の変化の傾向が異なるのは、実験では渦紐との相互作用により背景渦が大きく変形するため、Shear 以外の渦紐を変形させる力が発生したためと考えられる。一方、楕円度の上限が良く一致するのは、 E_c が渦領域の形状の安定解析から決定された値であり、形状を変形させる要因は何でも構わないためである。

6.3 渦紐の伸張と崩壊

前節で示したケースについては渦紐の変形が比較的小さいため、渦紐は変形しても自己を保つことができ、背景渦度の中心にちかづき Shear が小さくなると再び円形に戻ることが出来た。ところが、渦紐の変形が大きくなると渦紐は元の形に戻ることなく大きく引き伸ばされて背景渦度分布の中に埋もれてしまう。その様子を図 6.5 に示す。上段は全渦度分布 $\zeta(x, y, t)$ の時間発展であり、下段は背景渦度の摂動分の分布 $\delta\zeta(x, y, t)$ である。これまでに示したデータと同様に渦紐は背景渦度の山を登るように運動を行なうが、その間に大きく引き伸ばされ、背景渦の中に呑み込まれてしまう。

下段の摂動分に注目する。初期の時間帯では渦紐の中心部は楕円形に変形しているが存在しており、ここから後方 (反時計方向) に向かい細い渦度の腕が伸びていることが確認出来る。ところが、時間の経過とともにこの渦度の腕が成長し、やがて渦紐の中心部も大きく引き伸ばされ、最後には背景渦と区別することが出来なくなってしまった。この様に、勾配をもつ背景渦中を運動する有限の断面積をもつ渦紐が引き伸ばされ、崩壊していく過程は数値シミュレーションでも観測されている [6]。本節では、渦紐の崩壊が起きる条件とその機構について検討する。

まずは、渦紐の崩壊が生じる条件について検討する。実験的には、渦紐の電子数と背景渦の電子数の比を小さくすると、この様な渦紐の崩壊現象は発生しやすくなる。前章で記したように、渦紐が背景渦を登る速度が線形モデルからの予測値に比べ小さくなるのは、渦紐が背景渦に与える摂動が大きいためである。従って、渦紐の電子数を少なくしていけば、背景渦に与える摂動が小さくなり理論モデルとの一致が良くなると考えられるが、この渦紐の崩壊現象によりその電子数の下限は比較的大きな値で制限されてしまう。

Shear 流中での渦領域の不安定な運動については Kida の解析的な研究がある [3]。Eggleston が

非中性プラズマを用いて行なった実験では Kida モデルと良く一致する結果を得ている [4]. そこで、本実験において観測された崩壊現象についてもまずは Eggleston の解析に習って Kida モデルとの比較を試みる.

Kida モデルでは一様な Strain rate e と一様な渦度 ζ_b をもつ背景速度場の中に置かれた楕円形の定渦度領域の運動について検討しており、その特殊なケースとして Moore と Saffman の結果も含まれる [3]. Eggleston の実験では背景の Shear 流を Malmberg Trap の軸に沿って設置した線状電極にバイアス電圧を印加することにより生成する. そのため背景渦度 ζ_b はゼロであり, Kida モデルによると $e/\zeta_0 < -0.15$ が渦領域の崩壊が生じる条件となる. 彼の実験では $e/\zeta_0 < -0.16$ で, 渦領域の速い崩壊が生じることが観測された. Eggleston は $e = \partial v_{cw}/\partial r$ と定義しており, v_{cw} は線状電極に印加したバイアスにより誘起される周方向の $E \times B$ ドリフト速度である. 彼の実験においても渦領域は渦度分布を持っており, 渦度には式 (6.8) により定義される ζ_0 を用いている.

本実験が Eggleston の実験と大きく異なるのは, 背景に渦度 ζ_b が存在する点である. ただし, 背景渦度は渦紐の渦度に比べ十分に低く $\zeta_b/\zeta_0 \ll 1$ であるので, 崩壊の条件はほぼ $e/\zeta_0 < -0.15$ となる [3]. 一方, 背景の速度場を作るのは背景渦度分布であるので, 背景渦度の作る $E \times B$ ドリフトの速度場 v_b をもちいて $e = \partial v_b/\partial r$ とする. ここで, 注意すべきは Eggleston の定義した e は Kida モデルの e とは異なる点である. ただし, この e を用いて評価された Eggleston の実験結果は Kida のモデルと形式上良く一致している. ここでは従来の研究と比較するため同様の定義で e を導入する.

図 6.6 に e/ζ_0 を時間の関数として示す. 一点鎖線は渦紐の安定の臨界値 $e/\zeta_0 = -0.15$ を表す. 記号は実験条件を表し, 渦紐が崩壊しない場合を白抜きで, 崩壊する場合を黒塗りの記号で表している. 渦紐が崩壊する場合についてごく初期の時間帯しか表示してないのは, 後の時間になると崩壊により渦紐を背景渦と識別出来なくなるためである. 渦紐が崩壊しない場合には, $e/\zeta_0 > -0.15$ であるが, 崩壊がおこる場合も, $e/\zeta_0 > -0.15$ であることがわかる. また, 崩壊しない場合に比べ崩壊する場合に e/ζ_0 が特に小さいわけでもない.

以上のように, 本実験で観測された結果を Eggleston の方法に従って解析を行なったが, Kida モデルとの対応は得られず, 渦紐が崩壊する場合としない場合を分ける明確な条件を得ることは出来なかった. ここで, 渦紐の楕円化の傾向が Moore と Saffman の理論と比較的一致することから, むしろ Shear A を用いて評価するほうが適当であると考えられる. そこで, 図 6.4 のデータに崩壊が起こる場合のデータを合わせて図 6.7 に示す. 白抜きの記号は渦紐が崩壊を起こさない場合を表し, それぞれ渦紐の $(1 - 1/e)$ 断面 (○), $1/e$ 断面 (△), $1/10$ 断面 (□) の楕円度の変化を表す. 前述のように渦紐が崩壊しない場合には, 現象は $|A/\zeta_0|$ が減少する方向に進行し, 楕円度は臨界値 $E_c \approx 2.89$ を越えることはない.

黒塗りの記号は崩壊を起こす場合を表し, それぞれ渦紐の $(1 - 1/e)$ 断面 (●), $1/e$ 断面 (▲), $1/10$ 断面 (■) の楕円度の変化を表す. この場合, 時間の経過とともに渦紐が大きく拡がり ζ_0 が減少するため, 現象は $|A/\zeta_0|$ が増加する方向へと進行する. $|A/\zeta_0|$ の増加にともない楕円度は増加して E_c よりも大きくなることが確認出来る. この様に, 渦紐が崩壊する場合には $|A/\zeta_0|$ が大きくなり楕円度が E_c よりも大きくなることが確認出来る. ただし, これは渦紐が崩壊を起こした

結果そうなるのであって、渦紐が崩壊を起こすための条件は表していない。図 6.7 においては、渦紐の崩壊が起きる場合でも、初期の時間帯においては $|A/\zeta_0|$, E とともに崩壊の起きない場合と同程度の値であり、ここから崩壊の発生を予測することは出来ない。

次に、渦紐が崩壊する機構について検討する。もう一度、図 6.6 に注目しよう。渦紐が崩壊する場合、 $|A/\zeta_0|$ の増加に対し 1/10 断面の楕円度は急激に増加し、 $|A/\zeta_0| \approx 0.9$ で $E \approx 5$ まで増加する。これに対し、 $(1 - 1/e)$, $1/e$ 断面の楕円度の増加は緩やかであり、臨界値を越えるのは $|A/\zeta_0| \approx 1.7$ のときである。すなわち渦紐の変形は中心部で遅く、端部で速いことが分かる。これは、渦紐の楕円度が E_c を越えることで全体が一気に崩壊するのではなく、その端部から徐々に崩壊が進行すること表している。

前述のように渦紐が崩壊するときには、渦紐から後方に向かって細い渦度の腕が伸びていく。これは渦紐から電子が流出していることを示している。前章で示したように渦紐と同じ速度で動く回転座標系で見たとき、渦紐の周辺にはその自己場による閉じた等ポテンシャル線 (流線) が存在する。流体要素 ($E \times B$ ドリフトで運動する電子) は流線に沿ってしか動けないので、この閉じた流線が渦紐から十分に離れた所まであれば、渦紐を構成する電子は渦紐の周囲を周り続けるだけであり、渦度の放出は生じない。しかし、閉じた流線が渦紐の中心部にしか存在しないと、それより外に在る電子は開いた流線に沿って背景渦中へと流出することになる。この様な電子が図 6.5 にみられる渦度の腕を形成すると考えられる。図 6.5 に示した渦紐が崩壊を起こす場合について、回転座標系でみた流線の分布を図 6.8 に示す。渦紐周辺の閉じた流線が早々に無くなり、セパトトリクス付近から流線に沿って渦度の腕が伸びていく様子が観測される。

この渦度の腕は、渦紐の渦度の最大値の 1/10 程度の渦度をもつ。ここで、1/10 断面の大きさと渦紐の重心から流線のセパトトリクスまでの距離を比較してみよう。図 6.9 に渦紐の 1/10 断面の半径とセパトトリクス半径 l_s を重心から渦紐までの距離 r の関数として示す。ここで、現象は右から左へと進行する。渦紐の 1/10 断面に置ける長軸 $a_{1/10}$ を○で、短軸 $b_{1/10}$ を●で表し、回転座標系で見たポテンシャル分布 $\tilde{\phi}$ から評価したセパトトリクス半径を三角形の記号で表す。実線は循環 Γ_v を持つ断面積ゼロの渦糸が一様な Shear A をもつ背景速度場中で作るセパトトリクス半径 $l_s = \sqrt{\Gamma_v/2\pi|A|}$ を表す。

渦紐が崩壊を起こす場合を図 6.9 (a) に示す。 $a_{1/10}$, $b_{1/10}$ は背景渦の中心に近づくときと伸張されて大きくなっていく。一方、セパトトリクス半径は若干減少する傾向にあるが、これは渦紐の端部が大きく引き伸ばされて自己場が弱くなるためと考えられる。ここで、長軸は流線の方を向くので、セパトトリクス方向にあるのは短軸である。 $b_{1/10}$ とセパトトリクス半径を比較すると、 $r \approx 8 \text{ mm}$ で $b_{1/10}$ がセパトトリクス半径より大きくなる、すなわちセパトトリクスが渦紐の内部に侵入することが確認出来る。従って、渦紐を構成する電子のうちセパトトリクスより外にある電子は渦紐から背景渦中へと流出する。その結果、渦紐の自己場は弱くなりセパトトリクスが更に内側に侵入することにより、渦紐は崩壊すると考えられる。

図 6.9 (b) に渦紐が崩壊しないケース 1 の場合について示す。セパトトリクス半径は背景渦の中心に近づく程増加する。これは、前述の様に中心に近づくほど背景速度場の Shear が小さくなるためである。この場合、 $a_{1/10}$, $b_{1/10}$ とともにほとんど変化しない。 $b_{1/10}$ は常にセパトトリクス

半径よりも小さく、セパトリクスは渦紐の外部に存在する。従って、渦紐を構成する粒子は渦紐の内部の閉じた流線の周りで回転を続けるだけであり、渦紐から流出することはない。

以上の結果より、渦紐が崩壊しない場合にはセパトリクスが外部に存在するが、崩壊する場合にはセパトリクスは渦紐の内部に存在し、その周辺から背景渦中へと渦度の流出が起きることが確認出来た。これは渦紐の崩壊を決めるのに渦度分布の拡がりや形状が重要であることを示している。

6.4 二次元 Euler 流体との等価性の検討

背景渦度分布中で渦紐が崩壊する場合、渦紐の密度は時間的に低下し背景渦の分布に呑み込まれてしまうとの観測結果を前節で報告した。しかし、二次元 Euler 流体であれば渦度分布の形状が変化しても、分布の高さ(渦度)には変化が無いはずである。従って、これが観測に起因する問題であるか、それとも Euler 流体としての特質が失われるのかということが重要な検討事項となる。この節ではこの問題について検討を行ない、純電子プラズマと二次元 Euler 流体との対応について考察する。

二次元 Euler 流体系では、循環、慣性モーメント、エネルギー、Entropy、Enstrophy が保存量となる。まず、純電子プラズマ実験におけるこれらの保存性を検討することにより、二次元 Euler 流体との等価性を検証する。前述の保存量は二次元 Euler 流体との等価性から、純電子プラズマの渦系においては次の積分量であらわすことが出来る。

$$N = \int_S dS n L \quad (6.13)$$

$$I = \int_S dS n r^2 \quad (6.14)$$

$$U = \int_S dS n \phi \quad (6.15)$$

$$S_F = \int_S dS \frac{n}{n_0} \log \frac{n}{n_0} \quad (6.16)$$

$$Z_2 = \int_S dS n^2 \quad (6.17)$$

ここで、 N は全電子数であり循環に対応する。 I は二次の慣性モーメント、 U は静電エネルギーである。 S_F は Entropy であり、ここでは UCSD の結果をふまえて $n_0 = N/R^2L$ とする [7]。 Z_2 は Enstrophy に対応する。何れも画像計測により得られた密度分布から計算することが可能である。

図 6.10 に各積分量の変化を示す。真空中に渦糸を入射した場合を×で、背景渦中で渦紐が崩壊しない場合を○で、背景渦中で渦紐が崩壊する場合を●で表す。何れも初期値で規格化してある。全電子数 N の時間変化を図 6.10 (a) に示す。どの場合についても N は数 % の範囲で一定であり、実験の再現性が高いことを表している。背景渦がある場合に比べ、真空中に渦糸を入射した場合には N の変化が多少大きくなる。これは真空中の場合は電子数が少なく分布も狭いために計測の誤差が大きくなるためである。図 6.10 (b) に二次の慣性モーメント I の時間変化を示す。何れの場合も I は N のばらつきの範囲内で一定であり、長時間にわたり良く保存される。図 6.10 (c) に

静電エネルギー U の時間変化を示す。背景渦がある場合については U も N のばらつきの範囲内で長時間にわたり良く保存される。真空中の場合は若干ばらつきが大きくなるものの、数百 μs 以前の時間帯においては良く保存される。これは渦度の分布が狭いため級数展開による計算の誤差が大きくなるためである。また真空中の場合には 1 ms 付近から U が減少する傾向が見られる。これは、この時刻で電子間の Coulomb 衝突に起因する緩和が始まるためであり、分布が狭い真空中の場合には背景渦がある場合に比べその影響を強く受けるためと考えられる。Entropy S_F の時間変化を図 6.10 (d) に示す。 S_F については何れの場合も時間の経過とともに減少して行く傾向が観測される。これは式 (6.16) の定義から、密度分布の高さが全体としては低くなることを表している。図 6.10 (e) に Enstrophy Z_2 の変化を示す。真空中の場合と背景渦中で渦紐が崩壊する場合には、 Z_2 は最初の数十 μs で約 10 % 減少する。これに対し、背景渦中で渦紐が崩壊しない場合には、 Z_2 は最初の数十 μs で約 10 % 増加する。その後、背景渦がある場合には Z_2 は一定となるが、真空中では 1 ms 程度経過した辺りから再び減少を始める。これは U の場合と同様の理由による。背景渦がある場合については Z_2 が変化する時間帯と、渦紐が背景渦度の勾配を登る (変形する) 時間帯は一致する。

以上の結果から、真空中に渦糸を入射した場合、背景渦中で渦紐が崩壊しない場合、する場合の何れにおいても電子間の Coulomb 衝突を無視できる 1 ms よりも前の時間帯では N , I , U は良く保存されることが確認された。その一方で、何れの場合にも S_F , Z_2 は渦紐入射直後の数十 μs で約 10 % と比較的大きく変化することも確認された。ただし、 Z_2 についてはわずかな散逸を取り込むだけで保存が成り立たなくなることが Euler 流体の数値シミュレーションで確認されている。この様に基本的にはこれらの積分量が良く保存されること、また前節までに示したように渦紐の運動や変形が基本的には Euler 方程式で良く記述できることから、電子間の Coulomb 衝突を無視できる 1 ms よりも前の時間帯では、系全体としては純電子プラズマと二次元 Euler 流体の等価性は良く成り立っていると考えられる。

しかし、その一方で、渦紐の崩壊時に見られる密度の低下や Z_2 が変化することから、限られた領域では等価性が破れている可能性がある。ここで、渦紐の崩壊現象や Z_2 の変化する時間帯と渦紐が背景渦度の勾配を登る (変形する) 時間帯とが一致することから、等価性の破れは渦紐およびその周辺で、渦紐と背景渦度の相互作用によって生じると考えられる。

そこで、次に渦紐の形状の変化に注目する。図 6.11 に渦紐の形状の時間変化を示す。真空中に渦糸を入射した場合を \times で、背景渦中で渦紐が崩壊しない場合を \circ で、背景渦中で渦紐が崩壊する場合を \bullet で表す。何れも初期値で規格化してある。前節では背景渦中に渦紐を入射した場合には、観測された全渦度分布 ζ から背景渦度 ζ_b を差し引いたものを渦紐の渦度 ζ_v と定義した。しかし、二次元 Euler 流体において変化しないのは全渦度 ζ の高さである。従って、以降では全渦度を用いて渦紐の渦度 $\zeta_v(x, y, t) (= \zeta(x, y, t))$ を定義する。また以下では、電子間の Coulomb 衝突を無視できる 1 ms よりも前の時間帯に注目する。図 6.11 (a) に渦紐の密度の最大値 n_{vm} の時間変化を示す。真空中に渦糸を入射した場合には n_{vm} は数 % の範囲で一定であり、良く保存される。一方、渦紐が崩壊する場合については、前節で示したように n_{vm} は急激に減少し、 $24\ \mu\text{s}$ 以降では背景渦に呑み込まれてしまう。これに対し、渦紐が崩壊しない場合には、 n_{vm} は最

初の $100 \mu\text{s}$ 程度で急激に増加し、入射直後の値の 1.7 倍程度まで増加する。図 6.11 (b) に渦紐の $1/e$ 断面の面積 $S_{1/e}$ を示す。真空中の場合には、 $S_{1/e}$ 若干増加する傾向があるもののほぼ一定である。渦紐が崩壊する場合については、 $S_{1/e}$ は急激に増加し、渦紐が呑み込まれる直前には初期値の 7 倍程度まで増加する。渦紐が崩壊しない場合については、 $S_{1/e}$ は初め増加したあと、減少に転じ $100 \mu\text{s}$ 以降ではほぼ初期値と同じ大きさで一定する。これは図 6.2 に示した $1/e$ 断面の楕円度の変化と同様の傾向である。図 6.11 (c) に $S_{1/e}$ に含まれる電子数 N_v の変化を示す。何れの場合も、 N_v の変化は $S_{1/e}$ の変化と同様の傾向を示す。この様に、真空中では渦紐の形状はほとんど変化しないが、背景渦中では渦紐が崩壊する場合はもちろん崩壊しない場合についても、渦紐が背景渦度の勾配を登る時間帯でその形状が大きく変化することが確認された。この時間帯では電子プラズマは無衝突であると考えられるので、渦紐の形状の変化は非圧縮性が破れることにより生じると考えられる。

ここで、 n_{vm} の変化に注目する。背景渦中で渦紐が崩壊しない場合について、渦紐の最大密度の最大値 $n_{vm}(t_m)$ と入射直後の値 $n_{vm}(t_0)$ の比を $n_{vm}(t_0)$ と渦紐入射位置での背景渦の密度 $n_b(r_0)$ の比の関数として図 6.12 (a) に示す。記号は渦糸の入射位置を表し、 $r_0 = 4.8 \text{ mm}(\square)$ 、 $r_0 = 9.8 \text{ mm}(\circ)$ である。 t_m は典型的には $200 \mu\text{s}$ となる。 n_{vm} の変化は、明らかに $n_{vm}(t_0)/n_b(r_0)$ の増加に対して減少する。その傾向は、渦紐の入射位置によって異なり、渦紐を内側に入射した方が増加率の変化は大きくなる傾向にある。さて、前述のように、 n_{vm} は背景渦中を運動しながら増加して行くので、最大渦度の増加率は $n_b(r_0)$ の様な局所的な値ではなく全電子数のような積分値の関数とするほうが適当であると考えられる。そこで、 n_{vm} の変化率を渦紐の電子数 N_v と背景渦の電子数 N_b の比の関数として図 6.12 (b) に示す。 n_{vm} の変化は、 $N_{vm}(t_0)/N_b$ の増加に対して減少する。この場合、渦度の関数とした場合に比べて入射位置での依存性が小さくなる。以上の結果は背景渦が強いほど非圧縮性の破れは強く、渦紐が強ければ渦紐に対するその影響が弱いことを表している。これは、渦紐の近傍において渦紐と背景渦度の相互作用により非圧縮性が破れる可能性を示唆している。

この様に、背景渦中において渦紐の渦度が増加する原因としては、渦紐周りの局所的な巻き込みによる微細構造の形成が考えられる。即ち、渦紐周辺の背景渦度分布が渦紐の高速な自転に巻き込まれることにより、その周辺にシート状の分布を形成し、このシートが薄く引き伸ばされ渦紐にきつく巻き付き合体することにより、渦紐の密度を押し上げている可能性である。同様に、渦紐が崩壊する場合については、渦紐から伸びた渦度の腕が細く引き伸ばされ、背景渦と合体している可能性がある。

これまでは、渦紐の最大渦度、断面積などその形状の一部を表すパラメータについて検討を行なった。ここで、渦度分布全体の変化を検討するために、横軸が密度、縦軸が画像データの画素数 (\propto 面積) とした渦度の頻度関数を図 6.13~図 6.15 に示す。非圧縮性が成立している、即ち Euler 流体であれば、渦度は変化しないので頻度関数も変化しない。

図 6.13 に真空中に渦糸を入射した場合の密度の頻度関数の時間発展を示す。渦糸の分布は非常に狭く、ほぼ Gauss 分布をしている。従って、密度の頻度としてはゼロ近辺が極端に多く、密度が高くなるほど頻度が下がる分布となる。初期の時間帯 (図 6.13 (a)~(d)) では頻度関数の形はほ

とんど変化しない，即ち，二次元 Euler 流体との等価性が良く成立していることが分かる．一方，時刻が ms を越えると (図 6.13 (d), (e)) 密度の高い部分の頻度が減少し，低い部分の頻度が増加していく．これは電子間の Coulomb 衝突に起因した緩和過程を表しており，図 6.10 (e) に示した Z_2 の減少に対応する．

図 6.14 に背景渦中で渦紐が崩壊しない場合について頻度関数の時間発展を示す．実線は渦紐圏内の密度の頻度を表し，破線はそれ以外の場所 (背景渦) の頻度を表す．ここで，渦紐圏内とは渦紐の最大渦度の地点を中心とした半径 $2r_{1/e}$ の円形の領域であり， $r_{1/e} = \sqrt{S_{1/e}/\pi}$ である．初期の時間帯 (図 6.14 (a)~(f)) においては，時間の経過に伴い渦紐の頻度関数が密度の高い方に分布を広げ，それに伴い各密度の画素数が減少する様子が観測される．即ち，渦紐圏内では頻度関数が急速に変化する．初期の時間帯における Z_2 の増加は，この頻度関数の変化に起因すると考えられる．渦紐の頻度関数の低密度側の端 (左端) が時間の経過とともに高密度側へと移動するのは，渦糸が背景渦度の山を登ることにより，渦糸圏内の最低密度が増加するためである．一方，背景渦度の頻度関数はほとんど変化せず，良く保存される．時刻が ms を越えると (図 6.14 (g), (h)) 渦紐の頻度関数は低密度側へと移動するが，背景渦の頻度関数はこの時点でも大きくは変化しない．

このように，渦紐圏内では頻度関数が急速に変形しており，非圧縮性が成立していないことが確かめられる．一方，もし背景渦と渦紐を別々に考えることが出来て渦度が線形の関係にあるならば，全渦度は背景渦度と渦紐の渦度の和となり，渦紐が背景渦を登りきったときに渦度が最大となるはずである．この場合，渦紐の渦度の最大値は $2.4 \times 10^{-13} \text{ m}^{-3}$ 程度となるはずである．しかし，実際には最大密度は $4 \times 10^{-13} \text{ m}^{-3}$ まで増加しており，これは線形と考えた場合の 1.5 倍程度の値である．従って，この渦紐の変形は Euler 方程式以外の強い非線形性により生じている可能性がある．

図 6.15 に背景渦中で渦紐が崩壊する場合について頻度関数の時間発展を示す．時間の経過に伴い，渦紐の頻度関数が急激に低密度側へと移動し，背景渦の中に呑み込まれて行く様子が観測される．この場合も，背景渦の頻度関数は良く保存されている．

以上の結果から，真空中に渦糸を入射した場合にはその頻度関数は良く保存され，二次元 Euler 流体との等価性が良く成立することが確認された．一方，背景渦がある場合については渦紐圏内で密度の頻度関数が急激に変化するが背景渦についてはその分布関数は良く保存されることが確かめられた．従って，背景渦の大部分では非圧縮性が成立しているが，渦紐内部及びそのごく近傍で非圧縮性が破れていると考えられる．

さて，渦紐周辺で非圧縮性が破れる原因としては前述のように，渦度分布の巻き込み・引き伸ばしによる微細構造の形成が考えられる．微細構造の形成により等価性が破れる理由としては次の二つが上げられる．一つは，構造が計測系の空間分解能よりも小さくなるために生じる粗視化の問題である．これは計測の問題であり，等価性は見掛け上破れるだけで純電子プラズマの Euler 流体としての特質は失われない．もう一つは，微細化に伴う散逸効果の影響である．これは，電子密度の空間分布の変化が Larmor 半径程度まで細くなることにより，局所電場によって円軌道からのずれが大きくなり，非圧縮性を保証していた $E \times B$ ドリフト近似が成立しなくなることにより発生する．この場合には Euler 流体としての特質は失われることになる．

現在の実験では、計測系の空間分解能はおよそ $140 \mu\text{m}$ であり、電子の Larmor 半径は $70 \mu\text{m}$ 程度であるので、粗視化も散逸効果も同程度のスケール長で生じる。従って、現状ではこの二つを実験的に分離することは困難である。

従って、今後の実験的検討の方向としては次の二つがある。一つは、画像計測の空間分解能を上げて粗視化の境界を下げることである。これは蛍光面上の光量分布を光学的に拡大して CCD カメラで観測することにより実現できる。ただし、この方法では計測の視野は狭くなる。もう一つは、磁場強度を変化させることにより、電子の Larmor 半径、即ち散逸のスケールを変化させることである。ただし、磁場を弱くすると Larmor 半径が大きくなり、電子の拘束も弱くなるので他の様々な効果が導入されてしまう。従って、磁場は強くする方向に変化させる必要がある。現在、強磁場下で実験を行なうために超伝導コイルの導入を行なっており、これにより磁場強度を現実験より最大 40 倍の範囲で変化させることが可能となる。これら、粗視化と散逸スケールという二つの境界パラメータを制御することにより、純電子プラズマを用いた渦の実験は更に詳細な実験的研究へと発展しうる。

6.5 まとめ

この章では、勾配をもつ背景渦度分布中におかれた渦紐に誘起される変形について報告した。空間分布に勾配のある背景渦の中におかれた渦紐は、自身の場によって周囲の背景渦度分布を変形し、その結果誘起された場によって、勾配を登る方向に駆動される。現実の渦紐は有限の拡がりの分布を持つため、渦糸と異なり背景渦の場により変形を受け楕円状の断面を示す。観測された楕円度の大きさは背景渦度分布の作る Shear と渦紐の渦度の比 $|A/\zeta_0|$ の関数として記述することができる。この実験結果は数値的には Moore と Saffman の理論モデルからの予測値に近い。ただし、理論モデルでは楕円度が $|A/\zeta_0|$ の増加に対し下に凸で増加するのに対し、実験では上に凸の増加関数となる。観測された渦度の楕円度は、線形解析から導出された安定性の臨界値 ($E_c \approx 2.89$) を越えない。この上限を満足するために、存在しうる渦度分布の楕円度は $|A/\zeta_0|$ の増加に対し上に凸の分布をせざるを得ないと考えられる。

しかし、渦紐の変形がさらに大きくなって、楕円度が臨界値よりも大きくなると渦紐は元の形に戻ることなく大きく引き伸ばされて背景渦度分布の中に埋もれてしまう。渦紐が崩壊するか否かの条件に関して Saffman/Kida モデルは我々の実験結果を十分説明しえない。判定条件を得ることは出来ないが、崩壊の過程は実験的に明らかになった。即ち、渦紐が静止した回転座標系で流れを見ると崩壊する場合は流線のセパトリクスが渦紐の半径の内側に入り、それより外にいる電子が開いた流線に沿って背景渦中へと流出する。この流出する電子は渦紐からのびる渦度の腕を形成する。

背景渦中においては、渦度の Entropy, Enstrophy が変化することから二次元 Euler 流体との等価性が破れている可能性がある。しかし、全電子数、慣性モーメント、静電エネルギーなどが良く保存され、渦紐の運動や変形が Euler 方程式で記述出来ることから、等価性の破れは渦紐周辺の限られた領域内では発生していないと考えられる。等価性が破れる理由としては、渦糸周りの

高速回転に周囲の渦度分布が局所的に巻き込まれて引き伸ばされ、電子密度の空間分布の変化が Larmor 半径程度まで細くなるため、局所電場によって円軌道からのズレが大きくなり、 $E \times B$ ドリフト近似が成立しないことが主たる原因と考えられる。この限界に関しては、将来的に磁場強度の強化と計測系の空間分解能を増強することにより、より定量的な検討が可能となる。

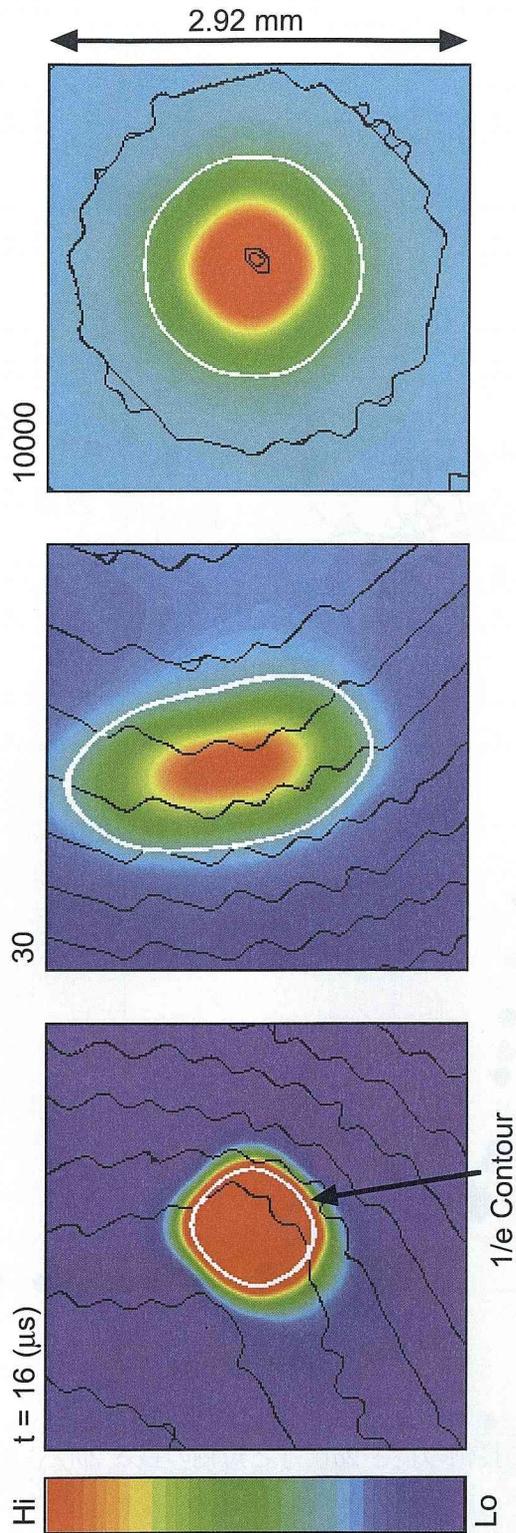


図 6.1: ケース 1 における渦紐周辺の渦度分布の拡大図。白線は渦度の $1/e$ の等高線を示す。黒線は流線を示す。

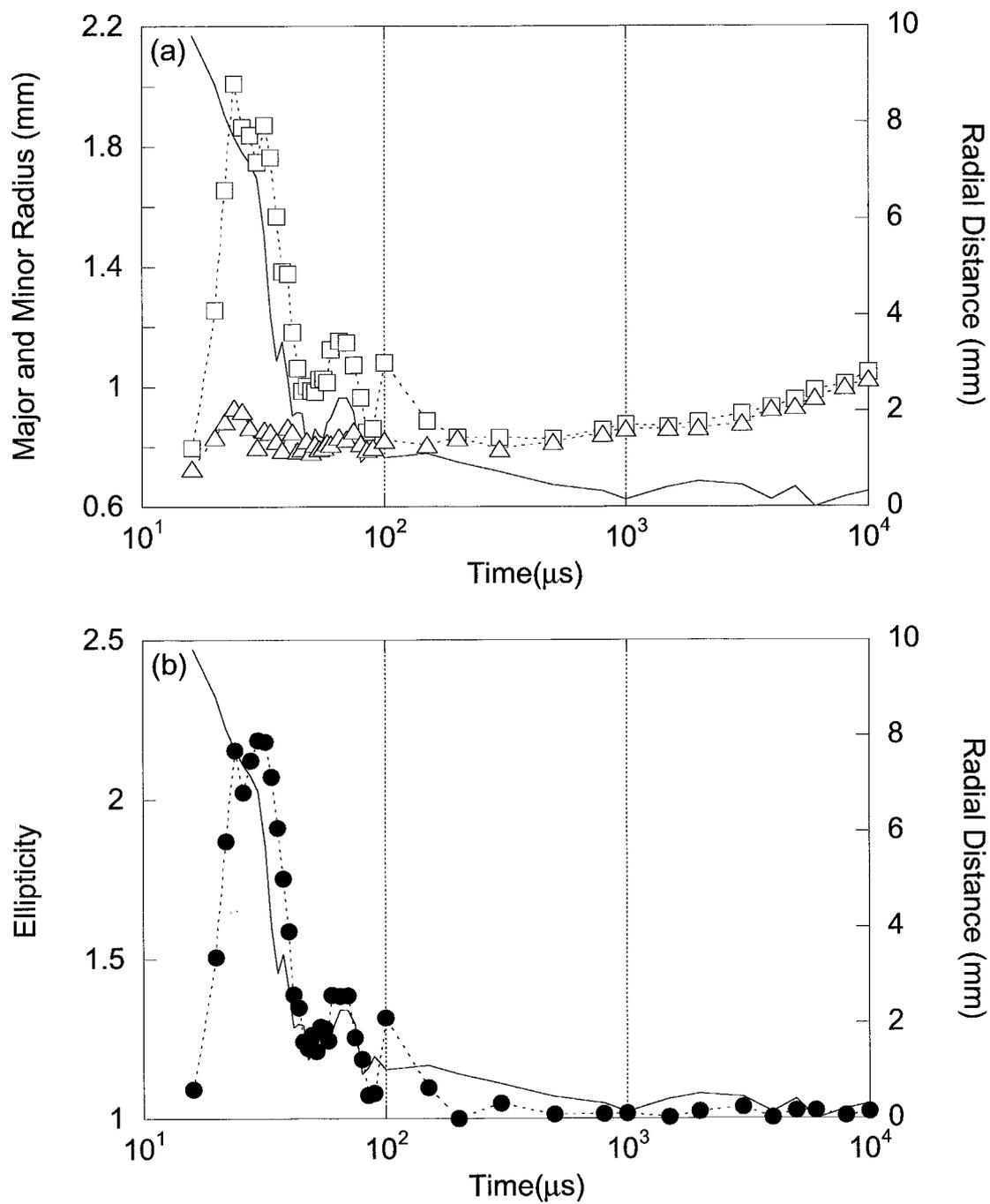


図 6.2: (a) 渦紐の $1/e$ 断面の長軸の長さ $2a(\square)$ と短軸の長さ $2b(\triangle)$ を時間の関数として示す. 実線は渦系の重心から渦紐までの距離を表す. (b) 渦紐の $1/e$ 断面の楕円度 $E = a/b(\bullet)$ を時間の関数として示す. 実線は渦系の重心から渦紐までの距離を表す.

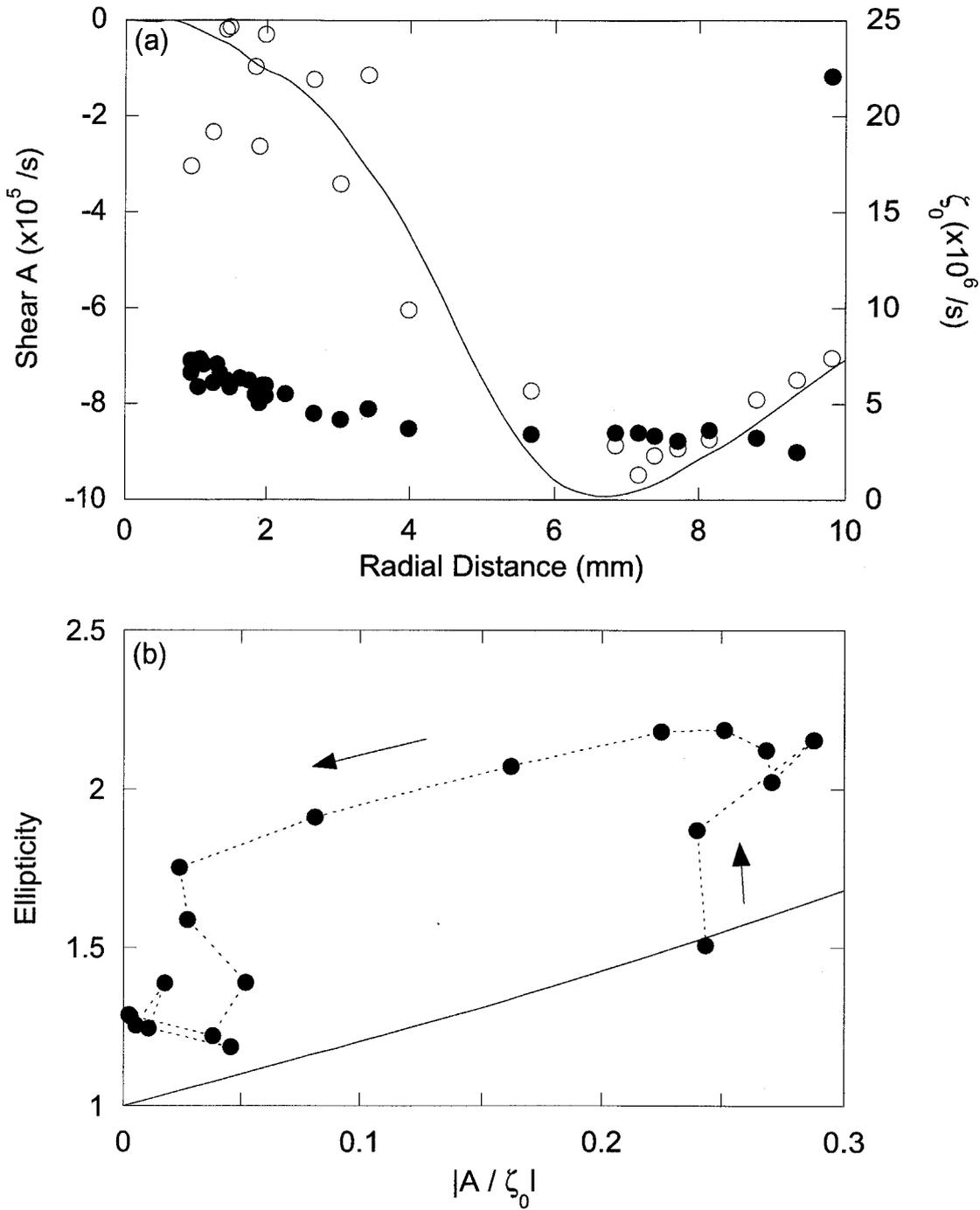


図 6.3: (a) 背景渦度分布の作る回転速度 $\text{Shear } A = -r\partial\Omega/\partial r$ を重心から渦紐までの距離の関数として示す。実線は渦紐入射前の背景渦度分布から計算した値を、白丸は各時間における背景渦度分布 ζ_b から評価した値を表す。黒丸は式 (6.8) で定義される渦紐の渦度である。(b) 渦紐の $1/e$ 断面の楕円度 E を $|A/\zeta_0|$ の関数として示す。黒丸は実験値を表し、矢印は現象の進行方向を示す。実線は Moore と Saffman のモデルから評価された楕円度を表す。

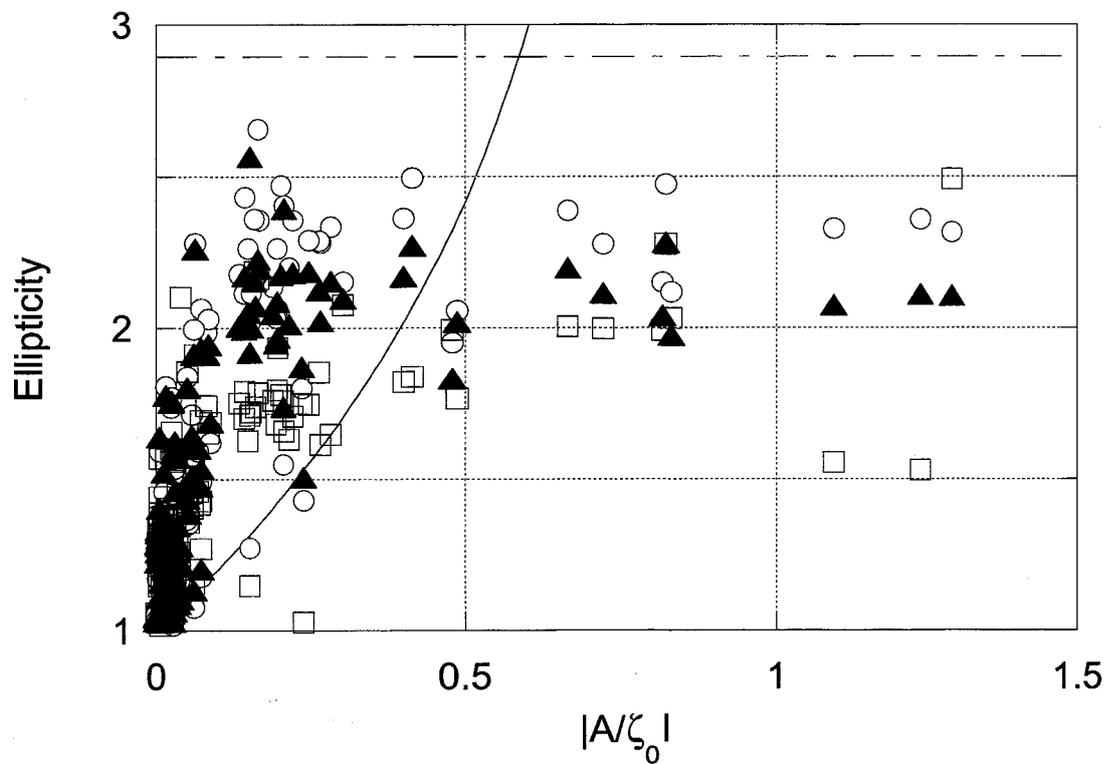


図 6.4: 渦紐の $(1 - 1/e)$ 断面 (○), $1/e$ 断面 (▲), $1/10$ 断面 (□) の楕円度の変化を示す. 実線はモデル計算による楕円度を表す. 理論解析による楕円度の臨界値 $E_c = 2.89$ を一点鎖線で表す.

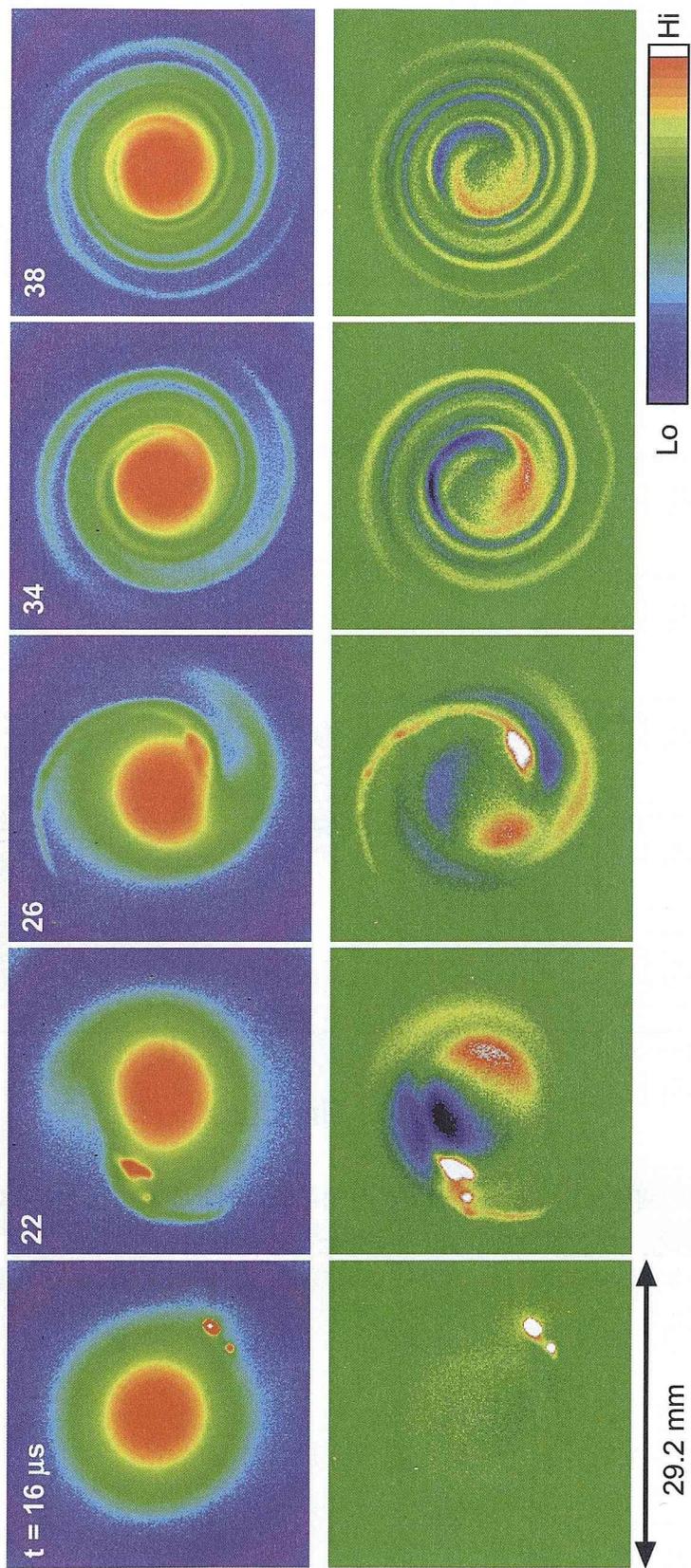


図 6.5: 渦度分布の時間発展. 背景渦の電子数は $N_b = 3.0 \times 10^8$, 渦紐の電子数は $N_L = 4.3 \times 10^6$ である. 上段は渦度の分布を, 下段は初期の背景渦度分布からの摂動を示す.

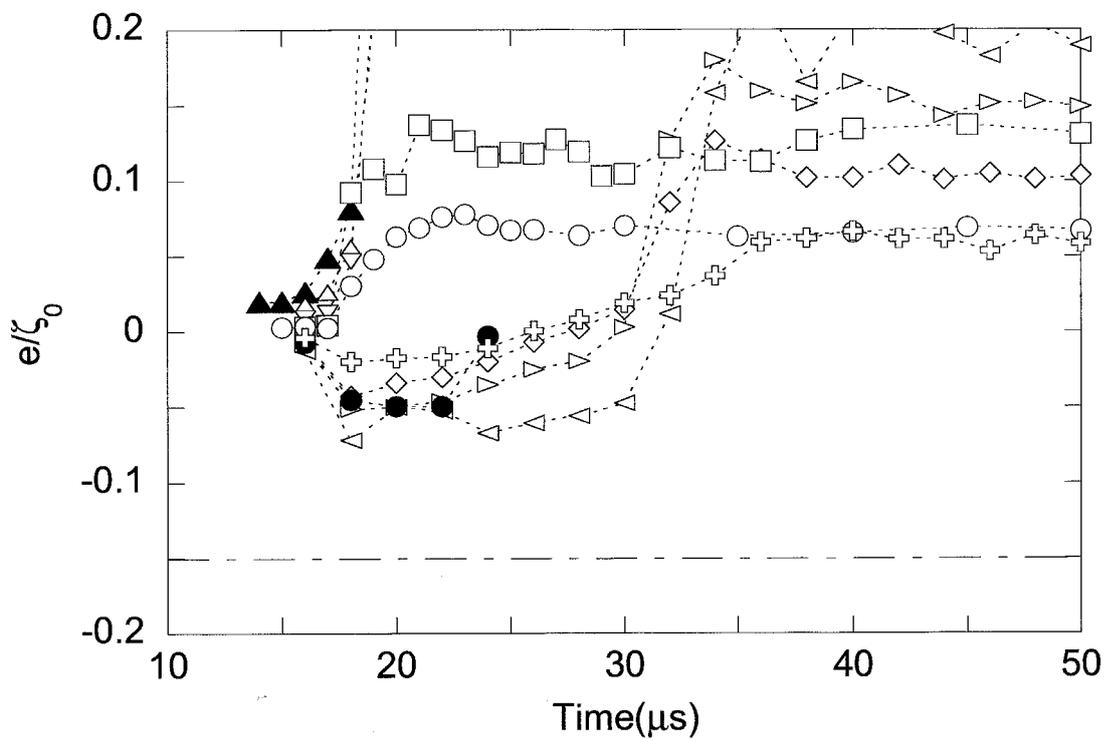


図 6.6: e/ζ_0 を時間の関数として示す. 白抜きの記号は渦紐が崩壊を起こさない場合, 黒塗りの記号は起こす場合である. 一点鎖線は Kida モデルによる臨界値 $e/\zeta_0 = -0.15$ を表す.

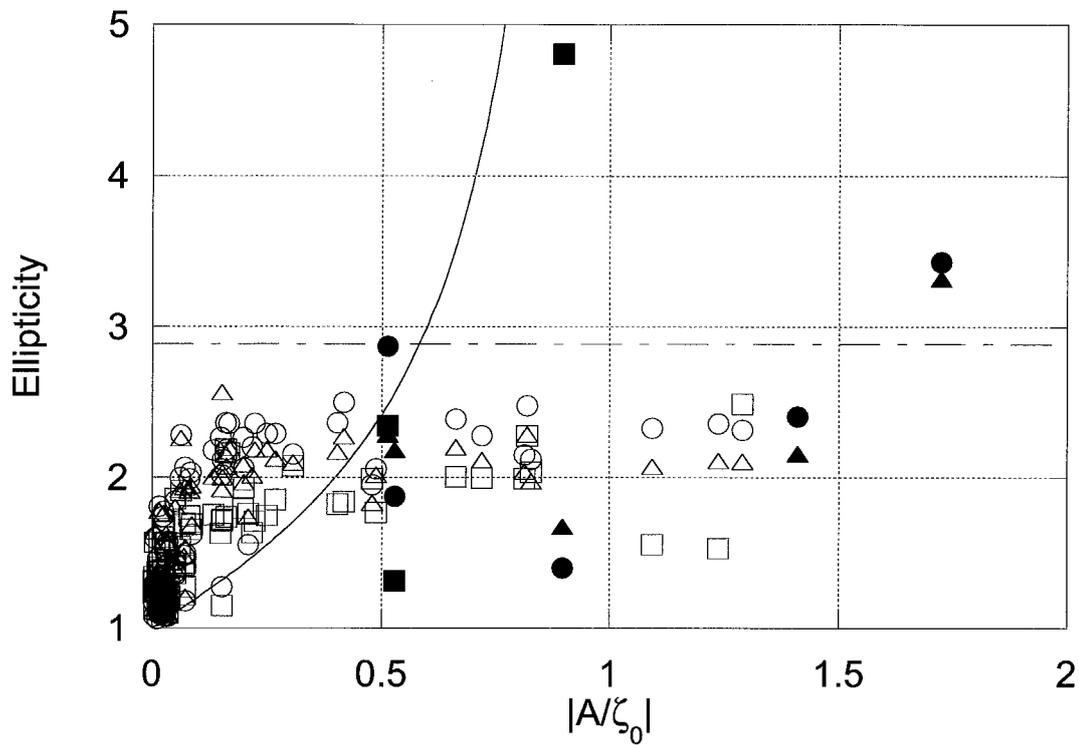


図 6.7: 渦紐の $(1 - 1/e)$ 断面 (丸), $1/e$ 断面 (三角), $1/10$ 断面 (四角) の楕円度の変化を示す. 黒塗りの記号は渦紐が崩壊を起こす場合, 白抜きは起こさない場合を表す. 実線はモデル計算による楕円度を表す. 理論解析による楕円度の臨界値 $E_c = 2.89$ を一点鎖線で表す.

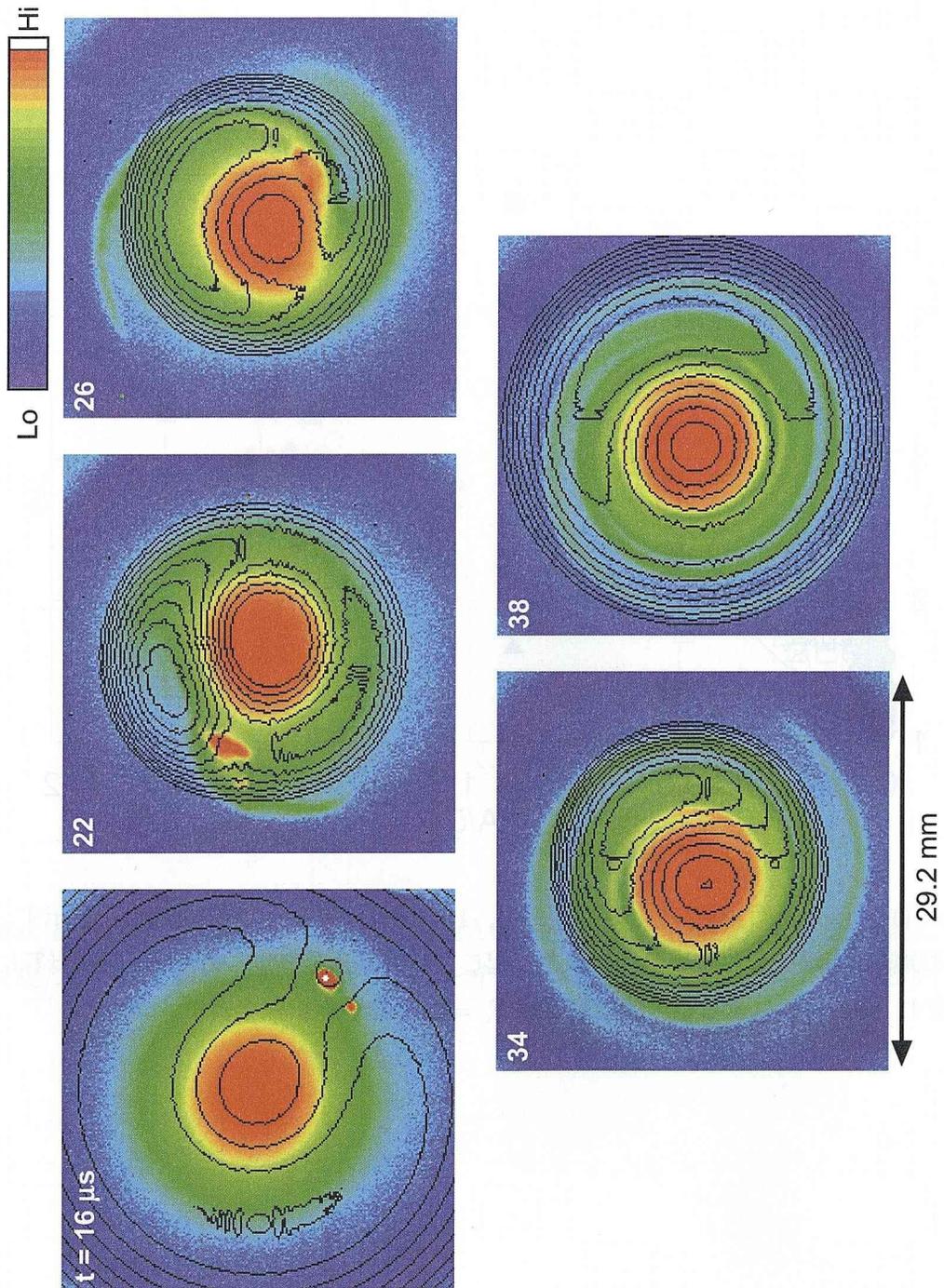


図 6.8: 渦紐と同じ速さで回転する座標系から見たポテンシャルの分布. 実線は等ポテンシャル面を表す. 上段は図 5.1, 下段は図 5.5 の場合に対応する.

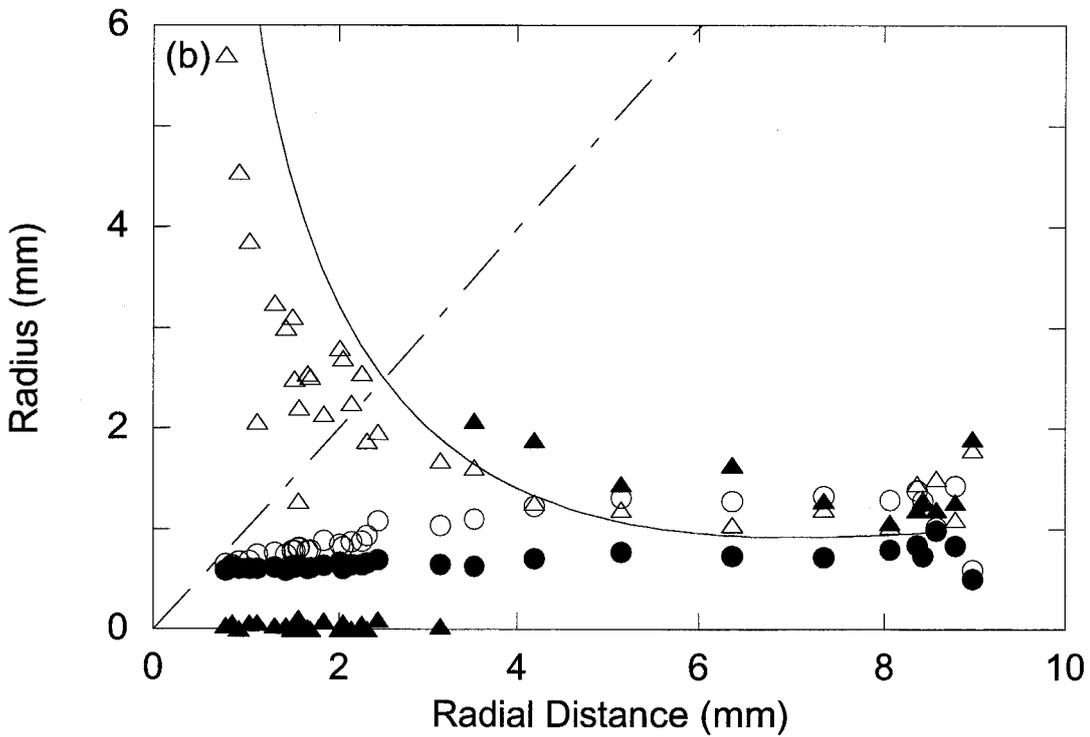
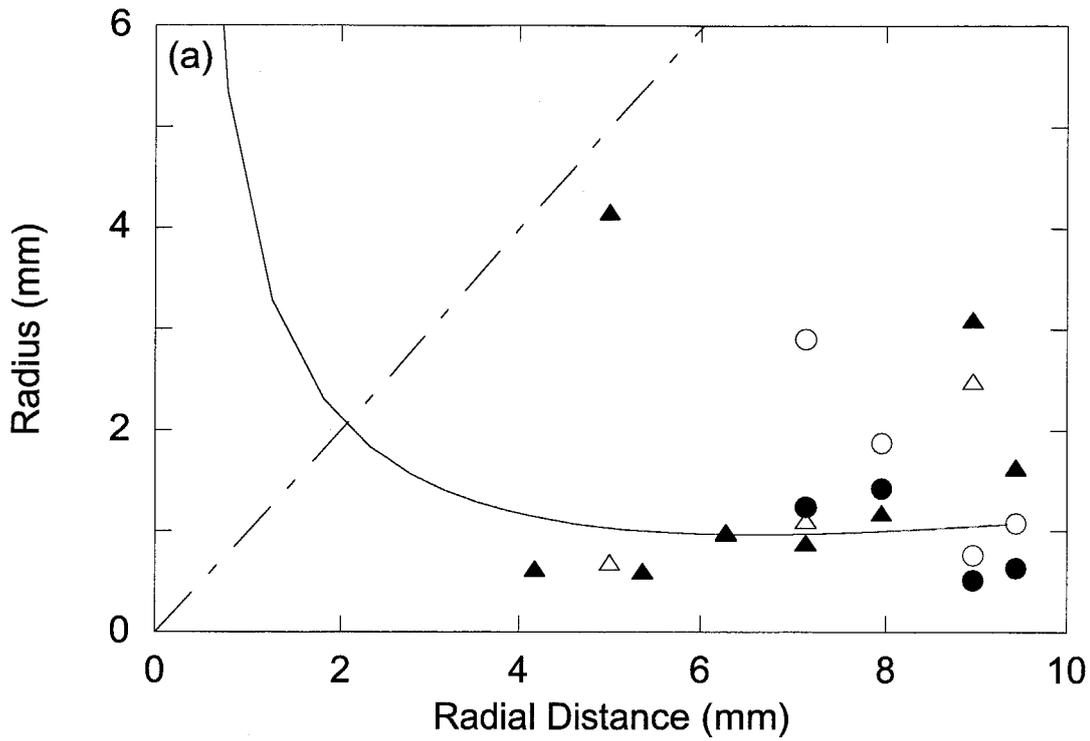


図 6.9: 渦紐半径とセパトリクス半径を重心から渦紐までの距離 r の関数として示す。渦紐の 1/10 断面に置ける長軸 $a_{1/e}$ を○で、短軸 $b_{1/e}$ を●で表す。背景渦の山側のセパトリクスまでの距離を▲で、谷側のセパトリクスまでの距離を△で表す。実線は理想的な渦糸が作るセパトリクスの半径 $l_s = (\Gamma/2\pi|A|)$ を表す。(a) は渦紐が崩壊する場合、(b) はしない場合である。

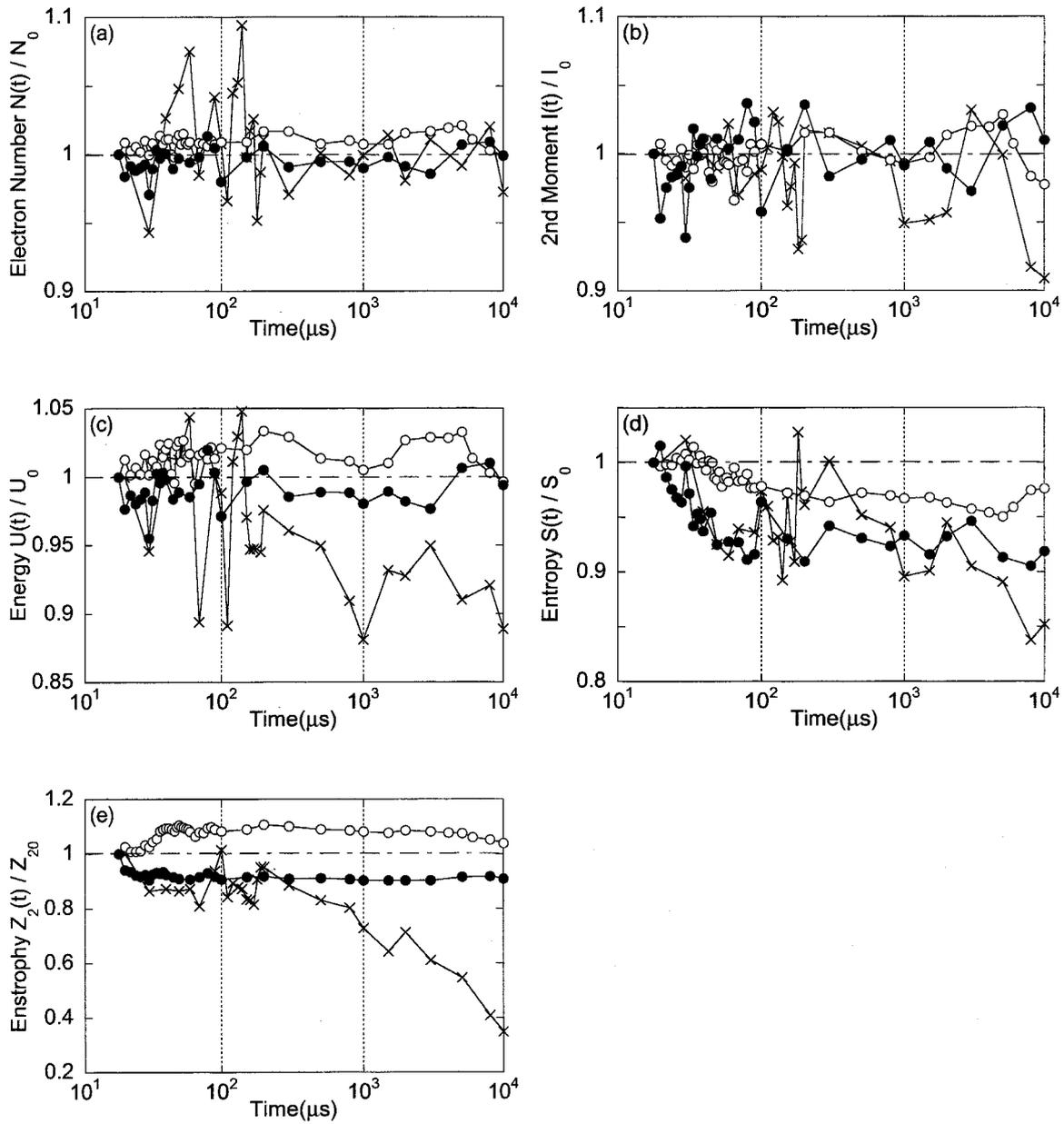


図 6.10: (a) 電子数 N , (b) 二次の慣性モーメント I , (c) 静電エネルギー U , (d) Entropy S_F , (e) Enstrophy Z_2 の変化を示す。何れも初期値で規格化してある。真空中に渦糸を入射した場合を \times で、背景渦中で渦紐が崩壊しない場合を \circ で、背景渦中で渦紐が崩壊する場合を \bullet で表す。

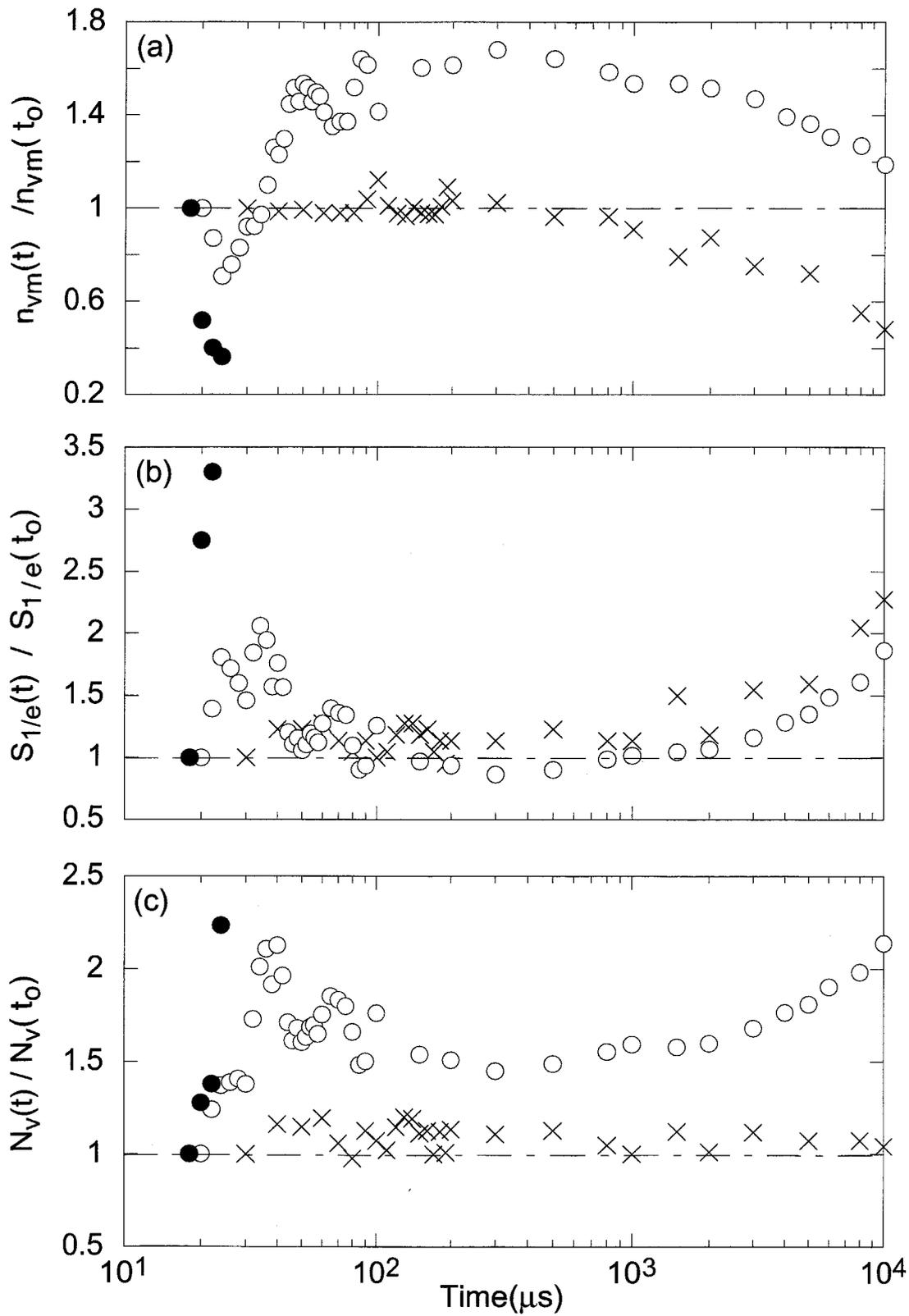


図 6.11: 渦紐の密度の最大値 n_{vm} (a), $1/e$ 断面の面積 $S_{1/e}$ (b), $S_{1/e}$ 内の電子数 N_v (c) の時間発展を示す。真空中に渦糸を入射した場合を×で、背景渦中で渦紐が崩壊しない場合を○で、背景渦中で渦紐が崩壊する場合を●で表す。

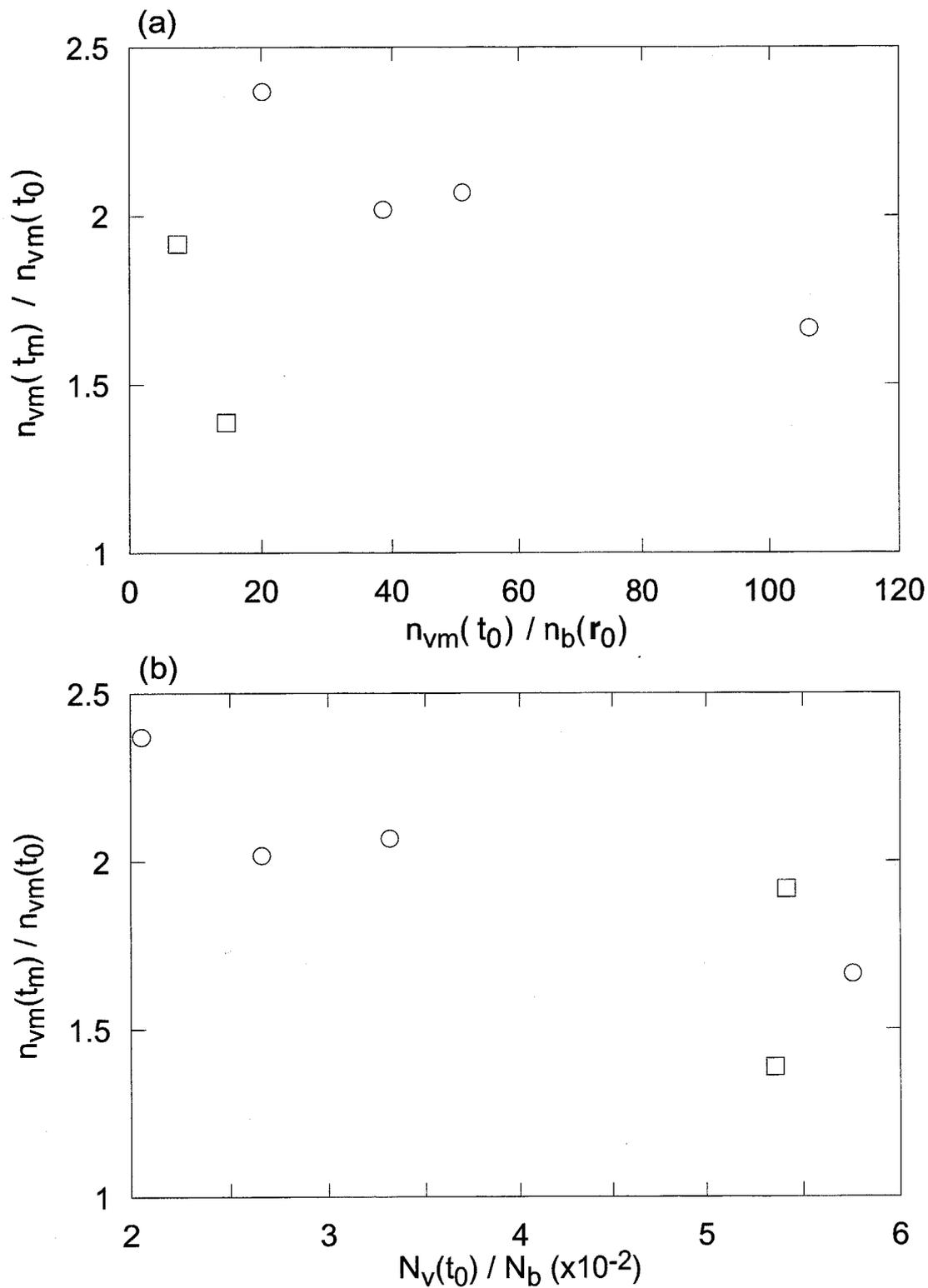


図 6.12: (a) 背景渦中で渦紐が崩壊しない場合について、渦紐の最大密度の最大値 $n_{vm}(t_m)$ と入射直後の値 $n_{vm}(t_0)$ の比を $n_{vm}(t_0)$ と入射位置における背景渦の密度 $n_b(r_0)$ の比の関数として示す。(b) 同じく入射直後の渦紐の電子数 N_v と背景渦の電子数 N_b の比の関数として示す。記号は渦糸の入射位置を表し、 $r_0 = 4.8$ mm(□), $r_0 = 9.8$ mm(○) である。

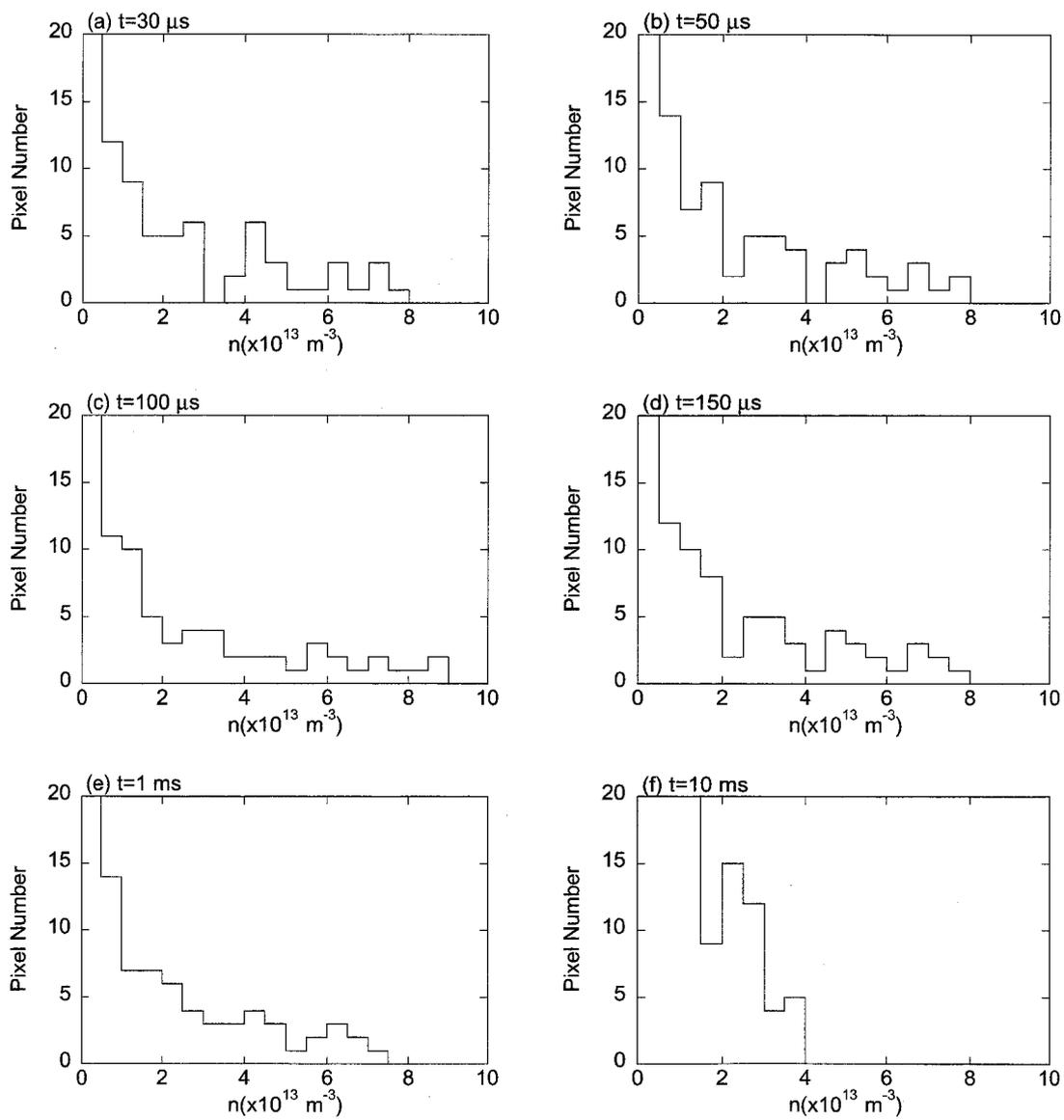


図 6.13: 真空中に渦紐を入射した場合の渦度の頻度関数の時間発展.

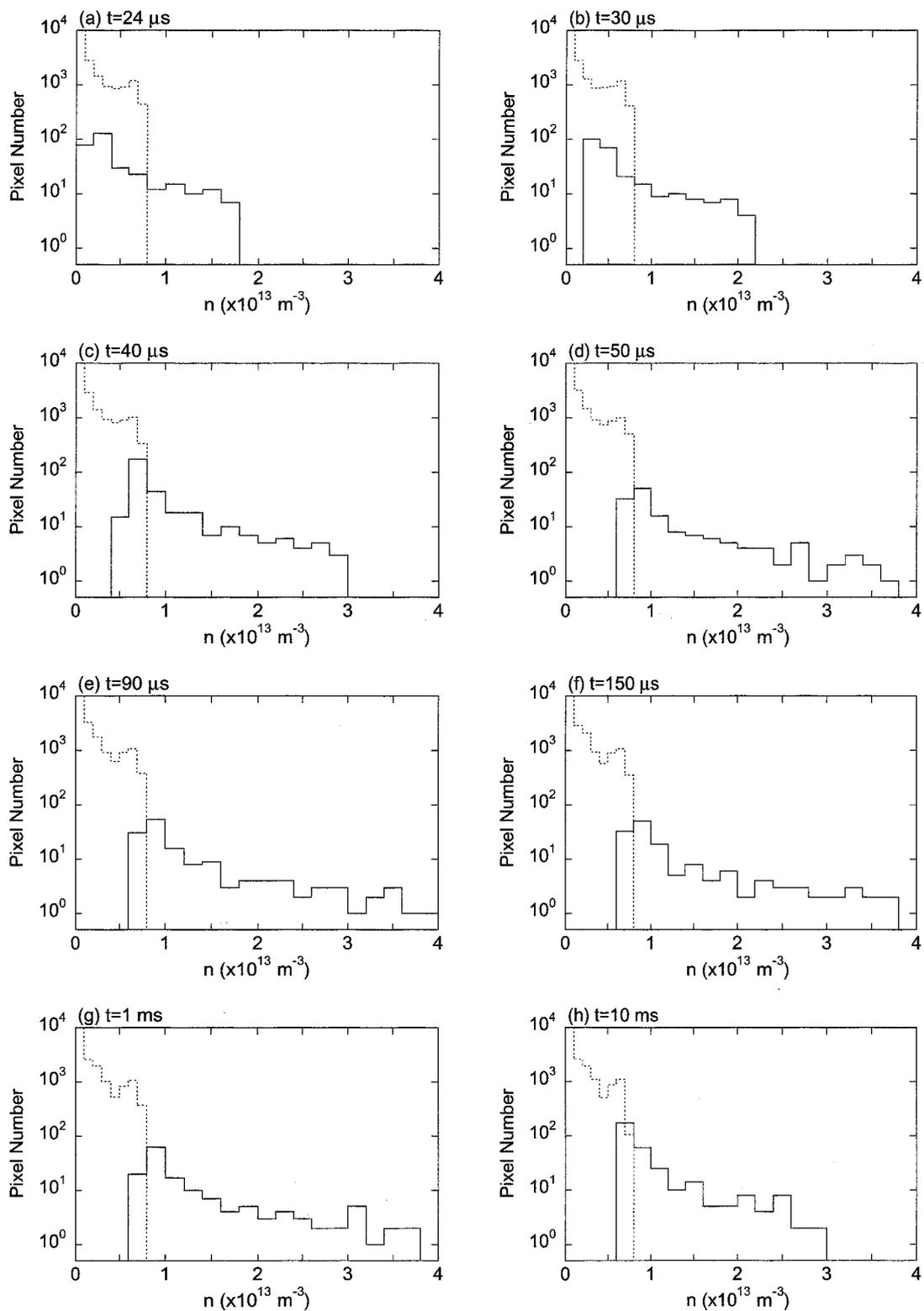


図 6.14: 背景渦中で渦紐が崩壊しない場合の渦度の頻度関数の時間発展を示す。実線は渦紐の、破線は背景渦の頻度関数を表す。

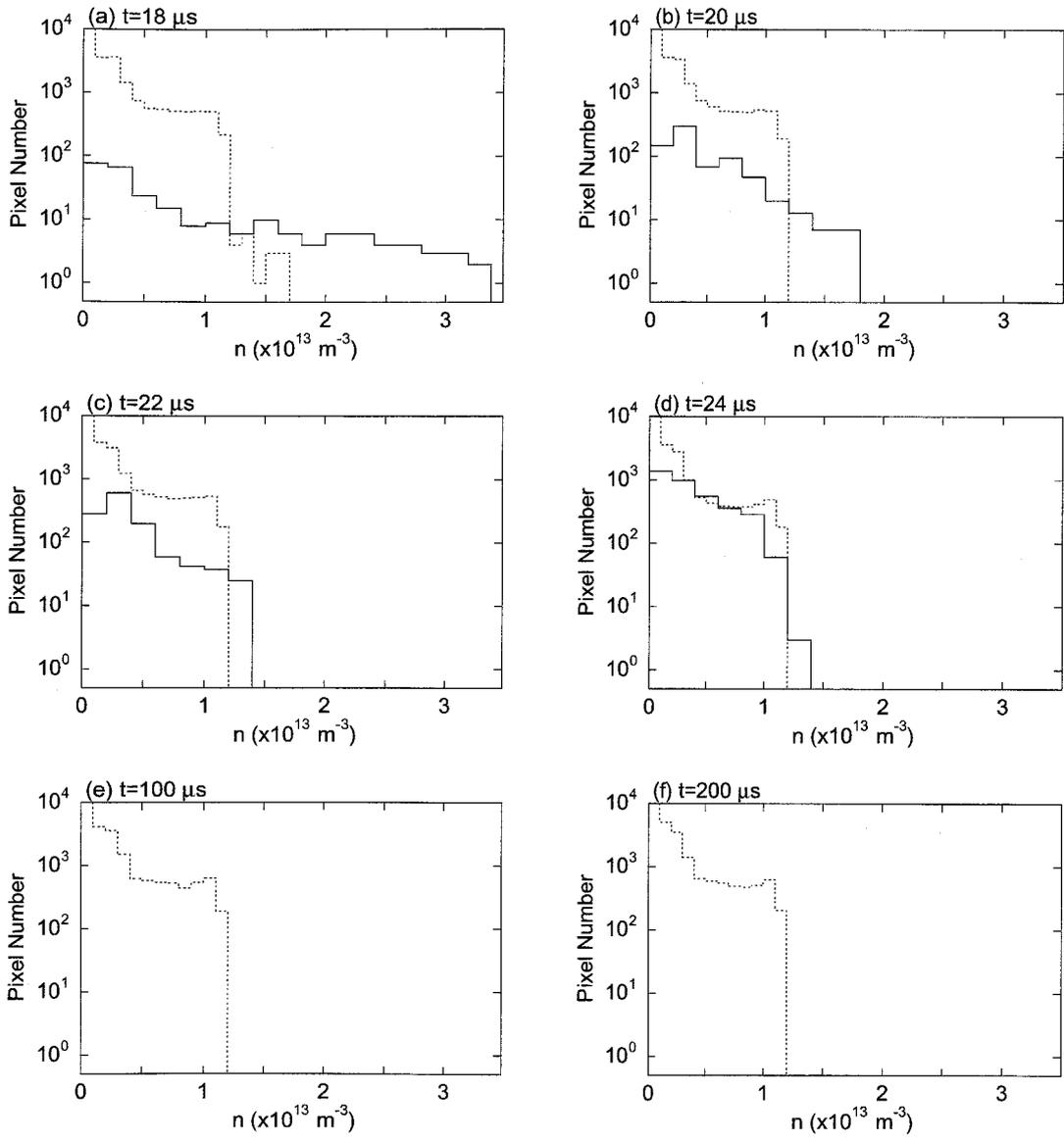


図 6.15: 背景渦中で渦紐が崩壊する場合の渦度の頻度関数の時間発展を示す。実線は渦紐の、破線は背景渦の頻度関数を表す。

関連図書

- [1] K. Ito, Y. Kiwamoto, A. Sanpei, *Non-neutral Plasma Physics IV*, (AIP Conference Proceedings 606) p474-479, Proceeding of 2001 Workshop on Nonneutral Plasmas, University of California, San Diego July 30 - August 2, 2001.
- [2] P. G. Saffman, *Vortex Dynamics*, Cambridge Press (1992).
- [3] S. Kida, *J. Phys. Soc. Jpn.* **50**, 3517 (1981).
- [4] D. L. Eggleston, *Phys. Plasma* **1**, 3850 (1994).
- [5] K. S. Fine, C. F. Driscoll, J. H. Malmberg, and T. B. Mitchell, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 588 (1991).
- [6] M. Romé, M. Brunetti, F. Califano, F. Pegoraro and R. Pozzoli, *Phys. Plasmas* **7**, 2856 (2000).
- [7] A. J. Peurrung and J. Fajans, *Phys. Fluids* **B5**, 4295 (1993).

第7章 まとめ

本研究では、強く磁化された電子プラズマを用い、二次元 Euler 流体の渦運動を実験的に検討した。この論文で報告した主な結果は次の通りである。

渦度分布からの速度場の実験的導出と静電誘導計測との比較

級数展開を用いることにより、観測された密度分布から、二次元のポテンシャル、電場を高速に計算する手法を確立した。これにより流体力学を電磁気学に焼き直すことが可能となった。また実験結果から流体力学における様々統計量を評価するのにも有効である。この手法は非中性プラズマを使った渦運動や乱流の研究に不可欠である。

この手法を適用して、画像計測と静電誘導計測の持つ情報量を初めて定量的に比較した。電子プラズマが一本の糸状に分布している場合には、静電誘導計測により画像計測と同等の情報が得られることを示した。しかし、密度分布が複雑な場合には静電誘導計測で得られる情報は限られており、プラズマ中心部の運動を観測するには画像計測が有効であることを確認した。

真空中の離散的な渦糸群の運動

1~4本のプラズマの渦糸の運動を詳細に追跡し、その運動が渦糸の運動方程式と良く一致することを初めて確認した。ただし、プラズマを保持するために印加する外場には渦糸全体を回転させる効果があり、プラズマの渦運動を正確に評価するにはこれを導入する必要がある。外場の影響を数値的に評価し、実験とよく一致することも示した。

背景渦中の渦紐の運動

背景の渦度分布が勾配を持つときには、渦糸は背景渦度の高い方向へと移動し、その過程で背景渦中に螺旋状の構造が生成されることを観測した。渦糸の運動をこの構造が作る速度場から説明し、この構造が渦糸と背景渦の相互作用により誘起されることを示した。

観測された渦糸運動を Schecter らの線形モデルと定量的に比較し良い一致を得たが、同時に幾つかの相違点も確認された。一方、密度分布から評価した電場分布を用いると渦糸の運動を良く再現できることを示した。これは、電場から渦運動を評価する手法が極めて有効であることを示唆している。またこの結果から、実験と線形モデルの相違は背景渦度分布の非線形な発展に起因することが確かめられた。

背景渦中での渦紐の変形と崩壊

空間分布に勾配のある背景渦の中におかれた渦糸は、現実には有限の拡がりの分布を持つため(渦紐)、背景渦の場により変形を受け楕円状の断面を示す。観測された楕円度の大きさは背景渦度分布の作る Shear と渦紐の渦度の比 $|A/\zeta_0|$ の関数として記述できることを確認した。この結果は数値的には理論モデルからの予測値に近い。ただし、理論モデルでは楕円度が $|A/\zeta_0|$ の増加に対し下に凸で増加するのに対し、実験では上に凸の増加関数となる。このため線形解析から導出された安定性の臨界値を越えることはない。

しかし、変形がさらに大きくなって、楕円度が臨界値よりも大きくなると渦紐は元の形に戻ることなく背景渦度分布の中に埋もれてしまう。線形モデルは渦糸が崩壊する条件に関して実験結果を十分説明しえないが、崩壊の過程は実験的に明らかにした。即ち、渦紐が静止した回転座標系で流れを見ると崩壊する場合は流線のセパトリクスが渦紐の半径の内側に入り、それより外にいる電子が開いた流線に沿って背景渦中へと流出する。この流出する電子は渦紐からのびる渦度の腕を形成する。

二次元 Euler 流体と電子プラズマの等価性に関する検討

渦糸は真空中においては Coulomb 衝突が顕在化する時間帯まで内部構造を変化させることなく、等価性が良く成立していることが確認される。一方、背景渦中においては、渦糸の内部構造や渦度の Entropy, Enstrophy が変化することから二次元 Euler 流体との等価性が破れている可能性がある。しかし、全電子数、慣性モーメント、静電エネルギーなどが良く保存され、渦紐の運動や変形が Euler 方程式で記述出来ることから、等価性の破れは渦紐周辺の限られた領域内でしか発生していないと考えられる。

等価性が破れる理由としては、渦糸周りの高速回転に周囲の渦度分布が局所的に巻き込まれて引き伸ばされ、電子密度の空間分布の変化が Larmor 半径程度まで細くなるため、局所電場によって円軌道からのズレが大きくなり、 $E \times B$ ドリフト近似が成立しないことが主たる原因と考えられる。この限界に関しては、将来的に磁場強度の強化と計測系の空間分解能を増強することにより、より定量的な検討が可能となる。

謝辞

本研究を進めるにあたり懇切丁寧に御指導をして下さいました際本泰士教授に心より感謝致します。実験にあたり御指導、御助言を頂いた毛利明博名誉教授、湯山哲守先生、道下敏則先生に厚く感謝の意を表します。また、論文執筆に当たり、貴重な御助言、御協力を頂いた小方厚広島大学教授、岡本宏巳助教授に深く感謝致します。最後になりましたが、実験を共にし、データ解析から論文執筆に至るまで貴重な御助言をいただいた三瓶明希夫さんに心より感謝致します。