

氏名	いわさきまさし 岩崎雅史
学位(専攻分野)	博士(情報学)
学位記番号	情博第128号
学位授与の日付	平成16年7月23日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科・専攻	情報学研究科数理工学専攻
学位論文題目	Studies of Singular Value Decomposition in Terms of Integrable Systems (可積分系による特異値分解の研究)
論文調査委員	(主査) 教授 中村佳正 教授 野木達夫 教授 島崎眞昭

### 論文内容の要旨

本論文は、可積分系理論に基づいて、重要な行列演算である特異値分解を実行するための新たな数値計算アルゴリズムを定式化したものである。具体的には、数理生物学に現れるロトカ・ボルテラ系に着目し、その時間離散化を用いて特異値計算のdLVアルゴリズムを得ている。さらに、実用化を念頭に、より高速、高精度なシフトつき特異値計算のsIアルゴリズムを与えている。また、定式化したアルゴリズムの安定性解析や誤差解析等の研究も行っている。

特異値分解アルゴリズムの多くは1965年のGolub-Kahanのアイデアに基づいている。Golub-Kahanアルゴリズムでは、前処理としてハウスホルダー変換による上2重対角化を行い、次に、固有値計算のQRアルゴリズムを適用する。近年のデータベース検索や画像処理問題の大規模化に伴い、より高速で高精度の特異値分解アルゴリズムが必要とされるようになってきた。本研究の出発点となったのは、1986年のChuによる連続時間ロトカ・ボルテラ系の解が時間無限大で上2重対角行列の特異値に収束することを示した研究である。Chuは具体的なアルゴリズムの定式化には至っていない。

本論文では、2章において、可積分系理論に現れる離散ロトカ・ボルテラ系に着目し、新たな特異値計算アルゴリズムであるdLVアルゴリズムを定式化している。すなわち、解のHankel行列式表示を用いて時間無限大における解の漸近解析を行い、任意の差分間隔サイズについて、解がある定数に収束することを証明している。さらに、離散ロトカ・ボルテラ系のLax形式に基づいて、この定数の正の平方根が与えられた上2重対角行列の特異値に一致することを示している。また、離散ロトカ・ボルテラ系の変数の正值性、特異値を大小順に並べるソート機能、差分間隔を大きくすることによる加速効果について考察し、数値実験によりその事実を確認している。

3章では、差分間隔パラメータをステップごとに可変とするため、不等間隔離散ロトカ・ボルテラ系の解析を行っている。また、差分間隔を可変とすることでどのような数値計算上のメリットが生じるかを具体例について考察している。

計算機における演算は有限桁で実行され様々な誤差が生じるが、dLVアルゴリズムで重視すべきは丸め誤差である。4章では、適切な摂動モデルを与えることにより、1ステップの演算で発生する誤差の最大値を理論的に調べている。その値は、Golub-Kahanアルゴリズムで用いられているQRアルゴリズムと比較して小さく、高精度特異値計算アルゴリズムとされるdqdアルゴリズムと比べても同程度である。数値実験では、dLVアルゴリズムが最も高精度であることをみている。さらに、dLVアルゴリズムの前進、後退の数値安定性についても証明し、dLVアルゴリズムによる特異ベクトル計算、精度保証についても論じている。

最後に、5章において、原点シフトを導入したsIアルゴリズムを定式化し、dLVアルゴリズムのさらなる高速化に成功している。まず、数値安定性を壊さないシフト量の設定方法について明確な条件を与え、sIアルゴリズムの収束性を証明している。さらに、sIアルゴリズムと標準的な数値計算ライブラリLAPACKで公開されているDBDSQRルーチン、DLASQルーチンとの比較数値実験を行っている。その結果、特異値のみの計算では、信頼性の高いDBDSQRより計算速度・精度の両面で優れていることが示されている。また、高速高精度特異値計算ルーチンであるDLASQと比べると、

計算速度ではやや劣るものの精度では優位性をもつことが確認されている。

### 論文審査の結果の要旨

本論文では、応用範囲の広い行列演算である特異値分解について、可積分系に基づいた新しい数値計算アルゴリズムが定式化され、その誤差解析、安定性解析が行われるとともに、原点シフトによる高速化が考察されている。

現在の特異値分解では、QR アルゴリズム、pqr アルゴリズム等の固有値計算アルゴリズムをそのまま転用していることが多く、特異値が正という性質を積極的に利用したアルゴリズムは見あたらない。これらのアルゴリズムは戸田方程式と呼ばれる可積分系と関わりが深い。これに対して申請者は、解が常に正の値をとる性質をもつロトカ・ボルテラ系に注目して新しい特異値分解アルゴリズムを定式化している。ロトカ・ボルテラ系の Lax 形式を利用して各ステップで上 2 重対角行列の特異値が不変となることを示し、行列式解の 2 種類の漸近展開を用いて解の特異値への収束性を証明している。

申請者はまた、新アルゴリズムの丸め誤差を論じ、その最大見積もり量は、既存のアルゴリズムと同程度以下であることを明らかにしている。さらに、原点シフトを導入することで一層の高速化、高精度化を行い、数値安定となるシフト量の設定法を与え、シフトつき新アルゴリズムの収束性を示している。

現在の標準数値計算ライブラリ LAPACK の中で最も信頼性のある DBDSQR との比較数値実験では、計算速度および精度の両面でシフトつき新アルゴリズムの優位性が確認されている。また、高速特異値計算ルーチン DLASQ と比べても、計算速度ではやや劣るものの精度の面では優位性を示している。申請者の提案アルゴリズムでは数値安定性および収束性に関する証明が与えられており、DLASQ より信頼性が高いといえる。

このように、本論文は理論的な新規性はもちろん実用上も価値ある内容を含んでおり、高く評価されるものである。なお、現在、以上の申請内容と科学技術振興機構の援助を得て申請者等が行っている高速特異ベクトル計算ルーチンとを組み合わせた形で特許出願中であり、本研究は、今後データベース検索エンジンや画像処理ソフトなどへ幅広く応用可能な優れた研究といえる。

よって、本論文は博士（情報学）の学位論文として価値あるものと認める。

また、平成16年6月21日に実施した論文内容とそれに関連した試問の結果合格と認めた。