アーチの極限解析

横尾義貫・山肩邦男

LIMIT ANALYSIS OF ARCHES

by Dr.Eng. Yoshitsura YOKOO and Kunio YAMAGATA

Synopsis: This paper treats some discussions on the collapse modes and the final bearing capacities of arches and also shows a practical method of the limit analysis of arches. It is shown that the collapse mode of an arch takes several type from one to another with the varing rise, and also explained that the mode and the final capacity of a flat arch transfer continuously to those of a straight beam when the rise of the arch is flattened to zero. The effects of the excentricity of loading. the ratio of section depth to span and the end conditions are discussed.

序

本研究は，アーチが終局荷重のもとに collapse を起す極限状態における応力の釣合， collapse mode の性状，ならびに limit analysis の実用的な解法について考察しようとするものである。従来，アーチの応力に関する塑性学的な研究はほとんど見られず，もつぱら弾性学的な解析にゆだねられていたようである。しかしながら弾性計算には，アーチの rise が低い場合一つの矛盾があつた。すなわち，rise が低くなるにつれて水平反力は急激に増大して無限大に近付き，rise が 0 の極限において直線梁の水平反力に連続しないということである。この様な現象自体すでに弾性学的な解析の限界をこえるものであつて，塑性学的な解析の必要があると思われる。

一方，完全塑性体の limit analysis に関する研究は，文献[1],[2] の発表以来，多方面に拡張されて来た。アーチに関しても，すでに Onat および Prager による研究[3] があり，曲げモーメントと軸方向力による矩形断面の降伏条件式（1）を近似化し，図－2 に示す折線（1）および（2）のごとき降伏条件式を用いて，通常の rise をもつた 2 鉸アーチについての実用計算法を示した。

本研究においては，rise の広範囲にわたる各種アーチの終局時の特性を検討する目的のため，降伏条件式（1）にもとづき厳密解を求めることとした。本研究の結果，アーチには rise と梁丈との相対的な関係によつて数種の collapse mode が生じうること，したがつて先にのべたアーチと直線梁との連続性の問題に関しても，両者が smooth につながりうることが証明された。また更にアーチの種類，荷重の条件などにともなう種々の傾向をも明らかにすることができた。しかしながら上述の厳密解を求めるには，かなりの労力を要する。したがつて実用上の便宜のため，最後に通常の rise をもつた場合におけるアーチの実用解法を示すこととした。

本報告においては紙面の都合上，アーチが集中荷重をうける場合[5],[6] について得られた結果を概説することとし，解法の過程は省略させて頂く。分布荷重をうける場合の厳密解およびその検討は，目下研究途上にあり後日発表の予定である。また実用計算法[7] については，集中荷重および等分布荷重をうける各場合について算例を示すこととした。

Ⅰ．アーチの limit analysis の基本概念

アーチの部材断面を矩形とし，完全塑性材料からなるものと仮定する。すなわち弾性的な変形は無視され

るものとする。曲げモーメント M と軸方向力 N をうける矩形断面の降伏状態としては 図－1 のような応力分布が考えられ，その釣合を考慮して部材断面の降伏条件式として次式が導かれる。

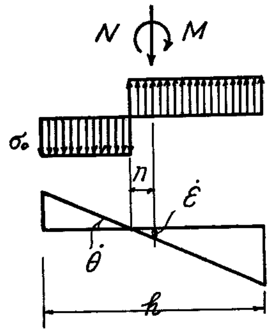

Fig. 1 The distribution of stress, rates of the axial strain and of the angle of flexure in the yield section

$$f(M,N)=\left|\frac{M}{M_0}\right|+\left(\frac{N}{N_0}\right)^2\leq 1 \quad \cdots\cdots(1)$$

ただし $N_0=bh\sigma_0$：軸方向力のみによる断面の降伏値，$M_0=hN_0/4$，：曲げモーメントのみによる断面の降伏値，b：断面の巾，h：断面の丈とする。上式の内，等号は断面の降伏を表わし，不等号は断面の未降伏を示している。ただしここに剪断力の影響は無視されうるものと仮定した。

（1）式はすでに文献[3] に導かれているものであり，図示すれば 図－2 のごとくである。また同図には，同文献[3] 中で Onat および Prager がアーチの limit analysis に採用した折線型の降伏条件式をも示した。いま中央軸より中立軸までの距離を n とし $n'=n/h$ とすれば，降伏断面の M および N は次式で表わされる。

$$N=2n'N_0 \quad \cdots\cdots(2)$$

$$M=(1/4-n'^2)hN_0 \quad \cdots\cdots(3)$$

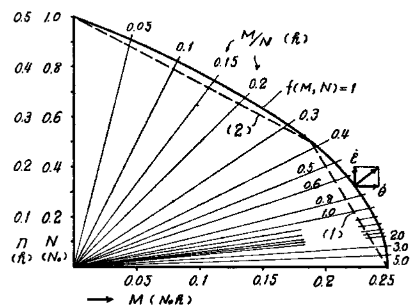

Fig. 2 The yield condition $f(M,N)=1$ of rectangular section under the critical combination of bending moment M and axial force N

また降伏断面における材軸の歪速度および回転角速度を $\dot{\varepsilon}$ および $\dot{\theta}$ により表わせば，R. Hill の最大仕事の定理[8),9)] "ある歪速度に対して真の応力のなす塑性仕事は最大である" より

$$\dot{\theta}dM+\dot{\varepsilon}dN=0 \quad \cdots\cdots(4)$$

一方，降伏断面は $f(M,N)=1$ にて表わされるから

$$\frac{\partial f}{\partial M}dM+\frac{\partial f}{\partial N}dN=0 \quad \cdots\cdots(5)$$

したがつて (4) 式および (5) 式から次式が導かれる。

$$n=\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\theta}}=\frac{\partial f/\partial N}{\partial f/\partial M}=\frac{hN}{2N_0} \quad \cdots\cdots(6)$$

すなわち 図－2 において M および N は $f(M,N)=1$ 上において降伏し，そのときの歪速度の比 n はその点における曲線への法線が M 軸との間になす角の tangent にあたることを意味する。

さて構造物にかかる荷重が proportional に増加し，ついに collapse をおこす場合の安全率に関しては次式の関係がある。

$$m_s \leq S \leq m_k \quad \cdots\cdots(7)$$

ただし m_s は任意の応力 $\bar{M}$, $\bar{N}$ が外力系 $m_s\sum P_i$ に対して釣合条件を満足し，かつ降伏条件式（1）を満足するような任意の係数であり，statically admissible multiplier と名付けられる。また m_k は一自由度をもつ collapse の変形条件式を満足し，かつ $\sum P_i\dot{\delta}_i^*\geq 0$ および $f(\bar{M},\bar{N})=1$ を満足するような任意の変位速度 $\dot{\delta}^*$, $\dot{\theta}_i^*$, $\dot{\varepsilon}_i^*$ および $\bar{M}_i$, $\bar{N}_i$ から次式によつて算定される任意の係数であり，kinematically admissible multiplier と名付けられる。ただしここにアーチの変形は yield hinge における歪のみによつて生じ，アーチ部材の未降伏部分については，仮定により剛体としてあつかつていることをお断りする。

$$m_k=\frac{\sum(\bar{M}_i\dot{\theta}_i^*+\bar{N}_i\dot{\varepsilon}_i^*)}{\sum P_m\dot{\delta}_m^*}\cdots\cdots(8)$$

したがつて（7）式は m_s の最大値と m_k の最小値が真の安全率 S に一致することを示し，いいかえれば真の崩壊荷重は statically admissible な条件と kinematically admissible な条件を共に満足させなければならないことを示している。なお（8）式において分子の示す yield hinge の塑性仕事は（1）式および（6）式より次のごとく簡単化されうる。

$$W_i=(hN_0/2-\bar{M}_i)\dot{\theta}_i^*\cdots\cdots(9)$$

以上の原理はすでに研究されているところであり，詳しくは文献[10)~15)]を参照されたい。

Ⅱ．集中荷重をうけるアーチの極限状態における性状

以下Ⅰ．の諸関係式に基いて，アーチが集中荷重をうけた場合について解析を行い厳密解SPを求めたが，ここには解析の過程を省略し，結果の大要を示すこととする。

1.　中央集中荷重をうけるアーチの collapse mode

A）両端固定アーチの collapse mode　span $2L$ を一定とし開角 2ψ を変化させる場合，梁丈 h と ψ，したがつて h と rise の相対的な関係によつて図－3のごとき3つの collapse mode が考えられる。mode Ⅰは梁丈 h に比して ψ が大きな場合におこり，一自由度の collapse を起すには両端A，中央bおよびA～bの中間点aの5つの yield hinge が必要である。また mode Ⅱは ψ が小で直線梁に近い領域のアーチに生じ，直線梁とのつながりの関係上Aおよびbの3点における yield hinge の発生が考えられる。mode Ⅲ はmode Ⅰおよび Ⅱ の中間の ψ において生じ，Ⅲにおける固定端の yield hinge が，bの方へ移動した状態での local collapse をおこす mode である。

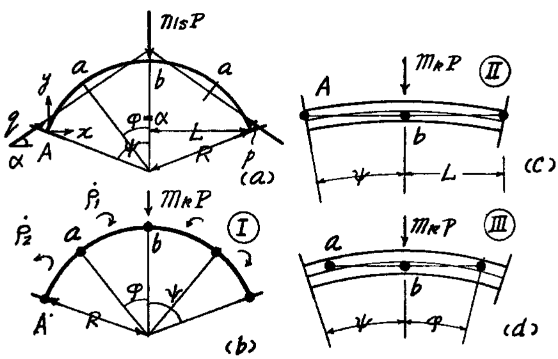

Fig. 3　3 types of collapse mode of built-in arch carrying a concentrated load at the centre of span

計算結果の一例を示すと 図－4 のごとくである。同図より明らかなように ψ の減少にともなつて，mode はⅠ→Ⅲ→Ⅱへと移行してゆく。mode Ⅰから Ⅲ への移行点 $\psi_1=25°23.7'$ においては，yield hinge b および a がアーチ断面内において一直線上に並び，ψ_1 以下の ψ では mode Ⅰはもはや一自由度ではなくなり，collapse mode として成立しえないことが明らかである。mode Ⅲ の領域では hinge A がなくなり，hinge b および a が一直線上に並びつつ，hinge a が $\psi/2$ の位置より固定端へ向つて移行してゆく。$\psi_2=6°35.2'$ においては，移行 hinge a は全くA端に到達し同時に hinge A，bが一直線上に並んだ状態で mode Ⅱに移る。mode Ⅱにおいては，ψ が小となるにつれて n_A および n_b は減少してゆき，$\psi=0$ において $n_A=n_b=0$ に達する。また反力 q については，mode Ⅰ，Ⅲにおいては ψ の減少と共に p は y 軸の正側から負側へ，角 α は急から緩へと移るが，ψ_2 を境として α は再び増加してゆき $\psi=0$ において $\alpha=90°$ となる。すなわち水平反力に関してアーチと直線梁との連続性が証明されたわけである。

B）2鉸アーチの collapse mode　アーチの limit analysis を行う場合，アーチ自体の耐力以外に支持点における支持耐力について考慮すべきことはいうまでもない。特に水平支持耐力は垂直支持耐力に比して一般に小さく，この水平支持力が降伏し，支点が水平移動をおこす場合には，アーチの SP および collapse mode に大きな影響を与えるであろうことは容易に推測できる。したがつてこの影響をもあわせて考

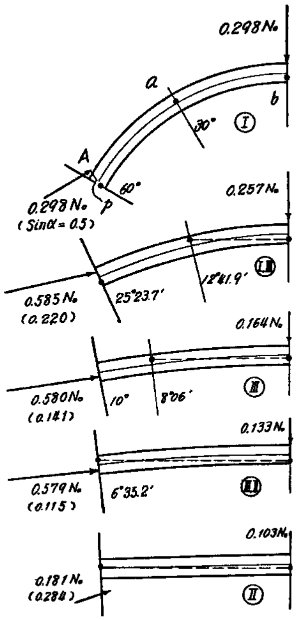

Fig. 4 The process of transference of collapse mode from I to II in built-in arch carrying a concentrated load at the centre of span ($h/L=0.1$)

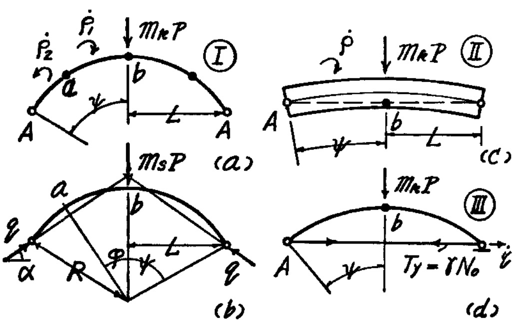

Fig. 5 3 types of collapse mode of 2 hinged arch carrying a concentrated load at the centre of span

察するため，2鉸アーチの collapse mode として図-5 (d)に示すように，2鉸アーチを tie-bar をもつた静定アーチにおきかえ，中央b点および tie-bar が降伏する型の mode Ⅲ をも考えることとする。水平支持力の変形の特性を完全塑性的であると仮定し，その降伏を tie-bar の降伏と同等にみなしたのである。なおmode Ⅰ および Ⅱ は水平反力が未降伏の場合のアーチ自体の collapse を示す。

図-6 は一例として $h/L=0.1$ の場合のmode Ⅰ および Ⅱ におけるyield hinge の位置および反力の変化の過程を示している。mode Ⅰ においては，yield hinge b が a 同志を結ぶ直線よりも上にあるか下にあるかによつて，$\dot{p}_2$ は $\dot{p}_1$ と逆方向あるいは同方向の回転速度をもつことがわかる。両端固定アーチの場合とは異なり，hinge a および b が一直線上にあるなしにかかわらず一自由度の変形のみしか示さず，したがつてA）にのべた mode Ⅲ のような local collapse は存在しない。しかし $\psi=4°55'$ においては，yield hinge b は両端の hinge A と一直線上に並び，それ以下の ψ では中間点 a における yield hinge の発生は必要でなく mode Ⅱ に移行してゆく。一方反力については，ψ の減少と共に α は漸減するが，$\psi=4°55'$ を境として再び増加し，$\psi=0$ における $\alpha=90°$ に近づく傾向がうかがわれる。mode Ⅲ に関しては，$T_y=\gamma N_0$ における γ の各値に対して異なり，ψ の減少と共に mode Ⅰ の途中から mode Ⅲ にうつり，mode Ⅲ はやはり直線梁に連続する様子が後に示す図-10からうかがわれよう。

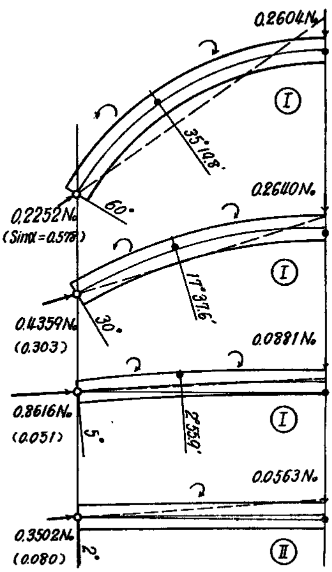

Fig. 6 The process of transference of collapse mode from I to II in 2 hinged arch carrying a concentrated load at the centre of span

3鉸アーチの場合は図-7に示す mode だけであり，特に記すべきものはない。

以上からアーチには ψ と h/L との関係によつて数種類の mode が存在し，それらが互に移行しつつ $\psi=0$ において直線梁につながり，弾性計算におけるごとき水平反力の間の矛盾が生じないことがわか

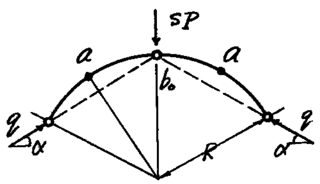

Fig. 7 The collapse mode of 3 hinged arch

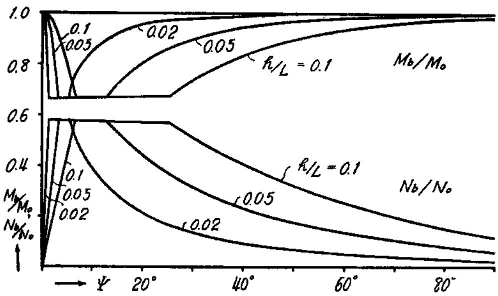

Fig. 9 M_b/M_0, N_b/N_0 versus ψ diagrams in built-in arch carrying a concentrated load at the centre of span

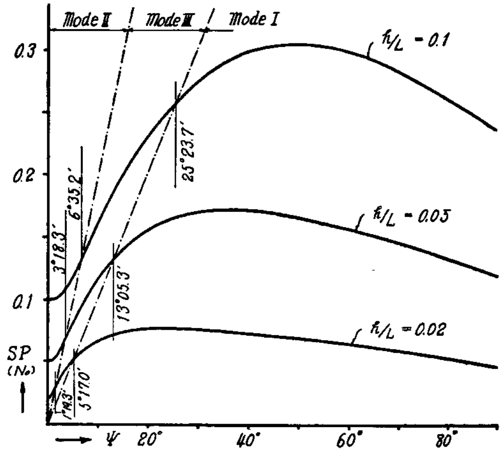

Fig. 8 The final intensity of load, SP versus ψ diagrams in built-in arch carrying a concentrated load at the centre of span

つた。

2. 中央集中荷重をうけるアーチの終局耐力

次に崩壊時におけるアーチの終局荷重 SP について概説する。

まず両端固定アーチについて $h/L=0.1$, 0.05 および 0.02 とした場合の SP は 図-8 のごとくである。ψ の減少と共に SP は一たび最大値を示した後，減少しはじめ，mode Ⅰ，Ⅲ，Ⅱ の移行点では smooth につながりながら $\psi=0$ において直線固定梁の SP に一致する。h/L が減ずるにつれて SP の最大点は ψ が小なる方へ移動し，また SP の最大値は $h/L=0.1, 0.05, 0.02$ に対して大略 1：0.58：0.25 の比を示し，SP の低下は h/L の減少の比率よりも高く表われていることがわかる。これは h/L の小なるほど，M に比して N によるアーチ作用が増大するためと考えられる。各 h/L に対する mode 間の移行点はそれぞれ一直線上に並び，h/L の減少と共に原点に向う。したがつて h/L の小なるほど mode Ⅰ が支配的となる傾向がみられる。この傾向は2鉸アーチの場合についても容易に推測できるところである。

図-9 は図-8 に対応した yield hinge b における M_b/M_0, N_b/N_0 と ψ の関係を示す。すなわち M_b/M_0 および N_b/N_0 は mode の移行点において不連続的に折れ曲り，$\psi=0$ において $M_b/M_0=1$, $N_b/N_0=0$ となる。h/L の変化に対しては $\psi=0$ の近傍を除き h/L の小なるほど，M_b/M_0 は増大，N_b/N_0 は減少する傾向がみられる。mode Ⅲ においては h/L の如何にかかわらず M_b/M_0, N_b/N_0 はほぼ一定値をとり，したがつて水平反力の最大値は，部材断面積に対して一定の比率以上には増加しないということを表わしている。

次に2鉸アーチが中央集中荷重をうける場合の一例として，$h/L=0.1$ として算定した結果を図

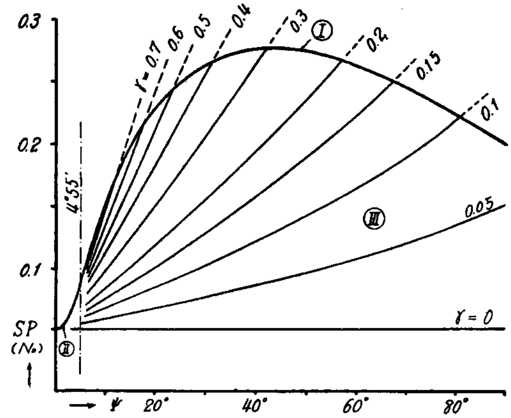

Fig. 10 The final intensity of load, SP versus ψ diagrams in 2 hinged arch carrying a concentrated load at the centre of span ($h/L=0.1$)

-10に示す。水平支持力が降伏しないという条件の下では，SPはψが約40°において最大値を示し，ψの減少と共に減じ，modeはⅠからⅢへと移行する。$\psi=0$においてはSP$=0.05\,N_0$となり，単純支持の直線梁の場合と一致する。modeの移行点$\psi=4°55'$においてはSPはsmoothに連続する。modeⅢについてはγの各値に対して同図に示すように，いずれもψの減少と共にSPが$0.05\,N_0$に近付く傾向がみられる。また図-12の一部に図-10に対応して，中央yield hinge bにおけるM_b/M_0，N_b/N_0を示すが，これらは$\psi=4°55'$において不連続に折れ曲り，$\psi=0$において$M_b=M_0$, $N_b=0$につながつている。

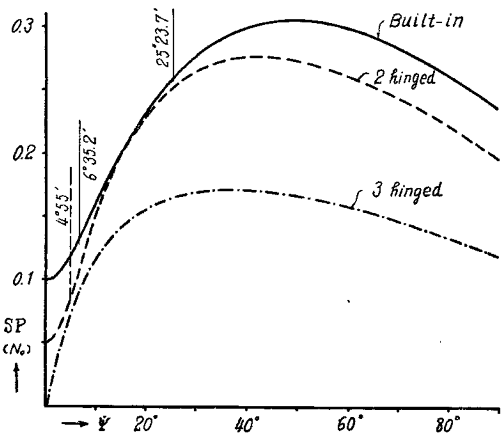

Fig. 11 The comparison among the final intensity of load, SP versus ψ diagrams in built-in, 2 hinged and 3 hinged arches carrying a concentrated load at the centre of span ($h/L=0.1$)

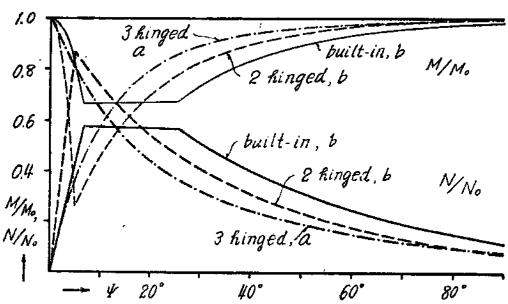

Fig. 12 The comparison among M/M_0, N/N_0 versus ψ diagrams in built-in, 2 hinged and 3 hinged arches carrying a concentrated load at the centre of span ($h/L=0.1$)

図-11には両端固定，2鉸および3鉸アーチのSP～ψ曲線の比較を示した。3鉸アーチの場合は既述せる図-7のmode 1種のみであり，SPは$\psi=0$において0に連なる。3種のアーチの最大点は両端固定，2鉸，3鉸アーチの順にψの小なる方へずれる傾向があり，最大値の比率は大略1：0.91：0.57である。2鉸アーチのSP曲線が固定アーチのそれに接する箇所は，2鉸アーチのmodeⅠにおいてyield hinge aおよびbが一直線上に並び，a～A部材の$\dot{\rho}_2$が0なる場合であり，固定アーチのmodeⅢと同等であることを示している。図-12はおなじく3種のアーチのM/M_0, N/N_0についての比較を示すが，ψの小さい範囲を除いてM/M_0は3鉸，2鉸，固定アーチの順に低下する。両端および中央点の固定条件の相違から考えて当然であろう。

以上より，中央集中荷重の場合には，アーチをその種類の如何にかぎらず，ψの値に応じて次の3段階に大別できると思われる。

$$\left.\begin{array}{ll}\text{i. high arch} : & \psi=30°\sim90° \\ \text{ii. flat arch} : & \psi=10°\sim30° \\ \text{iii. cambered beam} : & \psi=0°\sim10°\end{array}\right\}\cdots(10)$$

この3段階がもつ大体の特徴は図-8，図-9および図-11，図-12から次のごとくいえよう。すなわち，high archは通常のh/Lでは，そのψの領域内にSPの最大値をもち，M/M_0が他の2段階に比して大である。flat archにおいては2鉸アーチのSPは固定アーチのSPと比較して大差はなく，また3鉸アーチをも含めてN/N_0が大きい。cambered beamの領域については，3鉸アーチを除いてN/N_0が急激に減少する。また現実の弾塑性的材料からなるアーチにあつては，直線梁との連続性の問題に弾性変形を考慮することが必要であり，とくに3鉸アーチにあつてはほとんど使用できない領域である。

3. 偏心集中荷重をうけるアーチのcollapse mode

両端固定アーチが偏心集中荷重をうける場合の一例として，$\psi=60°$, $h/L=0.1$の場合の結果を図-13に示す。同図にみられるようにyield hingeは4つであつて非対称な崩壊変形を示す。偏心量Δの増大につ

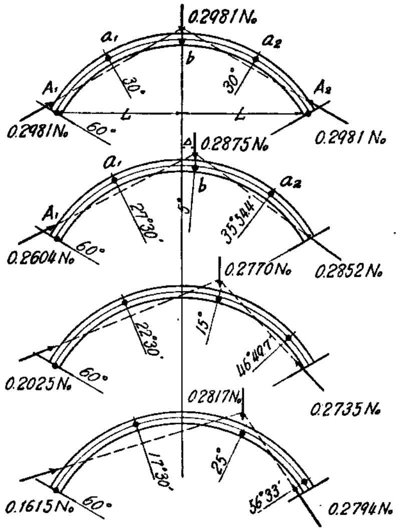

Fig. 13 The collapse of built-in arch carrying a concentrated load at the distance $\varDelta$ from the centre of span ($\psi=60°$, $h/L=0.1$)

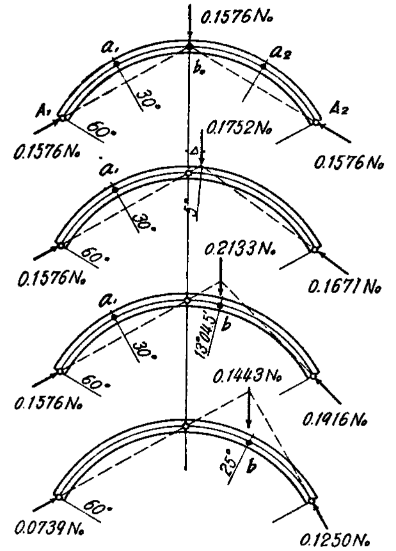

Fig. 14 The collapse of 3 hinged arch carrying a concentrated load at the distance $\varDelta$ from the centre of span ($\psi=60°$, $h/L=0.1$)

れて a_2 hinge は A_2 に向つて移動してゆく。$\varDelta$ が 0 からごく微小量生じても A_2 hinge は消え非対称な変形に移ることに注目されたい。通常真に対称な荷重状態というものはありえず，中央集中荷重による実験においても非対称な変形を生じやすいことが推察されよう。

3鉸アーチの collapse mode の一例として $h/L=0.1$ の場合を図-14 に示した。同図より明らかなように，$\varDelta$ がわずか生じても yield hinge は a_1 のみに発生し変形は非対称的となる。$\varphi_0=13°04.5'$ においては a_1 および b 点に同時に yield hinge を発生し，更に $\varDelta$ の増加にともなつて yield hinge は b 点のみとなる。すなわち yield hinge は a_1 から b に飛び移つたような現象を呈する。

4. 偏心集中荷重をうけるアーチの終局耐力

両端固定アーチの場合，SP は図-13 にみられるように $\varDelta$ の増大と共に中央集中荷重の場合よりも若干低下するが，$\varDelta$ がある程度以上大きくなると再び増加してゆく。h/L の変化に対しては，$\varDelta=\varDelta$ の場合の SP が $\varDelta=0$，すなわち中央集中荷重の場合の SP に対する比 $(SP)_{\varDelta=\varDelta}/(SP)_{\varDelta=0}$ は h/L の減少と共に多少低下するが，そう大した影響はみられないことが他の計算例から判明している。

図-15 は両端固定，2鉸および3鉸アーチの $(SP)_{\varDelta=\varDelta}/(SP)_{\varDelta=0}\sim\varDelta$ 曲線の比較をしめす。3鉸アーチの場合の曲線は図-14 にもみられたごとく，$\varDelta$ の増大と共に $(SP)_{\varDelta=\varDelta}/(SP)_{\varDelta=0}$ は始めは急激に増加し，$\varphi_0=13°04.5'$ を境として減少にうつるという傾向を示し，両端固定および2鉸アーチの場合と比較して対照的である。3種のアーチの SP 同志間の比較は別として，この傾向は小さな偏心に対して3鉸アーチが優れた安定性をもつていることを示すものといえよう。

以上の考察は $\psi=60°$ の場合にかぎつたが，ψ の変化に対しては多少変つてくることはもちろんである。しかしながら2鉸アーチの場合の検討では，ψ が減少して $\psi=4°55'$ 以下になつてはじめて $(SP)_{\varDelta=\varDelta}/(SP)_{\varDelta=0}\sim\varDelta$ 曲線が $\varDelta$ の増加と共に当初から漸増してゆく程度であり，high arch および flat arch の ψ の領域では，先にのべた3種のアーチ間の傾向を示すものとみてよいであろう。

Ⅲ. アーチの終局荷重の実用計算法

以上Ⅱ．でのべた諸結果は（1）式の降伏条件式に基いて解析を行い，$m_s=S=m_k$なる厳密解を求めて得たものである。その解析の過程は省略したが，計算はかなり面倒である。また等分布荷重の場合については（1）式により同様な厳密解を求めることは困難である。したがつてここに多少の精度を落し，実用上の便宜のため終局荷重に関する実用計算法を示すことにする。

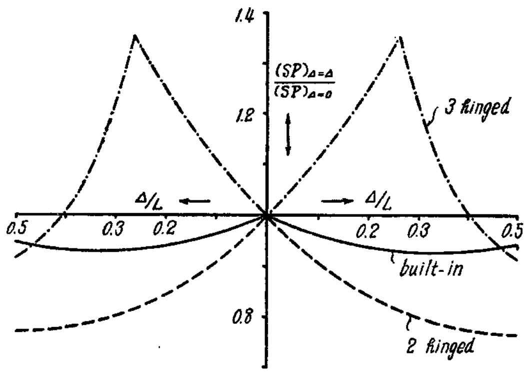

Fig. 15 The comparison among $(SP)_{\Delta=\Delta}/(SP)_{\Delta=0}$ versus Δ/L diagrams in built-in, 2 hinged and 3 hinged arches ($\psi=60°$, $h/L=0.1$)

A） 実用計算法の基本的方針

アーチに発生する yield hinge の位置を求めるには，応力が不静定反力と釣合を保ち，かつ降伏条件式（1）を満足させねばならないため，その決定は一般にかなり面倒である。一方通常の rise をもつアーチの yield hinge においては，N/N_0に比してM/M_0による影響が甚だ大であるという傾向が示された（図-9 および 図-11 参照）。したがつて実用計算法としてはこの傾向に着目し，yield hinge の位置および不静定反力の推定にはNを無視するという方針をとつた。以下その方針の大要についてのべる。ただし通常用いられる程度の高い rise をもつたアーチ（high arch の程度）に限るものとする。

i. yield hinge の位置および支点反力を定める場合，Nを無視し collapse をおこすに必要な数点において，Mが最大かつ相等しくなるように反力の方向および yield hinge の位置を選ぶ。その方法は算例を参照されたい。

ii. i. に定めた反力によつて上記の数点における M, NおよびM/Nを求める。ここにM/Nは常数として表わされる。かくして反力を0から次第に増加させてゆくと，$M/N=$一定の条件の下にまずいずれかの箇所にはじめて yield hinge を生ずる状態に達する。このときの反力の値からm_sを求める。この算定には図-2 を利用する。

iii. m_kを求める式（8）において，$\bar{M}_i$, $\bar{N}_i$はn_iに関して（2）式および（3）式を満し，$f(\bar{M}_i, \bar{N}_i)=1$ を満足する限り自由に選びうるが，ここでは ii. における数点が，それぞれのM/Nの比のもとに降伏したと考えたときの$\bar{M}$, $\bar{N}$およびnを用いる。$\dot{\theta}_i^*$, $\dot{\varepsilon}_i^*$および$\dot{\delta}_m^*$は変形条件を満すように定めねばならないが，直角速度図法を利用するのが便利である。m_k式において分子の第2項の$\bar{N}_i\dot{\varepsilon}_i^*$は第1項に比して一般に小であり，無視してもよい程度である。

iv. ii. および iii. より求まつたm_sおよびm_kより平均値を求めSの近似値とする。

以上の操作を1回行えば，後述する算例にみられるごとく，実用上差支えない程度の上下限の範囲内で，崩壊荷重を求めることができる。しかしながら，更に上下限の範囲を縮少するためには，yield hinge の位置および反力の方向を選定し直さねばならず，かなり面倒となつてくることを附記する。以下に計算例を示す。

B） 偏心集中荷重をうける2鉸アーチ

一例として$\psi=60°$, $h/L=0.1$, $\Delta/L=0.3$ の場合を示す。まずhの長さを単位としてアーチを大きく描く。図-16 において b を中心とする小円，アーチの中心 O を中心とする円弧およびA_1を通る直線A_1dの三者が互に接するように描く。（実際の作図では大して手間はかからない。）このときA_1dを反力q_1の方向とすれば，a および b 点におけるMは相等しくかつ最大で，この位置に yield hinge ができるものとする。a

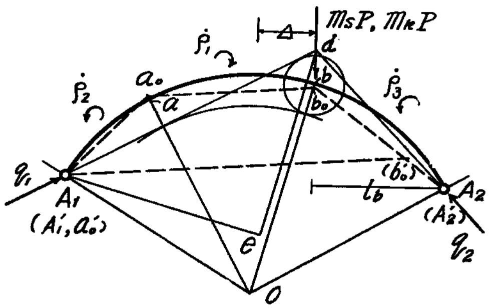

Fig. 16

および b 点の応力は a および b から A_1d に到る距離を測り，次のごとくなる。

$$\text{a 点}: M=1.65q_1h,\ N=q_1 \quad \therefore\ M/N=1.65h \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{b 点}: M=1.65q_1h,\ N=\overline{A_1e}q_1/\overline{A_1d}\\ \quad =0.718q_1 \ \therefore\ M/N=2.30h\end{array}\right\}(12)$$

q_1 を 0 から漸増し，したがつて a，b 各点がそれぞれ M/N の一定の比で増加するとき，a および b が降伏をおこす M, N および n の値は，図-2 において M/N 直線と降伏曲線との交点から

$$\text{a 点}: M_a=0.245N_0h,\quad N_a=0.148N_0,\quad n_a=0.074h \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

$$\text{b 点}: M_b=0.248N_0h,\quad N_b=0.108N_0,\quad n_b=0.054h \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

したがつて

$$\text{a 点の降伏時}\quad q_1=N_a=0.148N_0. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

$$\text{b 点の降伏時}\quad q_1=0.108N_0/0.718=0.151N_0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

ゆえにまず a 点に yield hinge が発生する。したがつて（15）式の値をとれば a 点以外の領域は未降伏であり，この釣合は statically admissible であることがわかる。ついで q_2 および m_sP は q_1 との力の三角形の長さの比より求めると

$$q_2=0.186N_0,\quad m_sP=0.207N_0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

m_k を求めるにあたつては直角変位図法を用いる。a および b 点の M, N および n 値は（13）式および（14）式を採用する。a，b 点において n_a, n_b を方向を考えて求め a_0, b_0 とする。（ただし 図-16には多少 n を大きく表わした。）yield hinge 間の各部材の回転角速度は

$$\left.\begin{array}{l}\dot{\rho}_1=(1-\overline{a_0'b_0'}/\overline{a_0b_0})\dot{\rho}_2=-1.01\dot{\rho}_2\\ \dot{\rho}_3=(1-\overline{b_0'A_2'}/\overline{b_0A_2})\dot{\rho}_2=0.64\dot{\rho}_2\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

$$\dot{\delta}=l_b\dot{\rho}_3=4.48h\dot{\rho}_2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

したがつて yield hinge a および b の回転角速度は

$$\dot{\theta}_a=2.01\dot{\rho}_2,\quad \dot{\theta}_b=1.64\dot{\rho}_2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

ゆえに（13），（14），（19）および（20）式を用いて，（8）式または

$$m_kP=\sum(0.5N_0h-M_i)\dot{\theta}_i/\dot{\delta}_i \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

を計算すると次の値を得る。

$$m_kP=0.209N_0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

$$\therefore\quad 0.207N_0<\mathrm{SP}<0.209N_0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

また m_k を求める場合 a_0, b_0 の代りに a, b の材軸に yield hinge があるとして $\dot{\rho}_i$ を求め，m_k 式（8）において $\sum\bar{N}_i\dot{\varepsilon}_i{}^*$ を $\sum\bar{M}_i\dot{\theta}_i{}^*$ に比して省略すると，SP の上下限は次式のようになる。

$$0.207N_0<\mathrm{SP}<0.211N_0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

（24）式において $\mathrm{SP}=0.209N_0$ とすれば error は±1％以内であり，近似度は非常によい。

C）偏心集中荷重をうける固定アーチ

一例として$\psi=60°$, $h/L=0.1$, $\Delta/L=0.1$の場合を示す。図-17において，A_1bに平行かつアーチに接する接線を描き，A_1bおよび接線の間隔を二等分するように平行線fdを求める。これはq_1の方向を示す。bを中心とする小円，Oを中心とする円弧およびdを通る直線が互に相接するごとく作図するとq_2の方向を得る。q_1, q_2およびm_sPの間には釣合の三角形Δfdgの関係がある。A_1, a_1, bおよびa_2の各点のMおよびNは

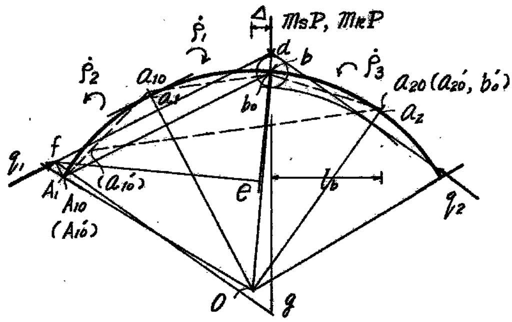

Fig. 17

a_1点　$M=0.890q_1h$, $N=q_1$

$$\therefore\ M/N=0.890h \quad\cdots\cdots(25)$$

A_1, b点　$M=0.890q_1h$, $N=0.844q_1$

$$\therefore\ M/N=1.055h \quad\cdots\cdots(26)$$

a_2点　$M=0.810q_2h$, $N=q_2$　$\therefore\ M/N=0.810h$ $\cdots\cdots(27)$

ゆえに図-2のM/Nと降伏曲線との交点より

a_1点　$M_{a1}=0.233N_0h$, $N_{a1}=0.262N_0$, $n_{a1}=0.131h$ $\cdots\cdots(28)$

A_1, b点　$M_{A1}=M_b=0.237N_0h$, $N_{A1}=N_b=0.225N_0$, $n_{A1}=n_b=0.113h$ $\cdots\cdots(29)$

a_2点　$M_{a2}=0.230N_0h$, $N_{a2}=0.284N_0$, $n_{a2}=0.142h$ $\cdots\cdots(30)$

各点が降伏するに要する反力で最小のものは

$$q_2=N_{a2}=0.284N_0 \quad\cdots\cdots(31)$$

$$\therefore\ q_1=0.284N_0\times\overline{\mathrm{fd}}/\overline{\mathrm{fg}}=0.261N_0 \quad\cdots\cdots(32)$$

$$m_sP=0.284N_0\times\overline{\mathrm{dg}}/\overline{\mathrm{fg}}=0.286N_0 \quad\cdots\cdots(33)$$

各部材の回転角速度については

$$\left.\begin{aligned}\dot{\rho}_1&=(1-\overline{\mathrm{a}'_{10}\mathrm{b}'_0}/\overline{\mathrm{a}_{10}\mathrm{b}_0})\dot{\rho}_3=-1.406\dot{\rho}_3\\ \dot{\rho}_2&=(1-\overline{\mathrm{a}'_{10}\mathrm{A}'_{10}}/\overline{\mathrm{a}_{10}\mathrm{A}_{10}})\dot{\rho}_3=0.698\dot{\rho}_3\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(34)$$

$$\dot{\delta}=l_b\dot{\rho}_3=5.75h\dot{\rho}_3 \quad\cdots\cdots(35)$$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned}&\dot{\theta}_{A1}=1.406\dot{\rho}_3,\ \dot{\theta}_{a1}=2.104\dot{\rho}_3\\ &\dot{\theta}_b=2.406\dot{\rho}_3,\ \dot{\theta}_{a2}=\dot{\rho}_3\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(36)$$

(8)式または(21)式を用いて計算すると，

$$m_kP=0.288N_0 \quad\cdots\cdots(37)$$

$$\therefore\quad 0.286N_0<\mathrm{SP}<0.288N_0 \quad\cdots\cdots(38)$$

またB)におけると同様に$\sum\overline{N}_t\varepsilon_t{}^*$を省略した場合，

$$0.286N_0<\mathrm{SP}<0.293N_0 \quad\cdots\cdots(39)$$

なおⅡ．で求めた厳密解によれば$\mathrm{SP}=0.2875N_0$である。

D) 等分布荷重をうける2鉸アーチ

$\psi=60°$, $h/L=0.1$の場合について算例を示す。垂直反力をm_swL, 水平反力をH, 鉸およびアーチ中央点

をそれぞれAおよびbとする（図-18参照）。いま $wL/H=k$ とすればA〜b間のモーメント式

$$M=-m_sHR\{(\cos\varphi-\cos\psi)-k(\sin^2\psi-\sin^2\varphi)/2\sin\psi\} \quad\cdots\cdots(40)$$

において M が最大なる点を求めると，$dM/d\varphi=0$ より

$$k=\sin\psi/\sin\varphi \quad\cdots\cdots(41)$$

の関係を得る。次に $M_b=|M_a|$ の条件より

$$k=2\sin\psi\ (1+\cos\varphi-2\cos\psi)/(2\sin^2\psi-\sin^2\varphi) \quad\cdots\cdots(42)$$

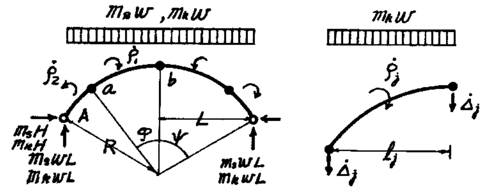

Fig. 18

したがつて（41）および（42）式を等しいとおくと，

$$\cos\varphi=-(1-2\cos\psi)\pm\sqrt{2}\,(1-\cos\psi) \quad\cdots\cdots(43)$$

（41）および（43）式において $\sin 60^\circ=0.8660$ として

$$\cos\varphi=0.7071,\ k=1.2247 \quad\cdots\cdots(44)$$

を得る。したがつてaおよびb点の $M,\ N$ は

a点　$M=0.3502hH,\ N=1.4142H,\ \therefore\ M/N=0.2476h$ ……(45)

b点　$M=0.3502hH,\ N=H,\ \therefore\ M/N=0.3502h$ ……(46)

図-2を利用し，aおよびb点が降伏するときの $M,\ N$ および n は

a点　$M_a=0.1532N_0h,\ N_a=0.621N_0,\ n_a=0.3105h$ ……(47)

b点　$M_b=0.1822N_0h,\ N_b=0.521N_0,\ n_b=0.2605h$ ……(48)

ゆえにまずa点が降伏し

$$m_sH=0.4391\,N_0 \quad\cdots\cdots(49)$$

$$\therefore\ m_swL=0.5378\,N_0 \quad\cdots\cdots(50)$$

m_k を求めるにあたつて，まず水平方向の変形条件として

$$\dot{\rho}_2=\frac{R(1-\cos\varphi)-n_b-n_a\cos\varphi}{R(\cos\varphi-\cos\psi)+n_a\cos\varphi}\dot{\rho}_1 \quad\cdots\cdots(51)$$

また yield hinge の仕事式（9）および外力仕事式 $m_kwl_j(\dot{\Delta}_j+l_j\dot{\rho}_j/2)$ —— ただし l_j は yield hinge 間の剛域の水平長さ，$\dot{\Delta}_j$ は j 剛域の一様な垂直変位速度（図-18参照）——を用いて次式が成立つ。

$$m_k=\frac{\sum(0.5hN_0-M_j)\dot{\theta}_i}{\sum wl_j(\dot{\Delta}_j+l_j\dot{\rho}_i/2)} \quad\cdots\cdots(52)$$

（51）および（52）式に（47），（48）および（44）式を代入して算定すると次式を得る。

$$\dot{\rho}_2=1.1114\,\dot{\rho}_1 \quad\cdots\cdots(53)$$

$$m_kwL=0.5646\,N_0 \quad\cdots\cdots(54)$$

$$\therefore\ 0.5378\,N_0<swL<0.5646\,N_0 \quad\cdots\cdots(55)$$

swL として上下限の平均値 $0.5512\,N_0$ を採用すれば，error は±2.43％以内におさまる。なお（51）式に

おける n および m_k 式の $\sum \bar{N}_i \dot{\varepsilon}_i^*$ を無視した場合には，

$$0.5378\,N_0<swL<0.5663\,N_0 \qquad (56)$$

となり，（55）式とほとんど変らない。

なお m_swL の計算において a 点が降伏する場合の反力の値を採用したが，軸方向力の影響のため a 点降伏時には，a 点より多少 A 寄りのところで（1）式を超過しているはずである。しかしながらこの超過量はごく微少であり，本例の場合 $f(M, N)_{\max}=1.005$ 程度にすぎない。したがつて通常無視して差支えないものと考えてよかろう。

E）　等分布荷重をうける固定アーチ

$\psi=60°$, $h/L=0.1$ の場合について簡単に記す。固定端反力を M_A とし，D）と同様にして A～b 間において M が最大なる点を求め，$M_A=M_b=|M_a|$ とおくと次式を得る。

$$\cos\varphi=(1+\cos\psi)/2 \qquad (57)$$

$$k=wL/H=\sin\psi/\cos\varphi \qquad (58)$$

および

$$\left.\begin{aligned} 2M_A/HL&=h_a'-kl_a'(1-l_a'/2) \\ h_a'=R(\cos\varphi-\cos\psi)/2,&\ l_a'=R(\sin\psi-\sin\varphi)/L \end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

(57)～(59)式によつて hinge a の位置および反力を求め，D）と同様にしてA，a および b点の M,N および M/N から，各点が降伏する時の M および N を求める。その結果，まず降伏するのは A 点であり，statically admissible な値として次の値を得る。

$$m_sH=0.4860\,N_0,\ m_swL=0.5612\,N_0 \qquad (60)$$

一方部材回転角間の関係

$$\dot{\rho}_2=\frac{R(1-\cos\varphi)-n_b-n_a\cos\varphi}{R(\cos\varphi-\cos\psi)+n_a\cos\varphi+n_A\cos\psi}\dot{\rho}_1 \qquad (61)$$

および m_k 式（52）を算定して $m_kwL=0.6259N_0$ を得る。

$$\therefore\ \ 0.5612\,N_0<swL<0.6259\,N_0 \qquad (62)$$

swL として上下限の平均値 $0.5936\,N_0$ をとれば，error は ±5.4％以内におさまる。D）と同様に軸力の影響を省略した場合には次のごとくなる。

$$0.5612\,N_0<swL<0.6262\,N_0 \qquad (63)$$

以上，アーチの終局荷重の実用計算法について述べた。終局荷重の誤差域はE）の場合最大で±5.4％を示したが，実用上は許容される程度であると思われる。limit design の長所として誤差の上下限が明示されるということは，現実の設計上の観点からも意義のあることと思う。

結　　論

本研究の結果として，集中荷重をうけるアーチの終局時における荷重，yield hinge, collapse mode および反力などに関して種々の傾向を示すことができた。とくに rise の変化との関連に注意し，従来の弾性計算におけるアーチと直線梁との間における水平反力との不連続という矛盾についても，その連続性を証明し得た。またⅡ．2.において示したアーチの特性の ψ による分類は当を得たものと考える。Ⅲ．においてはⅡ．の結果に基き実用上の便に資するため，終局荷重の実用計算法を示したが，大体許容しうる誤差域に収まつたと考える。他の limit analysis の研究によるごとき数回の計算で次第に誤差域をせばめてゆくとい

う方法が，アーチの場合非常に面倒であり，その点一回の操作で許容しうる誤差域を得るという方法をとらざるを得なかつた。なお等分布荷重をうける場合の終局状態については，目下研究を継続中であり，機会を改めて報告することにする。

終りに文献[3]からは大いに指唆される点のあつたことを附記して謝意を表する次第である。

参　考　文　献

1) H. J. Greenberg, W. Prager : Limit Design of Beams and Frames, Proc. A.S.C.E., Vol. 77, Feb. 1951.

2) Drucker, Greenberg, Prager : The Safety Factor of an Elastic-Plastic Body in Plane Strain, Jour. of App. Mech., Dec. 1951.

3) E. T. Onat, W. Prager : Limit Analysis of Arches, Jour. of Mech. and Physics of Solids, Vol. 1, No. 2, Jan. 1953.

4) A. Kooharian : Limit Analysis of Voussoir (Segmental) and Cement Arches, Jour. of A.C.I., Dec. 1952.

5) 横尾・山肩：Arch の Limit Analysis（第1報），日本建築学会論文報告集 57号 昭32. 7.

6) 横尾・山肩：Arch の Limit Analysis（第2報），日本建築学会近畿支部研究報告，昭32. 10.

7) 横尾・山肩：Arch の Limit Analysis（第3報），日本建築学会近畿支部研究報告，昭32. 10.

8) R. Hill : A Variational Principle of Maximum Plastic Work in Classical Plasticity, Quar. Jour of Mech. and App. Math., Vol. 1, 1948.

9) R. Hill : A Comparative Study of Some Variational Principles in the Theory of Plasticity, Jour. of App. Mech., Mar. 1950.

10) W. Prager, P. G. Hodge : Theory of Perfectly Plastic Solids, John Willey & Sons, Inc., 1951.

11) J. Heyman : The Limit Design of Space Frame, Jour. of App. Mech., Vol. 18, No. 2, June 1951.

12) J. Heyman : The Limit Design of a Transversely Loaded Square Grid, Jour. of App. Mech., June 1952.

13) 小野・田中：軸方向力を考慮したラーメンのリミット・デザイン，日本建築学会論文集 20号，昭30. 3.

14) Drucker, Prager, Greenberg : Extended Limit Design Theorems for Continuous Media, Quar. of App. Mech., Vol. 9, 1952.

15) P. S. Symonds, B. G. Neal : Recent Progress in the Plastic Methods of Structural Analysis, Jour. of Franklin Inst., Nov. and Dec. 1951.