STUDIES ON CNOIDAL WAVES (FIRST REPORT)
—ON THE WAVE STEEPNESS AND PROFILE—

by Dr. Eng. Yuichi IWAGAKI

Synopsis

The cnoidal waves, which were discovered by Korteweg and de Vries in 1895, are not familiar for engineers in spite of a long history because of mathematical treatments including the Jacobian elliptic function and the complete elliptic integrals of the first and second kinds. Since, however, it is noticed that the theory of Stokes waves is not appropriate to periodic waves progressing in shallow water whose depth is less than about one-tenth the wave length, but the theory of cnoidal waves should be applied to those waves, it is necessary to modify the theoretical results of cnoidal waves and provide the graphs to find easily the wave characteristics.

This paper presents, as the first report, the graphs and the method to compute the wave profile from given wave steepness and the water depth to wave height ratio based on the cnoidal wave theory developed by Laitone in 1960 and, in addition, compares the first and second approximations of his solution, Stokes waves of the third order approximation and the solitary wave.

1. まえがき

1895年に Korteweg-de Vries によって発見されたクノイド波は、その歴史がかなり古いにもかかわらず、数学的取扱いに Jacobi のだ円関数や第 1 種および第 2 種の完全だ円積分を含むために、われわれ技術者にとってはあまり深く深いものではない。しかし、いま水深を \( h \)、波長を \( L \)、平均静水面上波の峠までの距離を \( m \) とすれば、Stokes の波の理論が適用できるのは、Keulegan によれば \( h/L \geq 1/10 \)、Laitone によると \( h/L \geq 1/8 \)、Wilson-Webb-Hendrickson によれば \( h/L \geq (m/L)^{1/3} \) の場合であって、水深がこれより浅いところでは Stokes の波の理論は適用できず、クノイド波の理論を用いなければならないといわれている。Fig. 1 の太線は、横軸に周期 \( T \)、縦軸に水深 \( h \) をとって、Keulegan の適用限界 \( h/L = 0.1 \) を示したもので、この線より上の部分は Stokes の波の理論が適用できることになる。また図中の細い線は、各波形こう配ごとに、砕波指標（Breaker index）を用いて、砕波水深と周期との関係を示したもので、例えば、周期が 10 sec、波形こう配が 0.01 の波を考えれば、沖の方から水深が約 9 m までは Stokes の波の理論が使えるが、水深 9 m の地点から砕波水深約 3 m の地点までは Stokes の波ではなくクノイド波の理論を用いなければならないことがわかる。

したがって、クノイド波の理論の結果をできるかぎり使い易いように変形し、また図表などを用いて容易
に波の特性を求めることができるようにする必要がある。
Wiegel はこの目的のため、波高、水深、波長あるいは周期を与え、クノイド波の波形および波速を求めるグラフを作っているが、理論結果として Keller, Keulegan-Patterson および Korteweg-de Vries のものを用いたため、後述の第 1 近似（波高についてはもう一つ order が低い）にもついて計算したことになり、また平均水深と波の谷からの水深とが混同しているという欠点がある。

クノイド波の存在については Littman が証明し、また波状跳水などの開水路に発生するクノイド波については、Serre, 岩佐、Benjamin-Lighthill, Sandover-Taylor らが取扱っている。クノイド波の第 2 近似を初めて示したのは、Laitone であった。その後 Chappelear は Laitone が行なったのと同様な振動法を用いて第 3 近似（数学的には第 5 次近似）を求めている。

Laitone が水深として波の谷からの値を採用しているのに対して、Chappelear は平均水深をとっているので、工学的に利用するときには後者の方が都合がよいが、一般的なグラフを作成するために Chappelear のものは計算が非常に面倒である。したがって、この論文では、Laitone の理論を採用し、第 1 報として、波形こう配と水深・波高比を与え波形を求める図表を作成するとともに、波の第 1 近似と第 2 近似、さらに Stokes の波および孤立波のそれぞれの波形を比較して、近似の程度を検討したい。

2. Laitone によるクノイド波の理論解

いま Fig. 2 に示すように、$h$ を波の谷からの水深、$\eta$ を波の谷から水面までの距離、$\delta$ を谷から平均水面までの距離、波高を $H$、波長を $L$ とし、$x$ 軸は波の谷を通って水平方向、$z$ 軸は鉛直上方にとる。また、$u$ および $w$ をそれぞれ $x$ および $z$ 方向の速度成分、$\rho$ を圧力、$\rho$ を密度、$g$ を重力加速度とし、流れを加えて定常化した二次元の波を考えると、この場合の Euler の連続式、運動方程式、非回転運動の条件、水面での圧力条件、水面条件、および水底条件は、それぞれ次式によってあらわされる。

\[
\begin{align*}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}, \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} - g.
\end{align*}
\]

Fig. 1 Water depth corresponding to $h/L=0.1$ and breaking depth of water.

Fig. 2 Definition sketch of wave profile (right: for Stokes wave).
\[
\begin{align*}
\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\
\delta p(x, \eta) &= p(x, \eta) - p_{\text{atmoc}}, 0, \\
w(x, \eta) &= u(x, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad w(x, -h_t) - 0.
\end{align*}
\]

Laitone は \( d \ll l \) であるような基準長 \( d \) および \( l \) を導入し、これらを用いて \( x, z, u, w, h_t, \eta \) および \( p \) を次のように無次元化した。

\[
\begin{align*}
X &= x/d, \\
Z &= z/d, \\
U &= u/\sqrt{gd}, \\
W &= (w/\sqrt{gd})/(d/l), \\
H_t &= h_t/d, \\
N &= \eta/d, \\
P &= \delta p/\rho gd.
\end{align*}
\]

さらに

\[
\sigma = (d/l)^\alpha < 1
\]

とおき、(2)式の無次元量を用いて(1)式を書き直すと次のようになる。

\[
\begin{align*}
\sigma \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial W}{\partial Z} &= 0, \\
\sigma \left( U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{\partial U}{\partial Z} &= 0, \\
\sigma \left( U \frac{\partial W}{\partial X} + \frac{\partial P}{\partial Z} + 1 \right) + \frac{\partial W}{\partial Z} &= 0, \\
\frac{\partial W}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Z}, \\
W(X, N) &= \sigma U(X, N) \frac{\partial N}{\partial X}, \\
W(X, -H_t) &= 0.
\end{align*}
\]

Friedrichs にしたがって、\( U, W \) および \( P \) は (3) 式に示す微小量 \( \sigma \) を用いて、次の式で級数に展開できるものとした。すなわち,

\[
-H_t \leq Z \leq N(X) = \sum_{r=0}^{\infty} \sigma^r N_r(X)
\]

に対応して

\[
F(X, Z) = \sum_{r=0}^{\infty} \sigma^r F_r(X, Z).
\]

一方、水底条件は \( Z = -H_t \) とおいて求めることができるが、水面条件は \( N \) が未定義であるから、\( Z = N(X) \) とおいて \( U, W \) および \( P \) を直線求めることができない。そこで、水面における \( U, W \) および \( P \), すなわち \( U(X, N), W(X, N) \) および \( P(X, N) \) を次のように Taylor 級数に展開してあらわす形をとった。

\[
F(X, N) = \sum_{r=0}^{\infty} \sigma^r F_r(X, N)
\]

\[
\sum_{r=0}^{\infty} \sigma^r \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(N - N_0)^m}{m!} \left[ \frac{\partial^m F_r(X, Z)}{\partial Z^m} \right]_{Z = N_r}.
\]

ただし、\( N - N_0 = \sum_{r=1}^{\infty} \sigma^r N_r(X) \).

Laitone は (5)および (6) 式を (4) 式に代入し、0 次の項、1 次の項、2 次の項というように、それぞれの
(1) 波 形

\[
\eta_1 = \frac{H}{h_t} \cdot \text{cn}^2 \left(2K \frac{x}{L}, k\right),
\]

\[
\eta_2 = \frac{H}{h_t} \cdot \text{cn}^2 \left(2K \frac{x}{L}, k\right) - \frac{3}{4} \left(\frac{H}{h_t}\right)^2 \cdot \text{cn}^2 \left(2K \frac{x}{L}, k\right) \cdot \left(1 - \text{cn}^2 \left(2K \frac{x}{L}, k\right)\right).
\]

(2) 波 長

\[
L_1 = \frac{4kK}{(3H/h_t)^{1/2}} \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{2k^2-1}{k^2}\right) \left(\frac{H}{h_t}\right)^2\right],
\]

\[
L_2 = \frac{4kK}{(3H/h_t)^{1/2}} \left[1 - \left(\frac{7k^2-2}{8k^2}\right) \left(\frac{H}{h_t}\right)^2\right].
\]

(3) 流 速

\[
\sqrt{gh_t} = 1 + \frac{\sqrt{2k^2-1}}{2k^2} \frac{H}{h_t} - \eta_1,
\]

\[
\sqrt{gh_t} = 1 + \frac{\sqrt{2k^2-1}}{2k^2} \frac{H}{h_t} - \frac{\sqrt{2k^2-1}}{4k^2} \left(\frac{H}{h_t}\right)^2,
\]

\[
\frac{1}{\sqrt{gh_t}} = -\frac{9}{4} \frac{H}{h_t} \left(\frac{2k^2-1}{k^2}\right) \left(\frac{2k^2-1}{k^2}\right) h_t^2 \right\}
\]

\[
\frac{1}{\sqrt{gh_t}} = -\frac{9}{4} \frac{H}{h_t} \left(\frac{2k^2-1}{k^2}\right) \left(\frac{2k^2-1}{k^2}\right) h_t^2 \right\}
\]

\[
\frac{1}{\sqrt{gh_t}} = -\frac{9}{4} \frac{H}{h_t} \left(\frac{2k^2-1}{k^2}\right) \left(\frac{2k^2-1}{k^2}\right) h_t^2 \right\}
\]

\[
\frac{1}{\sqrt{gh_t}} = -\frac{9}{4} \frac{H}{h_t} \left(\frac{2k^2-1}{k^2}\right) \left(\frac{2k^2-1}{k^2}\right) h_t^2 \right\}
\]

(4) 压 力

\[
\frac{4p_1}{\rho gh_t} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{h_t},
\]

\[
\frac{4p_2}{\rho gh_t} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{h_t} \left(\frac{H}{h_t}\right) \left(\frac{2k^2-1}{k^2}\right) h_t^2 \right\}
\]

\[
\frac{1}{\sqrt{gh_t}} = -\frac{9}{4} \frac{H}{h_t} \left(\frac{2k^2-1}{k^2}\right) \left(\frac{2k^2-1}{k^2}\right) h_t^2 \right\}
\]

(5) 波 速

\[
\frac{c_1}{\sqrt{gh_t}} = 1 + \frac{H}{h_t} \cdot \left(\frac{1 - E}{K}\right),
\]

\[
\frac{c_1}{\sqrt{gh_t}} = 1 + \frac{H}{h_t} \cdot \left(\frac{1 - E}{K}\right) + \left(\frac{H}{h_t}\right)^2 \left(\frac{1 - E}{K}\right) \left(\frac{3k^2}{4} - 1\right) - \left(\frac{k^4 + 14k^2 - 9}{40}\right).
\]
(6) 静水面の位置

\[
\frac{\delta_i}{h_i} = \frac{H}{h_i} \frac{1}{k^2} \left( \frac{E}{K} + k^2 - 1 \right),
\]

(19)

\[
\frac{\delta_2}{h_i} = \frac{H}{h_i} \frac{1}{k^2} \left( \frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) + \left( \frac{H}{h_i} \right)^2 \frac{1}{12k^4} \left[ 8 - 11k^2 + 3k^4 - (8 - 7k^4) \frac{E}{K} \right].
\]

(20)

ここに、cn, sn および dn は Jacobi のだ円関数、k はその母数、K および E はそれぞれ第1種および第2種の完全だ円積分で k の関数である。

3. 理論解の図化

ここでは、第1報として波形を求めるわけであるが、(7)および(8)式からわかるように、K あるいは k の値が与えられなければ波形を求めることはできない。K あるいは k の値は、(9)あるいは(10)式より \(H/h_i\) および \(L/h_i\) を与えれば求めることができるが、実用的には波高水深の関数 \(h_i\) も平均水深 \(h = h_i + \delta\) を用いる方が都合がよいので、(19)あるいは(20)式を用いて \(\delta\) を求め、\(h_i\) にこれを加える必要がある。したがって、ここに用いる理論解は(7)，(8)，(9)，(10)，(19)および(20)式である。

まず K および E と k の関係は、\(k = \sin \alpha\) において、\(\alpha\) との関係として関数表に与えられている (K は F ともあらわされる)。また k が 1 に近いときは、k の代わりに

\[
k' = \cos \alpha = (1 - k^2)^{1/2}
\]

(21)

を使用する場合がある。図 5 には K と k との関係、図 6 には K と k' との関係、図 3 には E および E/K を K と \(K\) の関係が図示されている。k が 0 になった K および \(E\) の極値の値はいずれも \(\pi/2\) であり、k が 1 になった極値はそれぞれ 0 および 1 である。これらの関係が与えられると、(19)および(20)式はそれぞれ

\[
\frac{\delta_i}{H} = \frac{1}{k^2} \left( \frac{E}{K} + k^2 - 1 \right),
\]

(22)

\[
\frac{\delta_2}{H} = \frac{1}{k^2} \left( \frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) + \left( \frac{H}{h_i} \right)^2 \frac{1}{12k^4} \left[ 8 - 11k^2 + 3k^4 - (8 - 7k^4) \frac{E}{K} \right]
\]

(23)

と変形されるから、\(\delta_i/H\) は K の値を与えると求まり、また \(\delta_2/H\) は K のほかに \(h_i/H\) の値を与えると求められる。したがって、与えた \(h_i/H\) と求める \(\delta_i/H\) との和 \(h_i + \delta_i)/H\) が平均水深と波高の比 \(h_i/H\) の形で与えた値となる。また Laitone は最高波の条件として \(h_i/H = 1.37\) を得ており、これが \(h_i/H\) の極値としての最小値である。図 4 は第1近似 \(\delta_i/H\) および \(h_i/H = 5\) と \(h_i/H = 1.37\) の場合の第2近似 \(\delta_i/H\) を示したもので、K との関係で図示している。この図からわかるように、第2近似は第1近似と差は小さく、\(h_i/H = 1.37\) の場合には最大約 6 %、\(h_i/H = 5\) の場合には約 2 %程度第1近似より小さいにすぎない。

k が 1 に非常に近い場合には、(22)および(23)式は次のように書きかえられる。
Fig. 4 The first and second approximations of $\delta/H$.

\[
\frac{\delta_1}{H} \approx \frac{E}{K}
\]

\[
\frac{\delta_2}{H} \approx \frac{E}{K} \left(1 - \frac{1}{12} \frac{H}{h_t}\right)
\]

例えば、$k = 0.997$ ($K = 4.004, \alpha = 85.48^\circ$) の場合、(24)および(25)式は(22)および(23)式よりそれぞれ約1.7％および1.6％程度大きい値を与える。したがって、この程度の誤差を許せば、$K \leq 4$ のときには、(24)および(25)式を用いてよいことになる。

つぎに波長を与える式(9)および(10)式はそれぞれ次のように書きかえられる。

\[
\frac{H}{L_1} = \sqrt{3} \left(\frac{H}{h_t}\right)^{1/3} \left[1 - \frac{3}{2} \left(-\frac{2k^2 - 1}{k^2}\right) \frac{H}{h_t}\right]^{-1/3}
\]

\[
\frac{H}{L_2} = \frac{\sqrt{3}}{4kK} \left[1 - \left(-\frac{2k^2 - 2}{8k^2}\right) \frac{H}{h_t}\right]
\]

したがって、$k$ あるいは $K$ と $h_t/H$ を与えると波形を配 $H/L$ の値を求めることができる。なお、$h_t/H$ は前述のように $\delta/H$ を加え、平均水深と波高の比 $h/H$ で与える方が実用上便利である。Fig. 5 は $H/L$ と $\alpha = \sin^{-1}k$ との関係、Fig. 6 は $k = 1$ の場合の $H/L$ と $k' = 1 - k^2$ との関係を $h/H$ をパラメーターとして示したもので、破線は第1近似の(26)式、実線は第2近似の(27)式にもとづいて求めた関係である。これらの図から、$h/H$ の値が大きいときには第1近似と第2近似の差は小さいが、$h/H$ の値が小さくなると２者の差は非常に大きくなることがわかる。クノイド波が海岸工学へ利用されるのは、恐らく $h/H$ の値が10程度以下と考えられるので、正確な値を求める場合には第1近似の(26)式は使わない方がよいであろう。Fig. 7 は $K$ が小さい場合の $H/L$ と $K - \pi/2$ との関係、Fig. 8 は $K$ が大きいときの $H/L$ と $K$ との関係を示したもので、いずれも第2近似の(27)式にもとづいている。これらの図から、$H/L$ および $h/H$ の値を与えて $K$ の値を知ることができる。

なお、第1近似として
Fig. 5  Relationships between $K$, $H/L$ and $\alpha = \sin^{-1}k$

\[
\frac{H}{L_1} = \frac{\sqrt{3} (H/h_t)^{3/2}}{4kK}
\]

を使用する場合があるが、これも $h_t/H$ あるいは $h/H$ が小さい場合にはかなりの誤差が入ることに注意する必要がある。また、特に $k = 1$ の場合には、(26)および(27)式はそれぞれ次のように書きかえられる。

\[
\frac{H}{L_1} = \frac{\sqrt{3} (H/h_t)^{3/2}}{4kK} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{H}{h_t}\right)^{-1}
\]  

(29)

\[
\frac{H}{L_s} = \frac{\sqrt{3} (H/h_t)^{3/2}}{4kK} \left(1 - \frac{5}{8} \frac{H}{h_t}\right)
\]  

(30)

$k = 0.978 \ (K = 2.979, \alpha = 78^\circ00'), \ 0.993 (K = 3.500, \alpha = 83^\circ00') \ と \ 0.997 (K = 4.004, \alpha = 85^\circ48')$
Fig. 6: Relationships between $K$, $H/L$, and $k = (1 - k)^{1/2}$ when $k$ is approximately equal to 1.

Fig. 7: The second approximation of $H/L$ when $K$ is small.
の場合には、(30)式は(27)式よりそれぞれ約3.7％、1.2％および0.5％程度小さい値を与える。したがって、1.2％程度の誤差を許すとすれば、$K \geq 3.5$ のときには(30)式を用いてよいことになる。

4. 波形

いま

$$2Kx/L - \nu$$  
(31)

とおいて、(7)および(8)式を書き直し、次のようになる。

$$\eta_1 = \frac{H}{L} \text{cn}^2(\nu, k)$$  
(32)

$$\eta_2 = \frac{H}{L} \left[ \text{cn}^2(\nu, k) - \frac{3}{4} \frac{H}{h_1} \text{cn}^2(\nu, k) \right] \times \left(1 - \text{cn}^2(\nu, k)\right)$$  
(33)

$0.95 < k^2 \leq 1$ の場合には、

$$\text{cn}(\nu, k) \approx \text{sech} \nu - (1/4)(1-k^2) \tanh \nu \text{sech} \nu \times (\sinh \nu \cosh \nu - \nu)$$  
(34)

と近似される。これからわかるように、$k = 1$ の場合には、$\text{cn}(\nu, k) = \text{sech} \nu$ となり、(32)式より第1近似の孤立波の波形が次のように与えられる。

$$\eta_1 = \frac{H}{L} \text{sech}^2 \nu.$$  
(35)

ただし、この場合の $\nu$ は普通(28)式と(31)式より $K/L$ を消去して、

$$\nu = \sqrt{\frac{3}{2}x} \left(\frac{H}{h_1}\right)^{1/2}$$  
(36)

が用いられている。ここでは、$k \approx 1$ の場合を考え、$\nu$ を(31)式のままにおいて、

$$\eta_1 = \frac{H}{L} \text{sech}^2 \left(2Kx/L\right)$$  
(37)

とあらわすことができる。したがって、(32), (34)および(37)式より、$0.95 < k^2 \leq 1$ に対して適用されるものとして、次式がえられる。

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\text{cn}^2(\nu, k)}{\text{sech}^2 \nu} = \left[1 - \frac{1}{4}(1-k^2)(\sinh^2 \nu - \nu \tanh \nu)\right]^2,$$  
(38)

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \text{sech}^2 \nu \left[1 - \frac{1}{4}(1-k^2)(\sinh^2 \nu - \nu \tanh \nu)\right]^2.$$  
(39)

これらの関係を示すと、$\eta_1/\eta_2$ および$(\eta_2/\eta_1)/H$ と $K$ の関係を、$x/L$ をパラメータとして

Fig. 8 The second approximation of $H/L$ when $K$ is large.
求めたものが Fig. 9 および 10 である。第 1 種の円積分表を用いて Jacobi の cn 関数の値を求めるのは手数を要するが、Fig. 9 あるいは 10 を利用すれば、双曲線関数表のみで簡単に第 1 近似のクノイド波の波形が求められる。すなわち、$H/L$ および $h/L$ の値が与えられると、Fig. 7 あるいは 8 から $K$ の値を求められる。したがって、$x/L$ の値を与えれば $v = 2Kx/L$ がわかり、双曲線関数表を用いて sech $v$ の値を求められる。一方、Fig. 9 より $K$ の値に対応する $x/L = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ の場合 ($x/L = 0$ のところは $n_1/n_2 = 1.0, x/L = 0.5$ のところは $n_1/n_2 = 0$) の $n_1/n_2$ の値を読み取り、これに sech $v$ の値を掛けると、各 $x/L$ に対応する $n_1/H$ の値が求められる。あるいは、Fig. 10 を用いて各 $x/L$ に対する $(n_1/n_2)/H$ の値を求める、sech $v$ の値からこの値を差引いても求めることができる。なお Fig. 10 より、$n_2$ と $n_1$ の差は、最大 $K = 3.5$ のとき波高の約 1％、$K = 3$ のとき約 1.5％程度であるから、1.5％程度の誤差を許すとすれば、$K \geq 3$ のときには、クノイド波の第 1 近似の波形として、(37) 式を用いてよいことがわかる。

次に第 1 近似の波形 $n_1/H$ から第 2 近似の波形 $n_2/H$ を求める方法を説明しよう。

(32) および (33) 式より $(n_1 - n_2)/H$ を求めるとき、次のような関係がえられる。

$$
\frac{n_1 - n_2}{H} = \frac{3}{4} \frac{H}{h_t} \frac{H}{H} \left( 1 - \frac{h_t}{H} \right).
$$

したがって、Fig. 4 から $h_t/H$ を求め、$h_t/H = (h - 8)/H$ の関係より $h_t/H$ を計算し、(40) 式より $(n_1 - n_2)/H$ を求めて、この値だけ $n_1/H$ から差引けば $n_2/H$ がえられることになる。なお、Fig. 11 を利用すれば、(40) 式を計算する手間が省ける。また、Fig. 11 より、$h_t/H \leq 9.5$ のときには、第 1 近似と第 2 近似の波形の差は、波高の約 2％以下であるが、$h_t/H$ が 9.5 程度より小さくなると、両者の差はかなり大きくなるので、第 2 近似を用いなければならないことがわかる。
さて、このようにして求められるクノイド波の波形が、Stokes 波の波形とどの程度差があるか検討してみよう。比較する Stokes 波は 3rd order のものを採用することにする。

座標軸を Fig. 2 の右側のようにとれば、波形は次式であらわされる。

\[
\frac{\pi - \delta}{L} - A_1 \cos \frac{2\pi}{L} x + A_2 \cos \frac{4\pi}{L} x + A_3 \cos \frac{6\pi}{L} x,
\]

\[
A_1 = \frac{a}{2}, \quad A_2 = -\frac{1}{16} \left( \frac{a}{L} \right)^3 \frac{8(\cosh 2\pi h/L)^4 + 1}{(\sinh 2\pi h/L)^4},
\]

\[
A_3 = -\frac{3}{16} \left( \frac{a}{L} \right)^3 \frac{8(\cosh 2\pi h/L)^4 + 1}{(\sinh 2\pi h/L)^4}.
\]

また、波高 \( H \) と \( 2a \) との関係は、

\[
\frac{H}{2a} = 1 + \pi \left( \frac{a}{L} \right)^3 \frac{3}{16} \frac{8(\cosh 2\pi h/L)^4 + 1}{(\sinh 2\pi h/L)^4}.
\]

静水面の座標軸からの距離 \( \delta \) は、

\[
\frac{\delta}{L} = \pi \left( \frac{a}{L} \right)^3 \coth \frac{2\pi h}{L}.
\]

この Stokes 波の波形をあらわす級数の収束性については、モリスが研究し、Fig. 12 に示すような限界を求めた。クノイド波と比較すべき Stokes 波として、あまり収束限界に近いところでは近似が悪くなるので、Fig. 12 の図の位置における三つの場合を採用し、計算にあたっては Skjelbreia の表を用いた。計算の結果は Fig. 13 のようであって、\( h/L = 0.1 \) および 0.2 の場合には、Stokes 波とクノイド波の第 2 近似とはほぼ一致している（Stokes 波の方が全体として上にあがっており、Skjelbreia の表を用いるときに誤差が入ったと思われる）が、\( h/L = 0.05 \) の場合には \( A_2 \) および \( A_3 \) の値が大きくなり倍振動および 3 倍
振動の効果が顕著となって、両者が一致しなくなる。一方、逆に $h/L$ の値が小さくなると、$K$ の値が大きくなって、クノイド波の第 1 近似と孤立波の波形とはほとんど一致することがわかる。なお、クノイド波の第 1 近似と第 2 近似の波形は、三つの場合とも $h/H = 5.0$ で、$h/L$ の値に大きな差がないので、Fig. 11 からわかるように 両者の違いはほとんど変化がない。

Wilson-Webb-Hendrickson は前述したように、Stokes 波の理論の適用限界として、

$$h/L > (m/L)^{1/3}$$  (44)

を与えたが、Fig. 13 に示す三つの場合について、$m/L$ の値を求め適用限界を計算すれば、(a) $h/L > 0.195$、(b) $h/L > 0.231$、(c) $h/L > 0.282$ となる。これらの限界と Fig. 13 に示す計算例を比較すれば、いずれの場合も Stokes 波の適用限界外の場合を計算したことになるが、(a)の場合を除き、(b)および(c)の場合は Stokes 波を適用してよいように思われ、3rd order のものを採用する場合には、(44)式の限界は少し厳格すぎるように考えられる。

5. 結 語

以上この論文では、Laitone のクノイド波理論の結果を用いて、实用できる図表を作成し、波形ご配と水深・波高比を与えてクノイド波の波形を求めめる方法を示した。そして、さらに孤立波および Stokes 波の波形と比較して、近似的程度を調べ、波高の最大 1.5 % 程度の誤差を許すとすれば、$K > 3$ のときには、孤立波の第 1 近似の波形をクノイド波の第 1 近似の波形としてよいこと、また、Wilson-Webb-Hendrickson

![Fig. 13 Comparisons of wave profiles of cnoidal, solitary and Stokes waves (continued).](image)
Fig. 13 Comparisons of wave profiles of cnoidal, solitary and Stokes waves.

(c)

のStokes波の適用限界は波形に対しては厳格すぎることなどを明らかにした。
最後に数値計算に協力して頂いた久下元一技官、大学院学生坂井順行君、および吉田宜子、安本春子の両襄に謝意を表したい。

参考文献

11) 岩佐義朗：カーニオド波と孤立波に関する解析的研究，土木学会論文集，第32号，昭31.3，pp. 43-49.
19) 首藤伸夫：有限振幅波について——高次の級数解、その収束性および近似式の誤差について——，土木研究所報告，107号の4，昭35.9，pp. 35-41.