

# 彎曲部の流れに及ぼす二次流の効果について

村本 嘉雄・石田 真一

## THE EFFECT OF SECONDARY FLOW ON CURVED FLOW

by Yoshio MURAMOTO and Shinichi ISHIDA

### Synopsis

This paper presents the hydraulic behaviors of the upper layer and the lower layer in curved channel flow in consideration of the effect of secondary flow.

Firstly, as for the flow of the upper layer, we developed the fundamental equations of motion and continuity including the velocity components of secondary flow and examined the effect of secondary flow on main flow.

Secondly, the behavior of the lower layer is presented by the two analytical methods considering the condition of the boundary surface between the upper and lower layer, and the equations of momentum and continuity.

### 1. 緒 言

一般に、彎曲部の流れにおいて、二次流の特性を無視できないことは古くから指摘されているが、流れの内部構造を観察する計測手法の限界ならびに摩擦過程を含む純三次元問題という理論的限界から、いまだにその現象実体を統一的に把握する段階にいたっていない。

本論文では、同心円状の彎曲部の流れを対象とし、主流方向に一樣な二次流の存在する上層部の流れおよび下層部の流れについて考察を行なった。

上層部の流れに関しては、二次流の速度成分を加味した基礎式を展開し、主流に及ぼす二次流の効果および主流の流速分布、水面形の特性について検討を加えた。また、下層部の流れに関しては、従来、看過されている解析上の問題点を指摘し、新たに二つの解析法に基づいて考察を行なった。

本論文の取扱いは主流方向一樣と限定されたものであるが、従来、定性的に論じられていた実験事実を裏づける諸特性を把握することができ、主流方向の変化を論ずる場合の指針となると考える。

### 2. 上層部の流れに関する考察

従来、上層部の流れに関しては Potential 流れと考え  $U \cdot r = \text{一定}$  とする取り扱い<sup>1)</sup>、また、 $U - Kr^n$  ( $K, n$ : 定数) とする仮定<sup>2), 3)</sup>が用いられており、二次流が存在する流れの特性が十分に把握されていない。

本節では、同心円状の彎曲部において、主流方向(接線方向)に一樣な二次流が存在する上層部の流れを対象とし、二次流の効果および主流の特性について考察する。

#### (1) 上層部の流れの基礎式

上層部として水路底面および側面のせん断応力の影響を無視できる領域を対象とし、また二次流の速度成分として彎曲部の流れに卓越する半径方向の成分だけを考慮する。いま、主流方向および二次流の半径方向の速度成分をそれぞれ  $U(r)$ 、 $V(r)$  とし、圧力  $P(r)$  とすると、流れの運動方程式および連続式をつぎのように表わすことができる。

$$\left\{ \begin{array}{l} V \frac{dU}{dr} + \frac{UV}{r} = gi \quad (1) \\ V \frac{dV}{dr} - \frac{U^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} \quad (2) \\ \frac{1}{r} \frac{d(Vr)}{dr} = 0 \quad (3) \end{array} \right.$$

ここで、 $g$  は重力の加速度、 $i$  は路床こう配である。

以上の基礎式について従来の考察と比較すると、自由渦 (Potential 流) 理論に基づく考察では

$$\zeta = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (Ur) = 0 \quad \text{i.e.} \quad U \cdot r = D = \text{const} \quad (4)$$

と(2)式の  $VdV/dr$  を無視した式とを連立させて、 $U(r)$ 、 $P(r)$  を求めている。一方、 $U=Kr^m$  と仮定する考察では(1)式および  $VdV/dr$  を無視した(2)式から流れを規定している。しかし、彎曲部の流れでは、 $V$  成分が卓越するので無視できなく、また、連続式を考慮しない場合には条件式が不足するので、 $V$  成分も仮定として与えられることになろう。

つぎに、(1)式~(3)式から  $U(r)$ 、 $V(r)$  および  $P(r)$  を求める。まず、(3)式より、

$$V \cdot r = C_1 \quad (5)$$

となり、これを(1)式に代入し、積分すると  $U(r)$  は

$$Ur = \frac{gi}{3C_1} r^3 + C_2 \quad (6)$$

となる。ここで、 $C_1$  および  $C_2$  は積分定数である。さらに、(5)式および(6)式を(2)式へ代入し、整理すると、

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = \left( \frac{gi}{3C_1} \right)^2 r^3 + \frac{C_1^2 + C_2^2}{r^3} + \frac{2giC_2}{3C_1}$$

となる。鉛直方向の速度成分を重視しているので、 $P(r) = \rho gh(r)$  であって、上式を積分することにより、水深の変化は

$$h = \frac{gi^2}{36C_1^2} r^4 - \frac{C_1^2 + C_2^2}{2gr^2} + \frac{2iC_2}{3C_1} r + C_3 \quad (7)$$

また、彎曲部の内岸と外岸との水位差は

$$\Delta h = [h]_{r_1}^{r_2} = \left[ \frac{gi^2}{36C_1^2} r^4 - \frac{C_1^2 + C_2^2}{2gr^2} + \frac{2iC_2}{3C_1} r \right]_{r_1}^{r_2} \quad (8)$$

と表わされる。ここで、 $C_3$  は積分定数、 $r_1$  および  $r_2$  はそれぞれ内岸、外岸における曲率半径である。

(1)式~(3)式の基礎式から明らかなように、この取り扱いによる流れの  $(\theta, r, z)$  方向の渦度成分はそれぞれ、

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (Ur) = \frac{gi}{V} = \frac{gi}{C_1} r > 0 \quad (9)$$

となり、内岸から外岸へ鉛直方向の渦度成分が一次的に増加する回転流を表わしている。また、(1)式~(3)式からエネルギー式を求めると、

$$h + \frac{1}{2g} (U^2 + V^2) - i \int \frac{U}{V} dr = \text{const.} \quad (10)$$

となり、左辺第二項および第三項に二次流によるエネルギーが付加されている。

(2) 二次流の効果

前項の誘導結果から明らかなように、二次流の半径方向成分は  $1/r$  に比例し、外方に減少すると考えられる。著者等が行なった実験結果<sup>4),5)</sup>によると、水深が比較的大きい場合(平均水深と水路巾比  $h/B=0.2$ )には  $V$  は明らかに外方へ減少する傾向を示しており、従来のように  $V=0$  あるいは  $V=const.$  として取り扱えないように考えられる。なお、水深の小さい場合には、水路底面の影響が上層部に及ぶので前項の基礎式による取り扱いはできなく、実験結果も  $V$  に関して一様な傾向を示さない。

つぎに、主流成分だけから誘導される自由渦の理論と比較して、流速および水深の変化に及ぼす二次流の影響を考える。 $U$  に関しては(4)式と(6)式との比較からわかるように、(6)式で右辺第一項  $gir^3/3c_1 (>0)$  が付加されており、外方へ  $U$  が増大する効果を表わしている。一方、 $h$  に関しては、自由渦理論では(4)式および(2)式で  $Vdh/dr=0$  とした式から、内、外岸の水位差  $dh$  はつぎのように表わされる。

$$dh = \frac{D_1^2}{2g} \left( \frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3} \right) \tag{11}$$

したがって、(8)式の右辺で新たに

$$\left[ \frac{gi^2}{36C_1^2} r^4 - \frac{C_1^2}{2gr^2} + \frac{2giC_2}{3C_1} r \right]_{r_1}^{r_2} > 0$$

が付加されており、二次流によって水位差が増大することを示している。また、これは基礎式(2)および(3)式から導かれる。

$$gdh/dr = (U^2 + V^2)/r > 0 \tag{12}$$

の関係からも明らかである。

以上の二次流の効果のうち、 $U$  が外方へ増大する傾向は閉水路および開水路で断面形状に関係しない普遍的な特性として、古来多くの実験結果から確認されている。しかし、 $h$  の変化に関しては十分な検討がなされてなく、多くは  $U$  を一様分布、自由渦分布あるいは強制渦分布とする仮定から導かれる式が適用されている。最近、著者等が行なった曲率半径と水路巾比  $r_0/B=1\sim4$  の最大水位差に関する実験結果<sup>6)</sup>によると、剝離域の存在しない場合にはすべてこれらの  $U$  の仮定に基づく式より大きい値を示すことが認められた。また、昨年度<sup>4),7)</sup> 前項の積分定数  $C_1, C_2$  を実測の  $U$  値および流向測定からの  $V$  換算値を用いて平均的に決定し、(8)式から算定した水位差と実験値とを比較した。その結果、水深が比較的大きく ( $h/B=0.2$ )、二次流が充分に発達している断面において、(8)式が(1)式よりよい一致を示すことが確認された。

しかし、従来、二次流の効果により水位差が緩和されるという結果<sup>3)</sup>も得られており、現在のところまだ結論をうる段階にいたっていない。

(3) 積分定数  $C_1$  と  $C_2$  との関係

上層部の流れの流速分布および水深変化を決定するには(5)、(6)および(7)式の積分定数を彎出水路の境界条件および水理条件より規定しなければならない。これは、下層部の流れの実体と関係する問題で、具体的には上、下層部の境界面の特性、水路隅角部における流れの転向特性といった、上、下層の流れの相互作用、移行過程の究明につながっている。しかし、境界面近傍の計測の困難さによる現象実体の不確定性と同時に、解析的にも非対称な三次元性、エネルギー逸散の根幹を包含する問題で、現状では容易に単純化されないと考えられる。

したがって、本項では  $C_1$  と  $C_2$  の関係を定めるのに水深変化について

[A] 断面内で平均水深が水路中央の水深と一致する。

という最小限の仮定を考える。この仮定は著者らが行った実験によると、曲率の大きい彎曲部においても剝離域が存在しない場合ではほとんど妥当なことが確認された。また、水位差に関して、

〔B〕内、外岸の水位差が内岸と水路中心の水位差の二倍に等しい。

という仮定も実験的に認められているが、まず、この二つの仮定より導かれる  $C_1$  と  $C_2$  の関係について検討する。

〔A〕の仮定を用いる場合；(7)式に基づいて、平均水深と水路中心の水深を等値すると、

$$\frac{1}{B} \int_{r_1}^{r_2} (n_1 r^4 - n_2 \frac{1}{r^2} + n_3 r + C_3) dr = n_1 r_c^4 - n_2 \frac{1}{r_c^2} + n_3 r + C_3$$

となる。ここで、 $r_c$  は彎曲部の中心曲率半径、 $n_1 = g^2 i^2 / 36 C_1^2$ 、 $n_2 = (C_1^2 + C_2^2) / 2g$ 、 $n_3 = 2i C_2 / 3 C_1$  である。上式を計算整理すると、 $C_1$  と  $C_2$  との関係として、

$$C_1^2 (C_1^2 + C_2^2) = \frac{1}{9} g^2 i^2 B^6 \alpha^2 \left( \alpha^2 + \frac{1}{40} \right) \left( \alpha^2 - \frac{1}{4} \right) \quad (13)$$

が得られる。ここで、 $\alpha = r_c / B > 1/2$  で  $B$  は水路巾である。

一般に、上層部の流れにおいては  $U > V$ 、 $C_2 > C_1$  であり、著者等の実験結果<sup>(4,7)</sup>によると、 $\alpha = 3$  の急な彎曲部においても  $C_1 \sim 10^2$ 、 $C_2 \sim 10^3$  の order となっている。したがって、(13)式の左辺で  $C_1^2$  は  $C_1^2 C_2^2$  の項に比較して無視できると考えると、

$$C_1^2 C_2^2 = \frac{1}{9} g^2 i^2 B^6 \alpha^2 \left( \alpha^2 + \frac{1}{40} \right) \left( \alpha^2 - \frac{1}{4} \right) \quad (14)$$

で表わされる。

〔B〕の仮定を用いる場合；(8)式から〔B〕の仮定は、

$$2 \left[ n_1 r^4 - n_2 \frac{1}{r^2} + n_3 r \right]_{r_1}^{r_2} = \left[ n_1 r^4 - n_2 \frac{1}{r^2} + n_3 r \right]_{r_1}^{r_2}$$

で表わされ、計算整理すると、 $C_1$  と  $C_2$  の関係として、

$$C_1^2 (C_1^2 + C_2^2) = \frac{1}{9} g^2 i^2 B^6 \alpha^2 \frac{(\alpha^2 - 1/4)^2 (\alpha^2 + 1/24)}{(\alpha^2 - 1/12)} \quad (15)$$

が得られる。〔A〕と同様に  $C_1^2 \ll C_1^2 C_2^2$  として  $C_1^2$  を無視すると、(15)式に対応する関係式は、

$$C_1^2 C_2^2 = \frac{1}{9} g^2 i^2 B^6 \alpha^2 \frac{(\alpha^2 - 1/4)^2 (\alpha^2 + 1/24)}{(\alpha^2 - 1/12)} \quad (16)$$

となる。

以上の(13)式～(16)式より、路床こう配、水路巾、中心曲率半径の三つの境界条件が与えられれば  $C_1$  と  $C_2$  の関係が定まる。すなわち、水理条件に関する定数  $C_1$  と  $C_2$  の積が境界条件だけで一義的に決定されることを表わしている。

いま、一例として  $g = 980 \text{ cm/sec}^2$ 、 $i = 2 \times 10^{-3}$ 、 $B = 25 \text{ cm}$  とし、 $\alpha = 1 \sim 10$  の場合について、以上の4式を計算し、両対数図表で比較すると **Fig. 1** のようになる。まず、〔A〕、〔B〕の仮定については図より明らかなように、その差は、 $C_1$ 、 $C_2$  の order に比して十分小さく無視することができ、とくに  $\alpha \geq 5$  では両者はほとんど一致する。一方、(14)式および(16)式の近似式も、 $C_1 < C_2$  で 1 order 異なる範囲では適用できるといえよう。これらの  $C_1$  と  $C_2$  の関係についてはいまままでに十分な実験値がなく検討できないが、著者等の実験<sup>(4,7)</sup>で  $\alpha = 3$  の場合、 $C_1 \approx 100 \sim 500$ 、 $C_2 \approx 1000 \sim 2000$  と得られており、**Fig. 1** の計算結果とほぼ一致する。

以上の検討から、以下では  $C_1$  と  $C_2$  の関係として、簡単のために(13)式あるいは(14)式を用いて解析を進め

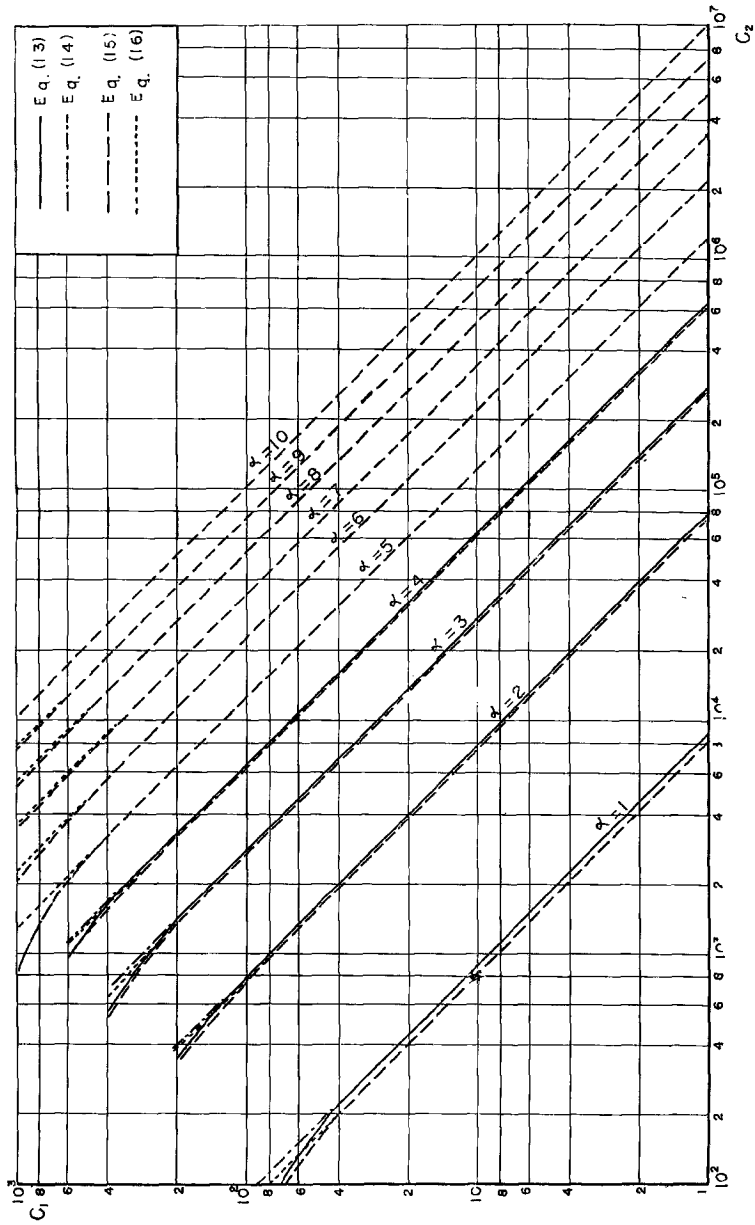


Fig. 1 Relation between integral consts.  $C_1$  and  $C_2$ . ( $g=980\text{cm/sec}^2$ ,  $i=2 \times 10^{-3}$ ,  $B=25\text{cm}$ )

ることとする。

#### (4) 上層部の流れの特性

まず、(1)で述べた主流の流速成分  $U$  が外方に増大する傾向を明らかにするために、 $dU/dr$  の特性を検討する。(6)式より  $dU/dr$  を求め、(4)式の  $C_1$ 、 $C_2$  の関係を用いると、

$$\frac{dU}{dr} = \frac{2gi}{3C_1 r^2} \left( r^3 - \frac{3C_1 C_2}{2gi} \right) = \frac{2gi}{3C_1 r^2} \left\{ r^3 - \frac{1}{2} B^3 \alpha \sqrt{\left( \alpha^2 + \frac{1}{40} \right) \left( \alpha^2 - \frac{1}{4} \right)} \right\}$$

となる。したがって、 $dU/dr \leq 0$  の条件は

$$t^3 \leq \frac{1}{2} \alpha \sqrt{\left( \alpha^2 + \frac{1}{40} \right) \left( \alpha^2 - \frac{1}{4} \right)} \quad (17)$$

で与えられる。ここで、 $t = r/B$  でその変数範囲は  $|t - \alpha| \leq 1/2$ 、 $\alpha < 1/2$  である。また、

$$\frac{d^2 U}{dr^2} = -\frac{2gi}{3C_1} + \frac{2C_2}{r^3} = \frac{2gi}{3C_1} \left\{ 1 + \frac{1}{t^3} \alpha \sqrt{\left( \alpha^2 + \frac{1}{40} \right) \left( \alpha^2 - \frac{1}{4} \right)} \right\} > 0$$

であるから、(17)式の等号は  $U$  が最小となる  $t$  の条件式を表わしている。

一方、水深変化については(2)式から、 $dh/dr > 0$  で水深は常に外方に増加する。また、(7)式を  $r$  で微分し、 $C_1$  および  $C_2$  に関して(3)式を用いると、 $h$  の曲率は

$$\frac{d^2 h}{dr^2} = \frac{g^2}{3C_1^2} \left\{ r^2 - \frac{9C_1^2 (C_1^2 + C_2^2)}{g^2 t^2 r^4} \right\} = \frac{g^2}{3C_1^2 r^4} \left\{ r^6 - B^6 \alpha^2 \left( \alpha^2 + \frac{1}{40} \right) \left( \alpha^2 - \frac{1}{4} \right) \right\}$$

となり、 $d^2 h/dr^2 \leq 0$  の条件は

$$t^3 \leq \alpha \sqrt{\left( \alpha^2 + \frac{1}{40} \right) \left( \alpha^2 - \frac{1}{4} \right)} \quad (18)$$

で与えられる。上式で等号は明らかに  $h$  が変曲点となる  $t$  の条件式を与える。いま、(17)式および(18)式を図示すると **Fig. 2** のようになり、I;  $dU/dr > 0$ 、 $d^2 h/dr^2 > 0$ 、II;  $dU/dr > 0$ 、 $d^2 h/dr^2 < 0$ 、III;  $dU/dr < 0$ 、 $d^2 h/dr^2 < 0$  の3種の領域に分けることができる。IおよびIIIの領域はそれぞれ強制渦、自由渦的な流れの特性をもつが、IIの領域は従来考えられてない。なお、 $dU/dr = 0$ 、 $d^2 h/dr^2 = 0$  の曲線は(17)式および(18)式より明らかなように  $\alpha$  が大きくなるとともに、それぞれ、 $t = \alpha/\sqrt{2}$ 、 $t = \alpha$  の直線に漸近する。

#### (4.1) $U$ の特性

**Fig. 2** から明らかなように、一断面内の  $U$  分布は  $\alpha$  の増大にともなって、 $dU/dr \leq 0$  の領域から、全域  $dU/dr > 0$  となる領域へ移行することがわかる。従来、後者については実験的に明らかにされており、 $U \sim r^{\alpha}$  の仮定<sup>2),3)</sup> が用いられている。一方、前者については実証されてないが、「一湾曲部の流れで  $U$  分布は自由渦的な分布から、強制渦的な分布へ移行する。」という従来の定説で、その遷移領域に相当すると考えられる。しかし、その領域で一様な二次流が存在するかは疑問であって、急激な湾曲部における剝離限界および二次流の発達に関する詳細な実験的検討が必要であろう。

##### (a) $U$ の最大値および最小値

全域  $dU/dr > 0$  となる限界の  $\alpha (= \alpha_0)$  を(17)式および  $|t - \alpha| \leq 1/2$  から求めると、

$$4(\alpha_0 - 1/2)^6 = \alpha_0(\alpha_0^2 + 1/40)(\alpha_0^2 - 1/4)$$

より  $\alpha_0 \approx 2.36$  となる。したがって、 $0.5 < \alpha < 2.36$ 、 $2.36 \leq \alpha$  の範囲に分けて最大値および最小値を定めることができる。

(i)  $0.5 < \alpha \leq 2.36$ ;  $U$  の最小値(6)式および(7)式を用いて、

$$U_{\min} = -\frac{giB^2}{3C_1} \left\{ t_0^3 + \alpha \sqrt{\left( \alpha^2 + \frac{1}{40} \right) \left( \alpha^2 - \frac{1}{4} \right)} \frac{1}{t_0} \right\} \quad (19)$$

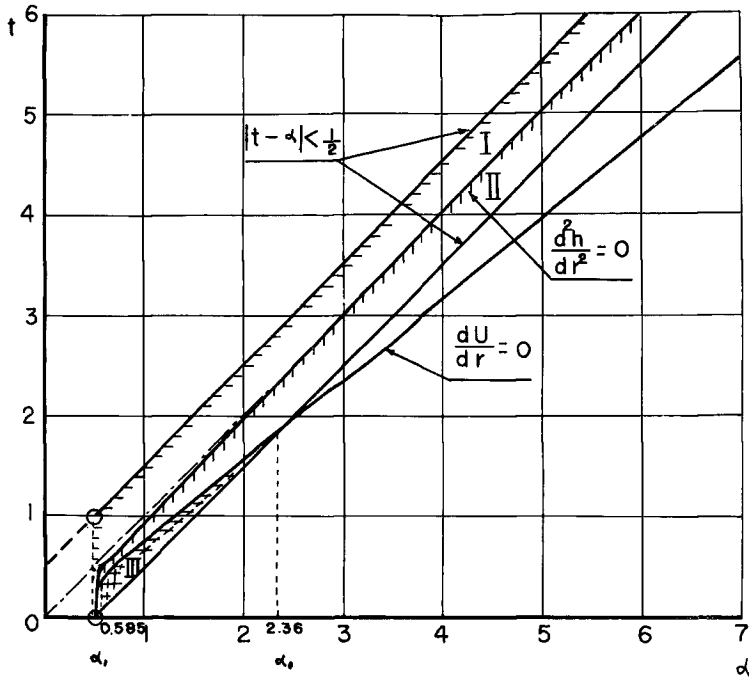


Fig. 2 Characteristic curves of  $dU/dr=0$  [Eq.(17)] and  $d^2h/dr^2=0$  [Eq. (18)]. ( $\alpha=r_0/B$ ,  $t=r/B$ )

Region I ;  $\frac{dU}{dr} > 0$ ,  $\frac{d^2h}{dr^2} > 0$       Region II ;  $\frac{dU}{dr} > 0$ ,  $\frac{d^2h}{dr^2} < 0$

Region III ;  $\frac{dU}{dr} < 0$ ,  $\frac{d^2h}{dr^2} < 0$ ,

ただし、 $t_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha^2(\alpha^2 + 1/4)(\alpha^2 - 1/4)}/4$

で表わされる。U の最大値は外岸あるいは内岸に存在し、まず、内、外岸の流速  $U_1 = U_2$  となる  $\alpha_1$  を求めると、

$$U_2 - U_1 = \frac{C_2}{12(\alpha_1^2 - 1/4)B} \left\{ 8 \frac{\alpha_1^2 - 1/4}{\sqrt{(\alpha_1^2 + 1/4)(\alpha_1^2 - 1/4)}} - 4 \right\} = 0$$

より、 $\alpha_1 = 0.585$  となる。したがって、最大値は

$$0.5 < \alpha \leq 0.585 ; U_{max} = U_1 = \frac{giB^2}{3C_1} \left\{ \frac{(\alpha - 1/2)^3 + \alpha \sqrt{(\alpha^2 + 1/4)(\alpha^2 - 1/4)}}{\alpha - 1/2} \right\} \quad (20)$$

$$0.585 \leq \alpha \leq 2.36 ; U_{max} = U_2 = \frac{giB^2}{3C_1} \left\{ \frac{(\alpha + 1/2)^3 + \alpha \sqrt{(\alpha^2 + 1/4)(\alpha^2 - 1/4)}}{\alpha + 1/2} \right\} \quad (21)$$

で与えられる。

(ii)  $2.36 \leq \alpha$  ; この範囲では明らかに最大値は(21)式、最小値は(20)式で与えられる。しかし、 $\alpha$  の大きい場合に(14)式の  $C_1$  と  $C_2$  との関係は

$$C_1 C_2 = \frac{g i r_0^2}{3} \left\{ 1 - \frac{9}{80\alpha^2} - \frac{1}{640\alpha^4} - O\left(\frac{1}{\alpha^5}\right) \right\}$$

と展開されるから、 $\alpha$  の範囲によって、

$$2 \leq \alpha < 5; C_1 C_2 \doteq \frac{g i r_0^2}{3} \left( 1 - \frac{9}{80\alpha^2} \right) \tag{14}'$$

$$\alpha \geq 5; C_1 C_2 \doteq g i r_0^2 / 3 \tag{14}''$$

と近似することができる。したがって、(20)式および(21)式より、

$$2 \leq \alpha < 5; U_{\min} = U_1 \doteq \frac{g i B^2}{3 C_1} \left\{ \left( \alpha - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{\alpha(\alpha^2 - 9/80)}{(\alpha - 1/12)} \right\} \tag{22}$$

$$U_{\max} = U_2 \doteq \frac{g i B^2}{3 C_1} \left\{ \left( \alpha + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{\alpha(\alpha^2 - 9/80)}{(\alpha + 1/2)} \right\} \tag{23}$$

$$\alpha \geq 5; U_{\min} = U_1 \doteq \frac{g i B^2}{3 C_1} \left\{ \left( \alpha - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{\alpha^3}{\alpha - 1/12} \right\} \tag{22}'$$

$$U_{\max} = U_2 \doteq \frac{g i B^2}{3 C_1} \left\{ \left( \alpha + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{\alpha^3}{\alpha + 1/2} \right\} \tag{23}'$$

で表わされる。

(b)  $U$  の分布形

水路中心における流速  $U_0$  を基準にして(6)式を無次元化し、(14)式の関係を用いると、流速分布は

$$\frac{U}{U_0} = \frac{t^3 + \alpha \sqrt{(\alpha^2 + 1/40)(\alpha^2 - 1/4)}}{\alpha^3 + \alpha \sqrt{(\alpha^2 + 1/40)(\alpha^2 - 1/4)}} \cdot \frac{\alpha}{t} \tag{24}$$

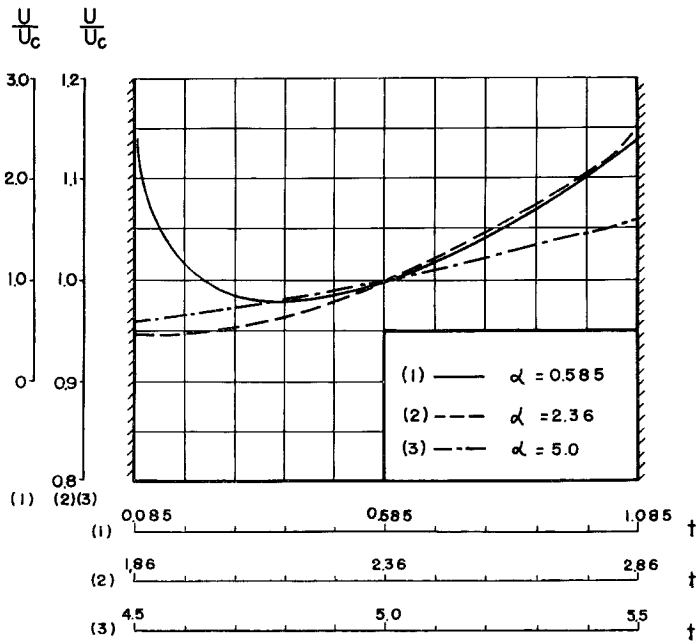


Fig. 3 Typical examples of velocity profiles. [Eq. (24)].



で表わされる。 $\alpha$  の大きい場合について(14)'式および(14)''式の近似を行なうと、(24)式は

$$2 \leq \alpha < 5 ; \frac{U}{U_c} \approx \frac{t^3 + \alpha(\alpha^2 - 9/80)}{(2\alpha^2 - 9/80)t} \quad (24)'$$

$$\alpha > 5 ; \frac{U}{U_c} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\alpha^2} t^2 + \alpha \frac{1}{t} \right) \quad (24)''$$

で与えられる。

いま、 $\alpha = \alpha_0 = 2.36$ ,  $\alpha = \alpha_1 = 0.585$ ,  $\alpha = 5$  の場合について、(24)~(24)''式より分布形を求め図示すると **Fig. 3** のようになる。図より  $dU/dr \approx 0$ ,  $dU/dr \geq 0$ ,  $dU/dr > 0$  の各領域における  $U$  の特性を認めることができる。また、**Fig. 4** に  $U$  の実験値<sup>3), 4), 5)</sup> と比較した一例を示す。理論的  $U$  分布は壁面の近傍を除いてほぼ実験値と一致するが、一般に一般的な二次流域を把握することが困難なために、現状では理論の適合性を十分に判定できない。

(4.2)  $h$  の特性

**Fig. 2** から明らかなように、水面の曲率は  $\alpha > 1/2$  の全領域で  $d^2h/dr^2 \approx 0$  となり、内岸から外岸へ凸水面から凹水面へと変化することがわかる。その限界となる変曲点の境界線は  $\alpha \geq 5$  でほぼ水路の中心線と一致する。従来、考えられている自由渦的な  $h(r)$  の特性は  $d^2h/dr^2 < 0$  であり、強制渦的な特性は  $d^2h/dr^2 > 0$  であって、上の考察結果はこれらが合成された特性を示している。

a)  $h$  の形状

水面形は(7)式および(14)式を用い、水路中心の水深  $h_c$  を基準にして表わすと、

$$\frac{h-h_c}{B} = \frac{gi^2B^3}{36C_1^2} \left[ -\alpha^4 + 2\left(\alpha^2 + \frac{1}{40}\right)\left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right) - 8\alpha^2 \sqrt{\left(\alpha^2 + \frac{1}{40}\right)\left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)} + \left\{ t^4 - 2\alpha^2\left(\alpha^2 + \frac{1}{40}\right)\left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{t^2} + 8\alpha \sqrt{\left(\alpha^2 + \frac{1}{40}\right)\left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)} t \right\} \right] \quad (25)$$

となる。また、 $U$  分布と同様に  $\alpha$  の大きい値について、(14)式および(14)''式の近似を行なうと、

$$2 \leq \alpha < 5 ; \frac{h-h_c}{B} \approx \frac{gi^2B^3}{36C_1^2} \left[ -7\alpha^4 + \frac{9}{10}\alpha^2 + \left\{ t^4 - \left(2\alpha^6 - \frac{9}{20}\alpha^4\right) \frac{1}{t^2} + 8\left(\alpha^3 - \frac{9}{80}\alpha\right)t \right\} \right] \quad (25)'$$

$$\alpha \geq 5 ; \frac{h-h_c}{B} \approx \frac{gi^2B^3}{36C_1^2} \left\{ -7\alpha^4 + \left( t^4 - 2\alpha^6 \frac{1}{t^2} + 8\alpha^3 t \right) \right\} \quad (25)''$$

で表わされる。

いま、 $\alpha = \alpha_0 = 2.36$ ,  $\alpha = \alpha_1 = 0.585$ ,  $\alpha = 5$  の場合について、それぞれ  $C_1 = 10^2$ ,  $C_1 = 10$ ,  $C_1 = 10^{5/2}$  とし、 $g = 980 \text{ cm/sec}^2$ ,  $i = 2 \times 10^{-3}$ ,  $B = 25 \text{ cm}$ . の条件を用いて(25)~(25)''式から水面形を求め図示すると、**Fig. 5** のようになる。 $\alpha$  の小さい場合は水面の曲率変化が明瞭であるが、通常、観察される  $\alpha$  の大きい場合は極めて微妙に変化し、実験的検証には高精度の測定が必要と考えられる。また、**Fig. 6** に水位差を基準とし

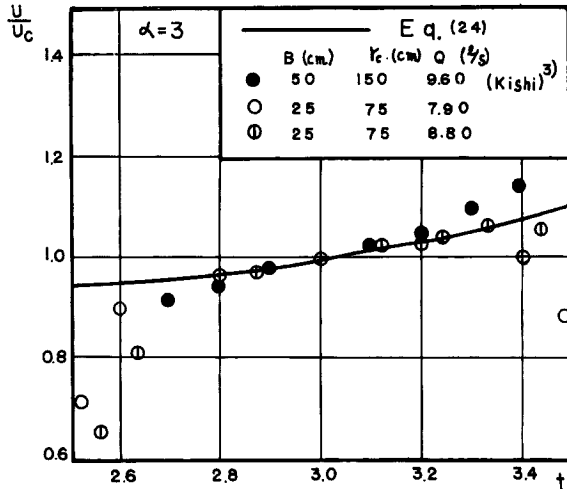


Fig. 4 Comparison between theoretical velocity profile and experimental data.

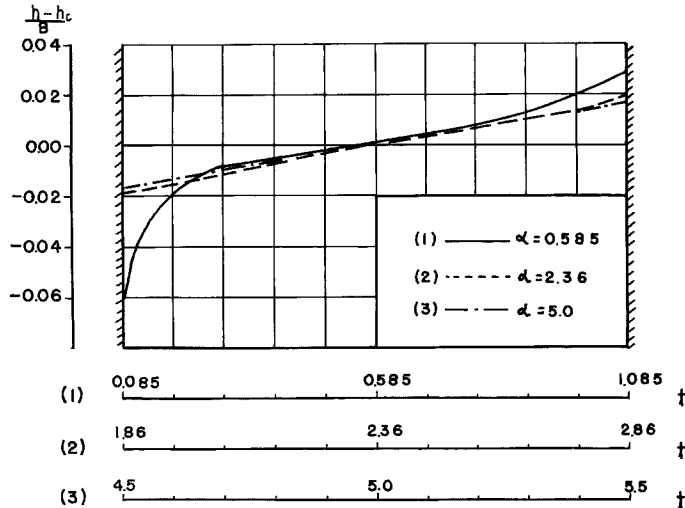


Fig. 5 Typical examples of water surface profiles [Eq. (25)]  
 ( $g=980\text{cm/sec}^2$ ,  $i=2 \times 10^{-3}$ ,  $B=25\text{cm}$ ).

て  $C_1$  を決定し、実験値<sup>3),6)</sup>と比較した結果が示されている。 $\alpha=1\sim 4$ の各ケースについて、実験値が理論的の水面形と実験精度内ではほぼ一致することが認められる。しかし、上述のように中心部での曲率変化を把握することは困難と思われる。

(b) 水位差  $\Delta h$

内岸、外岸の水位差は(8)式および(14)式から

$$\left[\Delta h\right]_{r_1}^{r_2} = -\frac{g i^2 B^4}{9C_1^2} \alpha \left\{ 2\alpha^2 + \alpha \sqrt{\left(\alpha^2 + \frac{1}{40}\right) \left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)} + \frac{11\alpha^2}{40(\alpha^2 - 1/4)} + \frac{1}{4} \right\} \quad (26)$$

と表わされる。また近似式は

$$2 \leq \alpha < 5 ; \left[\Delta h\right]_{r_1}^{r_2} = -\frac{g i^2 B^4}{9C_1^2} \alpha \left( 3\alpha^2 + \frac{11}{20} \right) \quad (26)'$$

$$\alpha \geq 5 ; \left[\Delta h\right]_{r_1}^{r_2} = -\frac{g i^2 B^4}{3C_1^2} \alpha^3 \quad (26)''$$

と与えられる。

以上、上層部の流れについて、新たな基礎式を提示し、二次流の効果および流れの特性を考察したが、その詳細な実験的検討は今後に残された問題である。

3. 下層部の流れに関する考察

本節では、まず下層部の流れの特性と解析上の問題点を明らかにし、それに基づいて新たな二つの解析方法を提示し、検討を加える。

(1) 解析上の問題点

下層部の流れは水路底面のせん断応力の影響を直接受ける領域で鉛直方向 ( $z$ ) の流速変化を無視できない。従来、静水中で回転する円板における流れの特性を記述するのに、三次元境界層としての取り扱いがなされており、閉水路、開水路の弯曲部の流れについてもこの概念ならびに解析法が演用<sup>1),2),3),8)</sup>されている。

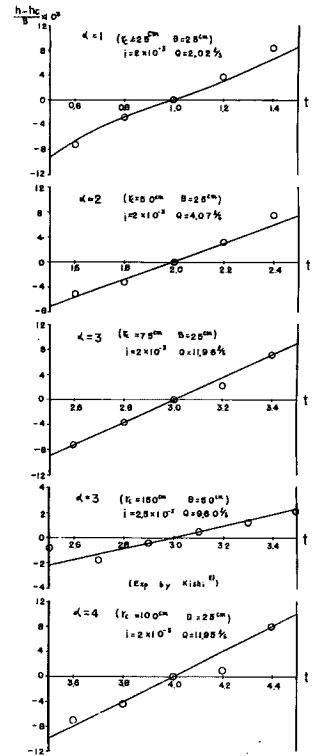


Fig. 6 Comparison between theoretical surface profiles and experimental data.

る。回転円板上および彎曲部の流れはともに上層と下層の判別が比較的明瞭な現象であるが、後者では前者に比して上層の流れの場が限定されている場合が多い。したがって、彎曲部の流れでは上層と下層の相互作用が大きく、上、下層の流れの連続関係、力学的相互干渉の効果を無視することができない。しかし、2.(3)で述べたようにこれらの相互作用を解明することは至難であって、ここでは一応、連続関係だけを用いて考察する。

解析に際して、上層と下層との境界および下層の流れを決定する条件式について検討しよう。まず、上層と下層の境界としては、従来、半径方向の流速成分(二次流)の方向が逆転する面を選定している。しかし、その面上で上層部の流速は有限値をもち、下層部の流速は0であって不連続となる。したがって、境界として流速の転向面をとるのは矛盾しており、上層の  $V(r)$  を考慮する限り、 $V(r)$  に接続する境界面を境界にとるべきと考える。すなわち、境界面  $z=\delta$  で、 $v=V(r)$ 、 $dv/dz=0$  の条件が必要である。

一方、下層の流れを決定する条件式としては、

(a) 上、下層の流れの連続関係

(b) 下層の流れの半径方向および接線方向の運動量の関係

の三つを挙げることができる。したがって、(a)だけを考慮する場合には一つの物理変量、(a)および(b)を考慮する場合には三つの物理変量を選定しなければならない。

以上の検討によって、下層部の流速分布形の仮定および物理変量の選定についての自由度を除いて解析の方向が定まる。

本節では次項以下において、つぎの二つの解析法を検討する。

(I) 最も単純に、本質的な(a)の条件だけを考慮し、変量として下層部の厚さ  $\delta(r)$  を選定し、下層部の流速分布は相似と仮定する。

(II) (a)および(b)の条件を考慮し、変量として、下層部の厚さ  $\delta(r)$ 、半径方向の最大流速  $v_0(r) < 0$  および最大流速を生ずる位置  $\delta_0(r)$  を選定する。

なお、従来においては、(b)の条件を用いた場合<sup>1)</sup>あるいは(a)および(b)の条件を用いた場合<sup>2),8)</sup>ともに、 $\delta(r)$ 、 $v_0(r)$ の二つが選定されているが、後者の解析法では変量が一つ不足しているように思う。

(2) 下層部の流れの解析 (I)

上述の(I)の条件に基づいて、下層部の流れの流速分布を考える。まず、前述の上、下層の流速分布の連続性を加味して、境界条件をつぎのように与える。

$$(i) \quad z=0; \quad u=0, \quad v=0$$

$$(ii) \quad z=\delta_1(r); \quad v=0$$

$$(iii) \quad z=\delta(r); \quad u=U(r), \quad du/dz=0, \quad v=V(r), \quad dv/dz=0$$

ここで、 $z$  は鉛直方向の座標、 $u(r, z)$ 、 $v(r, z)$  はそれぞれ下層部の接線方向および半径方向の流速、 $\delta_1(r)$  は  $v=0$  となる点の位置である。いま、 $z/\delta=\eta$  ( $0 \leq \eta \leq 1$ ) とし、境界条件 (i) と条件数を考慮して  $u, v$  をつぎのように仮定する。

$$u(r, z) = U(r)f(\eta) = U(r)(a_1\eta + b_1\eta^2) \tag{27}$$

$$v(r, z) = V(r)g(\eta) = V(r)(a_2\eta + b_2\eta^2 + c_2\eta^3) \tag{28}$$

ここで、 $a_1, b_1, a_2, b_2, c_2$  は定数である。

つぎに、境界条件 (ii) および (iii) から係数を定めると、

$$a_1=2, \quad b_1=-1, \quad a_2=\frac{2\eta_1^2-3\eta_1}{(1-\eta_1)^2}, \quad b_2=\frac{3-\eta_1^2}{(1-\eta_1)^2}, \quad c_2=\frac{\eta_1-2}{(1-\eta_1)^2}$$

となる。ここで、 $\eta_1=\delta_1/\delta$  であって、前述の接続条件より  $\eta_1 \neq 1$  である。

一方、(a)の上、下層流れの連続条件は

$$V(h-\delta) + \int_0^\delta v dz = 0 \tag{29}$$

で与えられる。v に(28)式を用い、V に(5)式を用いると、 $h(r)$ 、 $\delta(r)$  の関係は

$$\delta(r) = \frac{1}{1-g_1(\eta_1)} h(r) \tag{30}$$

$$g_1(\eta_1) = \int_0^1 g(\eta) d\eta = \frac{8\eta_1^2 - 15\eta_1 + 6}{12(1-\eta_1)^2} \tag{31}$$

と表わされる。ここで、v 分布が相似という (I) の仮定によって、 $\eta_1$  および  $g_1(\eta_1)$  は定数とみなせる。 $\eta_1$  の範囲は(30)式および(31)式で  $h(r) > \delta(r)$  を考えると、 $g_1(\eta_1) < 0$  すなわち、 $1 > \eta_1 > 0.577$  となる。 $\delta/h$  と  $\eta_1$  との関係を図示すると **Fig. 7** のように表わされる。また、下層部の半径方向の流速が最大となる位置  $\eta_0$  は(28)式および  $0 \leq \eta_0 < 1$  を考慮して、

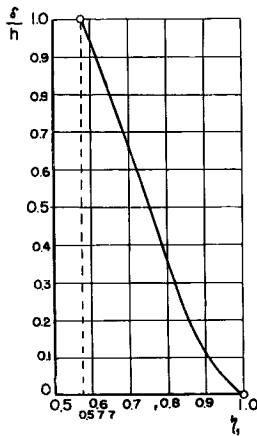


Fig. 7 Relation between  $\delta/h$  and  $\eta_1$ .

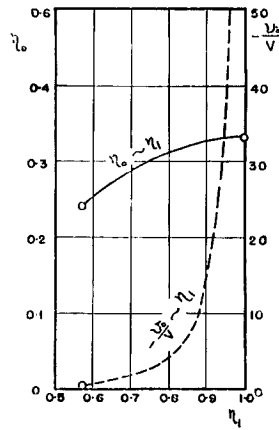


Fig. 8 Relation between  $\eta_0$  and  $\eta_1$ ,  $v_0/V$  and  $\eta_1$ .

$$\eta_0 = \frac{\eta_1^2 - 3 + \sqrt{(3 - \eta_1^2)^2 - 3\eta_1(2\eta_1 - 3)(\eta_1 - 2)}}{3(\eta_1 - 2)} \tag{32}$$

となり、最大値  $v_0$  と上層部の流速  $V$  の比は

$$\frac{v_0}{V} = \frac{1}{(1-\eta_1)^2} \{ \eta_1(2\eta_1 - 3)\eta_0 + (3 - \eta_1^2)\eta_0^2 + (\eta_1 - 2)\eta_0^3 \} \tag{33}$$

で与えられる。 $\eta_0 \sim \eta_1$ 、 $v_0/V \sim \eta_1$  の関係を図示すると **Fig. 8** のようになる。

以上、この解析法では  $\eta_1$  を仮定することによって、上層部の  $h(r)$ 、 $V(r)$ 、 $U(r)$  から下層部の  $\delta(r)$ 、 $u(r, z)$ 、 $v(r, z)$  を求めることができる。しかし、下層部の流速分布が相似になるという仮定の妥当性および  $\eta_1$  の特性については実験的に究明すべき問題と考えられる。

(3) 下層部の流れの解析 (II)

前述の (II) の仮定に基づいて、下層部の流速の境界条件は

(i)  $z=0$  ;  $u=0, v=0$

(ii)  $z=\delta_0(r)$  ;  $v=v_0, dv/dz=0$

(iii)  $z=\delta(r)$  ;  $u=U(r), du/dz=0, v=V(r), dv/dz=0,$

となる。 $z/\delta=\eta$  とすると、 $u$  分布は(27)式と同様で

$$u(r, z) = U(r)\varphi(\eta) = U(r)(2\eta - \eta^2) \quad (34)$$

となり、 $v$  分布は前と同様に三次式

$$v(r, z) = V(r)\psi(r) = V(r)(a_3\eta + b_3\eta^2 + c_3\eta^3) \quad (35)$$

が仮定される。境界条件 (ii) および (iii) を考慮して  $a_3, b_3, c_3$  を決定すると、

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1}{\eta_0^2(1-\eta_0)^2} \left\{ \eta_0^4 + (3\eta_0^2 + 2\eta_0) \frac{v_0}{V} \right\} \\ b_3 &= \frac{1}{\eta_0^2(1-\eta_0)^2} \left\{ -2\eta_0^3 + (1-3\eta_0^2) \frac{v_0}{V} \right\} \\ c_3 &= \frac{1}{\eta_0^2(1-\eta_0)^2} \left\{ \eta_0^2 + (2\eta_0 - 1) \frac{v_0}{V} \right\} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\eta_0 = \delta_0/\delta$  で、 $v_0(r) \equiv V(r)$  から  $\eta_0 \equiv 1$  である。

一方、前述の (a) の条件は(29)式から

$$V(h-\delta) + m_1\delta V = 0 \quad (36)$$

で与えられる。(b) の条件は円筒座標系を用いた境界層の運動量方程式に上層部の流れの基礎式(1)式~(3)式を適用すると、接線方向および半径方向の運動量の関係はそれぞれつぎのように表わされる。

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left\{ r^2 \int_0^\delta (UV - uv) dz \right\} - UV \frac{dh}{dr} = -\frac{1}{\rho} \int_0^\delta \frac{\tau_\theta}{\rho} dz \quad (37)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \int_0^\delta (V^2 - v^2) dz \right\} - \frac{1}{r} \int_0^\delta (U^2 - u^2) dz - V^2 \frac{dh}{dr} = -\frac{1}{\rho} \int_0^\delta \frac{\tau_r}{\rho} dz \quad (38)$$

これらの式において従来用いられている運動量式と異なるところは、前述のように  $z = \delta$  面上で上層と下層の流速分布が接続するという条件および上層の流れの基礎式で  $V$  成分が加味されている点にある。すなわち、(37)式の左辺で  $UV$  を含む項、(38)式で  $V^2$  を含む項が加わっている。ここで、流水中のせん断応力  $\tau_\theta$  および  $\tau_r$  に層流の条件を用い、 $u, v$  に(34)式および(35)式を代入すると、(37)式および(38)式はそれぞれつぎのように表わされる。

$$\left\{ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 UV m_2 \delta) - UV \frac{dh}{dr} = m_3 \nu \frac{U}{\delta} \right. \quad (39)$$

$$\left. \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r V^2 m_4 \delta) - m_5 \frac{U^2}{r} \delta - V^2 \frac{dh}{dr} = m_6 \nu \frac{U}{\delta} \right. \right. \quad (40)$$

(39)式、(39)式および(40)式で  $m_1 \sim m_6$  は

$$m_1 = \int_0^1 \psi d\eta = m_1(\eta_0, v_0), \quad m_2 = \int_0^1 (1 - \varphi \psi) d\eta = m_2(\eta_0, v_0)$$

$$m_3 = (d\varphi/d\eta)_{\eta=0} = 2, \quad m_4 = \int_0^1 (1 - \psi^2) d\eta = m_4(\eta_0, v_0)$$

$$m_5 = \int_0^1 (1 - \varphi^2) d\eta = 7/15 \quad m_6 = (d\psi/d\eta)_{\eta=0} = m_6(\eta_0, v_0)$$

であって、 $m_3, m_5$  は定数、 $m_1, m_2, m_4, m_6$  は、 $\eta_0, v_0$  の関数である。

結局、(a)、(b) の条件は(39)式、(39)式、(40)式の三式で表わされ、これらの式においては  $U(r), V(r), h(r)$  は既知関数、 $\delta(r), \eta_0(r), v_0(r)$  は未知関数である。したがって、条件式の数は満足される。しかし、これらの式を一般に解くことはできなく、現象に準じた近似解法を用いる必要があると思う。

以上、(2)、(3)では層流場を対象として流速分布およびせん断応力の関数を仮定したが、乱流場においても指数則を適用すれば同じ手法で解析を行なうことができる。今後、下層部の現象実体を把握し、上述の解析法に詳細な検討を加えたいと思う。

#### 4. 結 言

本研究では彎曲部流れの水理学的特性を明らかにする一端として、流れ方向に一様な二次流の存在する上層部および下層部の流れについて考察を行なった。

本文の内容を要約すると、まず、上層部の流れに関して二次流の成分を加味した基礎式を提示し、主流に及ぼす二次流の効果および上層部の流れの特性を検討した。その結果、二次流の存在する彎曲部の流れの特異性が明らかとなり、流速の極値および水面形の変曲点と彎曲部の曲率との関係を把握することができた。つぎに、下層部の流れに関して、従来、看過されている解析上の問題点を指摘し、新たな二つの解析法について検討を加えた。

なお、本論文では、理論の適用性について詳細な考察を行なうことができなかったが、今後、二次流の総合的な把握とともに実現象との関連について詳細に検討したいと思う。

最後に、本研究の計算ならびに図面作製に助力いただいた防災研究所の真島克之君に謝意を表する。

#### 参 考 文 献

- 1) 岩垣雄一；河川彎曲部の底面における流れ，応用水理学中I，丸善出版，昭.33，p.p. 78-80.
- 2) Einstein<sup>†</sup> H. A. and Harder J. A. ; Velocity Distribution and the Boundary Layer at Channel Bends, Trans. AGU, vol. 35, No. 1 (1954) p.p. 114-120.
- 3) 岸力，小川芳昭；開水路彎曲部の二次流に関する研究，土木学会第7回水理講演会講演集，昭37.10，p.p. 71-76.
- 4) 村本嘉雄，石田真一；彎曲部水流の水理学的特性に関する研究（その2），土木学会第18回年次学術講演会講演概要，昭38.5，p.p. 27-28.
- 5) 石田真一；彎曲流に関する研究，京大卒業論文，昭37.2.
- 6) 村本嘉雄，石田真一；開水路彎曲部の水理学的特性の研究（その3），土木学会関西支部年次学術講演会講演概要，昭38.11，p.p. 41-42.
- 7) 井上喬之；開水路二次流に関する研究，京大卒業論文，昭38.2.
- 8) Barua S. N. ; On Secondary Flow in Stationary Curved Pipes, Quart. J. Mech. & Appl. Math., vol. XVI, Part 1 (1963) p.p. 61-77.