高さ方向風速分布に関する一考察

石　崎　溌　雄

A THEORETICAL TREATMENT ON THE VERTICAL DISTRIBUTION OF WIND

By Hatsuo ISHIZAKI

Synopsis

It is difficult to discuss theoretically the complicated problem on the vertical distribution of wind, but important for the engineering, especially for the wind force upon taller structures, to supply the shortcomings of observations. Here the dynamical equation on the wind profile is obtained, considering the Coriolis force together with the assumption used in the boundary layer theory. The solution of the equation will be applicable to wind in the stationary and neutral state alone, but in some cases it will be better approximation to the natural wind than Ekman's spiral or other theories.

高い構造物がつくられるようになると，高さの方向に風速がどのように増していくか，風向がどのように変化するかという問題は，耐風設計上きわめて重要である。このために，古くから種々の実験式が提案されている。現在，実用上もっとも広く用いられているのは指数則，あるいはべき法則と呼ばれる式で，任意の高さ z における風速 V を次式で表わす。

$$V=V_0\left(\frac{z}{z_0}\right)^{1/n}$$

ここに　z_0：基準とする高さ

V_0：高さ z_0 における風速

n：定数

定数 n は観測資料にもとづいて定められるが，上式はまったく経験的に求められたものであって，過去に観測の行なわれた高度までについては，ほぼよい結果を与えるにしても，それより高い高度についてまで，この式を適用することに関しては明確な保証がない。また n の値は，地表のおうとつが大きく，風の摩擦が大きいときには比較的小さくなり，地表面が滑らかなときは大きくなるという傾向は知られているけれども，地形との関係については明らかでない。構造物の高さがますます増している今日，この問題を理論的に究明することも重要であると考えられる。

しかしながら，風速の分布は上述の地形や地表面の粗さばかりでなく，大気の安定度にも関係し，しかも通常は定常的でないと考えられるから，これを理論的に取り扱うことがきわめて困難である。したがって理論的研究は少ないけれども，その主なものは境界層内の流れの乱れを考えて Prandtl が求めた対数法則と呼ばれる式と，コリオリ力と高さ方向の風速差にもとづく粘性力および気圧差だけを考慮して得られる Ekman 螺線と呼ばれるものの2つがあるに過ぎない。最近これらの考え方を多少修正し，あるいは拡張したものとして，Elliot (1958) Blackader (1962), Panofsky (1963), Benton (1963) 等の研究があるけれども，必らずしもこれらの研究が事実をすべて説明しているようには思えない。これらの理論の多くは，空気

の運動による慣性力による項を無視しているからである。以下に取扱ったものも，定常的な，また大気の中立的な場合に相当し，乱れの問題はまったく考慮していないけれども，地上からある高さ以上の風速分布を説明できるように思われたので運動方程式を導いてみた。

x, y 軸を水平面内に，z 軸を鉛直にとり，それぞれの方向の速度成分を u, v, w とする。Navier-Stokes の運動方程式に境界層の理論で用いられる仮定を導入し，コリオリ力による項をつけ加えると方程式は次のようになる。

$$-fv+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \cdots\cdots(1)$$

$$fu+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad \cdots\cdots(2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=0 \quad \cdots\cdots(3)$$

ここに f はコリオリ因数，ρ は空気の密度，p は圧力，ν は空気の動粘性係数である。

y 軸を等圧線に平行にとると

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0$$

とおくことができ，地衡風を v_g で表わすと

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=fv_g$$

となる。また u, v が x に無関係と仮定すれば，(1)，(2) 式は，

$$-fv+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-fv_g+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \cdots\cdots(1')$$

$$fu+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=\nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad \cdots\cdots(2')$$

連続の方程式は

$$\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad \cdots\cdots(4)$$

であるから，流れの関数に相当するものを ψ とすれば

$$v=\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w=-\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

である。よって通常の解法により

$$\zeta=\frac{z}{2}\sqrt{\frac{v_g}{\nu y}}, \qquad \psi=\sqrt{\nu y v_g}F(\zeta) \quad \cdots\cdots(5)$$

とおくと

$$v=\frac{1}{2}v_g F', \; w=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu v_g}{y}}(\zeta F'-F), \; u=\frac{v_g{}^2}{8fy}(F'''+FF'') \quad \cdots\cdots(6)$$

ここに $'$ は ζ による微分を表わす。(6) を (1′) に入れると

$$\frac{d^2}{d\zeta^2}(F'''+FF'')+\frac{d}{d\zeta}F(F'''+FF'')+F'(F'''+FF'')+a^2(F'-2)=0 \quad \cdots\cdots(8)$$

ここに

$$a=\frac{4fy}{v_g}$$

y がさほど大きくないときには近似的に，$\alpha=0$ とおくことができる。そのような場合，（8）式の解を求めるには，解を ζ のべき級数におく。

ζ の小さい値の範囲においては

$$F_1=\sum^n A_n\zeta^n \quad\cdots\cdots(9)$$

ζ の大きい値の範囲では

$$F_2=\sum^n C_n\zeta^n \quad\cdots\cdots(10)$$

境界条件を

$z=0$ において $u=v=0$

$z=\infty$ において $v=v_g$

とすると，はじめの条件から

$$A_0=A_1=A_3=0$$

（9），(10) 式を微分方程式（8）に入れて係数 A_n, C_n の関係を求めると解は次の形になる。

$$F_1=A_2\zeta^2+A_4\zeta^4-\frac{1}{30}A_2{}^2\zeta^5-\frac{4}{35}A_2A_4\zeta^7+\quad\cdots\cdots(11)$$

$$F_2=2\zeta+C_0+C_1\zeta^{-1}-\frac{1}{2}C_0C_1\zeta^{-2}+\frac{1}{4}(2C_1+C_1{}^2+C_0{}^2C_1)\zeta^{-3}$$
$$-\frac{1}{8}(6C_0C_1+3C_0C_1{}^2-C_0{}^3C_1)\zeta^{-4}+\quad\cdots\cdots(12)$$

ζ の適当な値で F_1 と F_2 が連続となる条件，すなわち

$$F_1=F_2,\ F_1'=F_2',\ F_1''=F_2'',\ F_1'''=F_2'''$$

なることを用いれば，係数 A_2, A_4, C_0, C_1 が求まり解を決定できる。ただし，F_1, F_2 ともこれらの係数に関し非線型であるから，項の数を多くとると計算はやや面倒である。

以上の解は一様な速度をもつ風が，ある点から平板状の境界をもつ領域に入った場合，風速分布がどのように変わっていくかを示し，これが実際の風のどのような場合に相当するものであるかという問題は，解の数値計算とともに検討していきたい。