

開水路底面摩擦変動スペクトルの測定

余 越 正 一 郎

MEASUREMENTS OF SPECTRA OF TURBULENT WALL SHEAR IN OPEN CHANNEL FLOW

By Shōitirō YOKOSI

Synopsis

Studies on the effects of a turbulent wall shear are becoming to be required in the fields of hydraulics. This paper presents the power spectra of the wall shear fluctuations computed from directly measured bottom shear in an open channel. The obtained spectra show that there exists two regions in which the spectral laws of shear are k^3 and k^9 in a lower wave number range, where k is the wave number. It seems that the spectral laws of shear k^3 and k^9 correspond to the spectral laws of energy k^1 and k^4 in a theory of isotropic turbulence, respectively.

1. ま え が き

一般の開水路の流れにたいする最大の抵抗はなんといっても水路床および側壁のせん断摩擦力すなわちいわゆる wall shear とよばれるもので、その効果は平均速度分布にも顕著にあらわれている。wall shear はこのように流れ自体にたいしても大きな影響力をもっているが、一方立場をかえてみれば水理構造物の表面浸食や移動床における土砂の掃流の問題等その関与するところは広い。

従来水理学の分野ではこの wall shear の効果を評価するためには主として平均水面こう配とか平均速度分布といったものにより定常流れのかなり広い範囲の平均の摩擦抵抗を求めて抵抗係数や粗度係数などに結びつけていたが、最近この分野でも種々の要求からかなり局所的な shear の値の実測がおこなわれる傾向になってきている。例えば Preston の方法により開水路断面内の wall shear の分布をしらべて側壁の効果を研究せんとした松下の報告¹⁾や、緩こう配流れの抵抗則を解明する一手段として開水路床上の shear の測定装置を作ったわれわれの報告²⁾などがある。これらのものはいずれも時間について平均した値を取り扱っているが、かなり局所的な wall shear を対象にするときに当然起ってくる問題は、その変動成分の性質である。

われわれが対象とする流れがほとんど乱流であることを考えると、平均的な水理量を求める研究から一歩進んで流れの種々の変動量に着目してその性質や平均値との間の関係を研究することも必要となってくる。実際的な例をあげると拡散の問題、土砂の浮遊掃流の問題、水理構造物におよぼす振動の問題など数多くある。このような観点からわれわれも wall shear というものの機構を調べてこれが流れに、あるいは壁面に およぼす効果を研究しようとする。

さて、wall shear もまた他の乱流量と同じように平均値と変動成分の和としてあらわすことができるが、wall shear の変動成分の統計的な性質に関する研究はまだみないようである^{注1)}。wall shear の変動の統計的な性質は wall に接して移動する乱子の運動のあらわれであるとみると、幅の広い開水路の流れには水深により大きさを制限された最大乱子や分子粘性により制限された最小乱子その他種々の階級の乱子が含まれ

しており、そのおのおのが shear の変動を起しているものと考えられる。このように考えると wall shear の変動は一つの帯スペクトルを形成するであろう。このような wall shear のスペクトルの研究は wall shear の構造に関するわれわれの知識を深めるばかりでなく、ひろく乱流境界層の構造とその中で起る種々の乱流現象に関する知識を深めるうえにも重要な価値をもつものと思われる。

wall shear のスペクトルの研究といっても理論的なことは現在のところほとんど望めないで結局測定をするわけであるが、その装置としては1963年にわれわれが開発した²⁾ものを利用する。この装置自体は平均値を対象にして作ったものであるから、こまかい変動を扱うには必ずしも十分ではないが測定範囲を制限して使えば大した不都合はないものと思う。以下その測定と計算の手順ならびに結果を記す。

2. 測定装置

(1) 構造：受感部は流れ方向に 15 cm, 横方向に 6 cm の平板で、Fig. 1 にみるように水中につり下げられていてちょうど水路床の一部をこの平板で置きかえたかこうになっている。shear による受感部の微小な水平変位は差動変圧器により検出する。この装置の特徴は受感部の変位にさいして機械的な摩擦部分がないために微小な wall shear を測定できることで、 0.01 dyn/cm^2 ($u_* = 0.1 \text{ cm/sec}$) ぐらいの力も十分測定することができる。また感度の調節が自由で、そのうえ wall shear と受感部の変位の間、さらに差動変圧器の core の変位と電圧出力の間にも完全なリニアリティがある。受感部の水平変位 x (cm) と wall shear σ_0 (dyn/cm^2) の間には

$$\sigma_0 = 9.20 x \dots\dots\dots (1)$$

の関係がある。感度調節は自由であるが、ここではすべて (1) 式の場合のみを使用する。

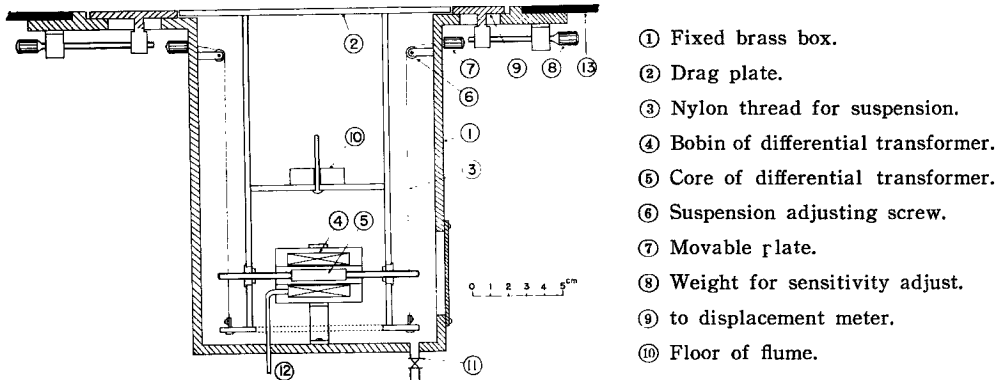


Fig. 1. Sketch of the device.

(2) 動的な特性：受感部の運動に関与する力は外力としての wall shear と差動変圧器の core に働く磁気的な吸引力、それに粘性型の減衰力で、固体摩擦はまったくない。このうち core に働く吸引力は非常に小さいので無視すると²⁾、受感部の運動方程式は次のように置ける。

$$\ddot{x} + 2\epsilon\dot{x} + n^2x = \sigma_0(t) \dots\dots\dots (2)$$

ここに x は中立位置からの受感部の変位、 $\dot{x} = dx/dt$, ϵ, n は正の実定数である。 σ_0 と x の関係はリニアであるために σ_0 の定常偶然変動が x の定常偶然変動を生ずるから、 σ_0 の統計的な挙動を x のそれから決定することができる。

$\sigma_0(t)$ と $x(t)$ のスペクトル関数をそれぞれ $\Sigma(\omega)$, $\Xi(\omega)$ とする。すなわち

$$\Sigma(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \sigma_0(t) \cdot \sigma_0(t+\tau) \rangle e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$\Xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t) \cdot x(t+\tau) \rangle e^{-i\omega\tau} d\tau$$

ここに ω は角振動数である。そうすると両者のあいだには (2) 式から次の関係がみちびかれる³⁾。

$$\Sigma(\omega) = [(n^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2] \Xi(\omega) \dots\dots\dots (3)$$

したがって n と ε を決定すれば $\Sigma(\omega)$ と $\Xi(\omega)$ の関係がわかることになる。水中における受感部の減衰自由振動の記録 (Fig. 2) から計算して^(注3) $\varepsilon = 0.367$, $n^2 = 3.97$, 固有振動数は 0.312 c/s である。(3) 式をグラフにして示したのが Fig. 3 で、共振と減衰の状態がよくわかる。

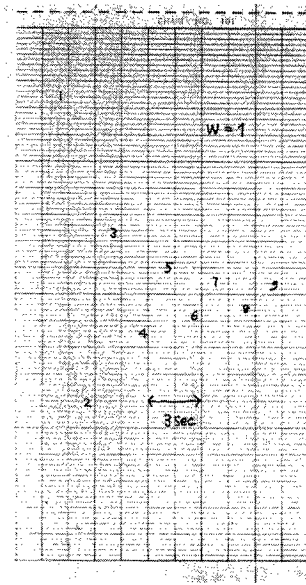


Fig. 2. Free oscillation of sensing element in water. Damping ratio : 1.80, Period of free oscillation : 3.21 sec.

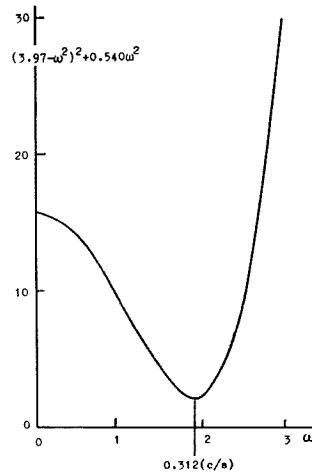


Fig. 3. Relation between spectrum of wall shear and spectrum of displacement of sensing element.

3. 測定と記録の処理

wall shear の測定装置は長さ 39 m, 幅 50 cm, 深さ 20 cm の鉄製可変こう配水路の下流端から $\frac{1}{3}$ の点の水中央部に設置してある。測定は差動変圧器からの出力を変位測定器 ($\pm 5, 2.5, 1.0, 0.5 \text{ mm}/\pm 100 \text{ mV}$) を通して電子管式自動平衡型記録計 (フルスケール $20 \text{ cm}/100 \text{ mV}$) に記録する。記録の 1 例を Fig. 4 に示す。

記録の処理は Fig. 4 のような連続記録を A-D 変換器により一定間隔で読み取り、デジタル化したのち電子計算機 (KDC-1) を用いて Tuckey の方法^(注4),4) で x のパワースペクトルを計算する。これでえられたものをさらに (3) 式の関係で修正して目的とする wall shear のスペクトルを求めることができる。

上記のような記録処理の過程で問題となるのは記録の長さ、すなわち観測平均化時間と最小読み取り間隔である。観測平均化時間は少なくとも最大周期の 10 倍は必要と普通にはいわれている。いま水深を h とすると最大乱子の鉛直方向の大きさは $A_z = h$ で、水平方向の大きさは鉛直方向の 10 倍ぐらゐ⁵⁾ とみれば $A_x =$

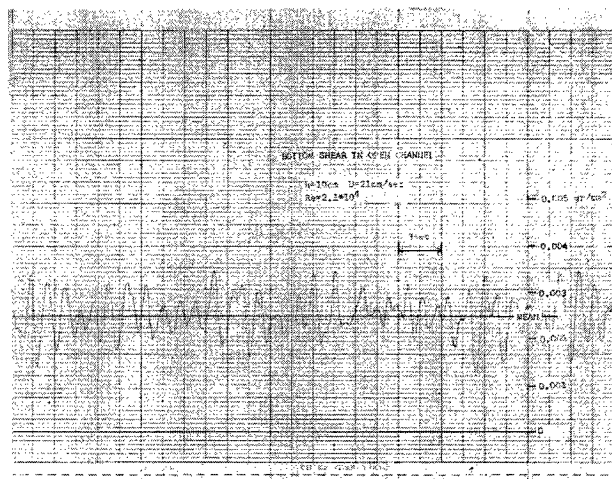


Fig. 4. Example of record of wall shear.

$10h$ となる。しかしこの値は普通の乱流境界層内でいわれていることで、自由表面をもつ開水路流れでは少し様子が違うであろうがここでは大体のオーダーを考えている。このようにみると、この乱子が受感部の上を通過するに要する時間は平均速度を U として $10h/U$ となり、必要な観測平均化時間はその10倍すなわち $100h/U$ である。例えば $h=10\text{ cm}$, $U=20\text{ cm/sec}$ とすれば最小限度1分間の記録は必要である。しかしここで考えなければならないのは、上に述べた値は最大乱子以下の乱子を対象にしたときのものであって、いまはそれよりさらに大きいスケールのものであるのでさらに長い観測時間が必要である。その長さは対象とするスケールがどの程度のものであるかによって大体のところは予想できるであろう。次に最小読み取り間隔であるが、これは少なくとも最小周期の $\frac{1}{2}$ の時間は必要であるといわれている。受感部がとらえうる最小の乱子は、受感部のスケールを L とすればほぼ L の大きさのもので、 L より小さい乱子は存在しても記録にあらわれず、現象はこのスケールで切断されるわけである。長さ L の乱子が受感部の上を通過する時間は L/U で、これが最小周期である。したがって読み取り間隔は $L/2U$ ぐらいで十分である。

記録器は自動平衡型のものであるからその応答速度は決して早いとはいえないが、現在使用中のものは上記の程度の測定にはあまり障害にはならないであろう。

スペクトル計算における相関点の数 m は重要で、Tuckey によれば m はデータ数 N に関して自由度

$$F = \frac{2(N-m/4)}{m}$$

を十分大きくするようにえらばなければならない⁴⁾。普通には $6 < m < 30$ で $F > 30$ である。

4. 測定結果と考察

空間的に固定された受感部がとらえる wall shear の時間的な変動の波形記録はその点を通る乱子の運動のあらわれであるとみられる。開水路流れの中には種々の階級の乱子が存在していて、小さい方では分子粘性によって制限された 1 mm 程度の最小乱子⁽⁵⁾があり、大きい方では水路の寸法によって制限された乱子がある。これらの乱子が平均流速によって流下するために波形記録がえられるわけであるから平均流速は波形を掃引させる役割をするだけである。

ここに2種類の実験結果の一部を述べる。いずれも水深を一定にし、すなわち乱子のスケールにたいする

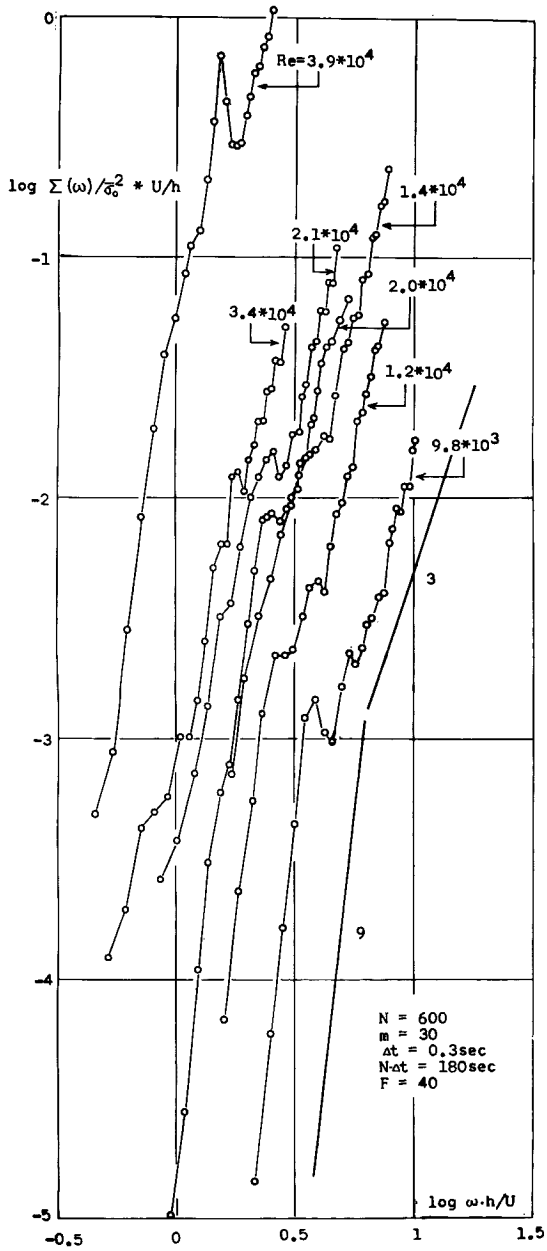


Fig. 5. Nondimensional power spectrum of turbulent wall shear. ($h=10$ cm)

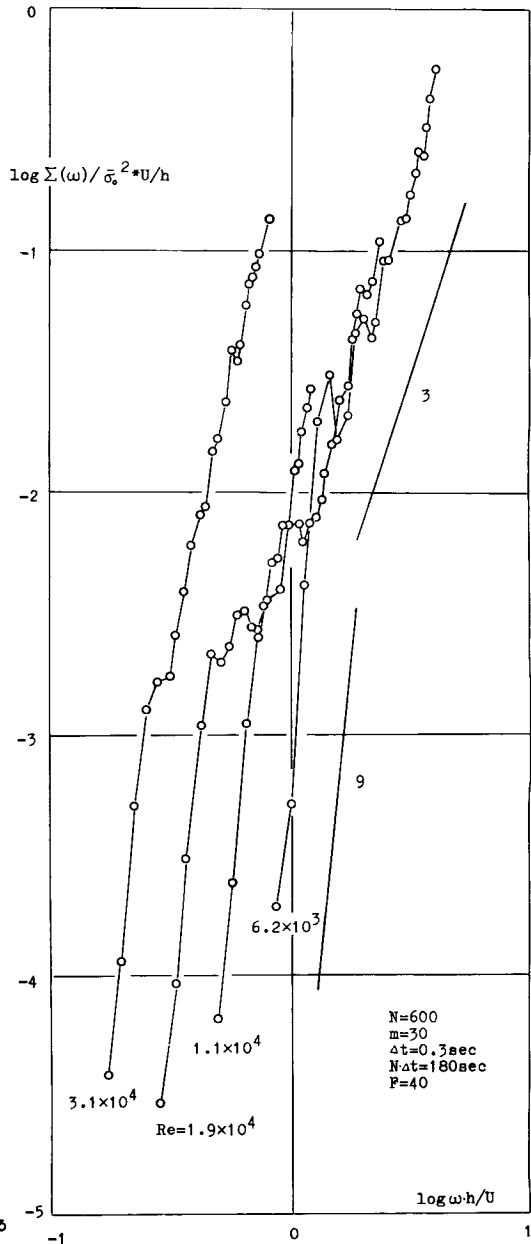


Fig. 7. Nondimensional power spectrum of turbulent wall shear. ($h=5$ cm)

制限を一定にして、平均流速を変化させたものである。

(実験1) 水深 $h=10$ cm (一定)として平均流速 U (実際には簡単のために表面流速で代用した) を $4.6 \sim 51$ cm/sec の間で変化させる。このときの水路こう配は $1/600$ 、レイノルズ数 $Uh/\nu=4.6 \times 10^3 \sim 5.1 \times 10^4$ 、摩擦速度 $u_* = 0.16 \sim 2.7$ cm/sec である。えられた wall shear のパワースペクトルを Fig. 5 に示す。これは3で説明した方法で求めたスペクトルを正規化したのち、乱子の大きさを制限する水深 h とその通過振動数に關係する平均流速 U で無次元化して表示したものである。 $\bar{\sigma}_0$ は wall shear の平均値である。このときの観測時間は 3 min, 読み取り間隔 $\Delta t = 0.3$ sec, サンプル数 $N = 600$, 相関点数 $m = 30$, 自由度 $F = 40$ である。参考のために抵抗係数を Fig. 6 に示す。

(実験2) 水深 $h=5$ cm (一定)とし、平均流速 $U=12 \sim 63$ cm/sec, レイノルズ数 $Uh/\nu=6.2 \times 10^3 \sim 3.1 \times 10^4$ 、摩擦速度 $u_* = 0.46 \sim 2.7$ cm/sec, その他は実験1と全く同じである。その結果を Fig. 7 と Fig. 8 に示す。

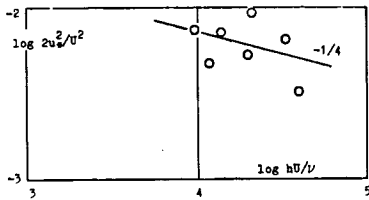


Fig. 6. Resistance coefficient ($h=10$ cm).

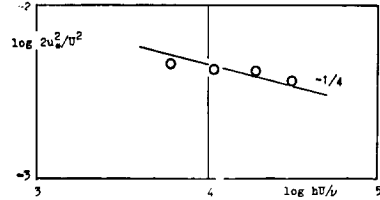


Fig. 8. Resistance coefficient ($h=5$ cm).

Fig. 5 と Fig. 7 をみよ。どのスペクトル曲線も ω^3 と ω^9 の直線に非常に近い傾向をもった2つの部分からなっていることがまずはっきりと目につく。このことは“一般に wall shear の1次元スペクトルの低周波側には ω^3 と ω^9 の成立する領域が存在する”と考えてもいいのではないと思われる。しかし両方の領域の境界点についてみると、Fig. 5 の方ではレイノルズ数の増加にともない図中で左上方へ移行し、Fig. 7 では左下方へ向っている。その理由はよくわからないが代表速度として表面流速を使ったための影響も入っているかもわからない。

さて次にスペクトルの ω^3 と ω^9 について考えてみる。速度変動を種々の階級の乱子速度に分解して考え、shear の変動も乱子の運動に結びつけて考え、 λ を乱子の寸法、 $\sigma_\lambda, \nu_\lambda$ をおのおの階級 λ の乱子の shear と乱子速度として

$$\sigma_\lambda \sim \nu_\lambda^2 \dots\dots\dots (4)$$

とおくことができよう。

一方 $\Sigma(\omega) \sim \omega^3$ から $\sigma_\lambda^2 \sim \omega^4$ となるが、角周波数を ω 波長 λ に変えると $\sigma_\lambda \sim \lambda^{-2}$ となるから (4) の関係を使って

$$\nu_\lambda \cdot \lambda \sim \text{const.} \dots\dots\dots (5)$$

という関係がえられる。これは等方性乱流理論で Kármán と Lin⁶⁾ が最大乱子より大きな乱子の乱流粘性は最大乱子の乱流粘性に等しく保たれるとした仮定と同じ形をしている。また $\Sigma(\omega) \sim \omega^9$ から同様に考えて

$$\nu_\lambda^2 \cdot \lambda^5 \sim \text{const.} \dots\dots\dots (6)$$

がえられる。これもまた等方性乱流理論において (6) の右辺が相関の4次モーメントである Loitsiansky の不変量に等しいと仮定⁶⁾したものと似ている。このようにみえてみると wall 近傍のように等方性とは最も縁の薄いと思われるところでも大規模な乱子には等方性乱流理論が使われた仮定がかなりの近似で成立するのではないかと思える。wall shear は垂直最大乱子の運動のあらわれである⁷⁾とみれば、各層の垂直最大乱

子相互の間には（５）や（６）のような関係が存在しているであろう。

実際問題として興味あるスペクトルのピークの位置や中間乱子領域のスペクトルの性質に関する知識はこの実験ではまったくえられなかった。Klebanoff⁹⁾ が風洞境界層内で熱線風速計を使ってえたレイノルズ応力のスペクトルをみると中間乱子領域ではっきりと $-7/3$ 乗がみられ、wall に接近するにしたがってその領域がせまくなるがやはり $-7/3$ 乗の成立する領域がみられる。また Fig. 9 は内島の⁹⁾が接水気層内の水面に近いところで測定してえたもので、運動量輸送とこれに類似のメカニズムを持つと考えられる熱の輸送のスペクトルでも $-7/3$ 乗が成立している。以上は 2 例だけであるが、shear のスペクトルも中間乱子領域では圧力変動のスペクトルと同じ形をしていることがわかる。なおこの $-7/3$ 乗則は有名な Kolmogorov-Oboukhov 則 $u^3/\lambda \sim \text{const.}$ と（４）式の関係を使って導びくこともできる。

もちろん上の 2 例は完全な wall shear のスペクトルではないが、等方性乱流理論で使われる手法がかなりの近似で wall 近傍の現象の説明に適用できるのではないかと考える。

以上からみて wall shear あるいは wall に非常に近いところの shear のスペクトルは大体 Fig. 10 のような形をしているのではないかと予想される。

Fig. 10 をみてわかるように shear のスペクトルは速度変動のスペクトルより steep で、特定のスケールにエネルギーが集中しているから、その測定は速度変動のスペクトルを求める場合よりせまい周波数範囲で十分である。

5. あとがき

この報告は開水路の wall shear の研究のほんの一部で、そのうち特に大規模な変動の性質をそのスペクトルから調べたものである。えられた結果はスペクトルの低周波側に 3 乗と 9 乗の成立する領域が存在し、それは等方性乱流理論における仮定と同様な仮定で説明できそうである。

興味のある中間乱子領域のスペクトルはえられなかったが、これは普通の乱流境界層内で測定して得られるものとその性質はほとんど違わないと思えるが、大規模な乱子に対応するスペクトルは自由表面の効果もきいて少しは様子の違うものになっているであろう。

最近著者は熱線型の wall shear 測定装置を試作し¹¹⁾、現在さらに改良中であるが、これを使えば中間乱子領域の測定も十分可能となり、その結果が期待されるであろう。

おわりにこのような研究を水理学の分野に利用する方向の 1 つとして土砂掃流の問題を例にとってみる。土粒子の運動はそれに匹敵するスケールの乱れが、重力に逆らって運動を起させる程度の強度をもったときに起るとみられるから、乱れの強度だけでなくそこに存在する乱れのスケールが重要である。スケールの

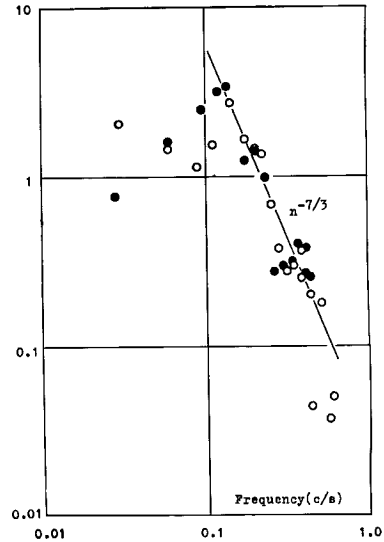


Fig. 9. Spectra of momentum flux (○) and heat flux (●) in the surface layer over the water (Uchijima).

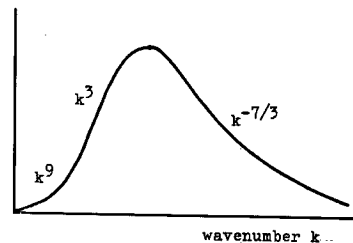


Fig. 10. Form of the spectrum of turbulent wall shear.

研究には乱れの相関やスペクトルの研究が必要である。**Fig. 11** は Bowden¹²⁾ が海底でえた各種の乱れ成分のスペクトルであるが、限界掃流で土砂が浮遊し、浮遊した土砂が流れ方向あるいは横方向へ移動していく過程を考えると **Fig. 11** からわかるように、おのおのの段階でそれに寄与する乱れのスケールが異なっていることがわかる。われわれはまず開水路で水深との関係で **Fig. 11** のような結果をえることを目的とした。

この研究をするにあたりいろいろ便宜をはかっていた角屋睦教授と、スペクトル計算のためのプログラムをかしていただいた光田寧助教授に謝意を表するとともに、この研究の一部は文部省科学研究費「河道計画の合理化に関する研究」の補助を受けて行なわれたことを付記する。

注1) wall 近傍のレイノルズ応力を熱線風速計で測定したものは近年次第に見られるようになってきたが、これは完全な wall shear とは少し違うものと思われる。

注2) 差動変圧器の core に働く電磁的な吸引力 F は1次コイルのインダクタンスを L 、励磁電流を i 、core の位置を x とすれば一般の電磁石と同様に $F=i^2 \cdot dL/dx$ であたえられる。現在使用中の差動変圧器の吸引力を評価してみると、1次電流は約 150 mA、インダクタンスの変化率は **Fig. 12** のようであるから、例えば中心からの core の変位が 2mm での吸引力は(受感部の変位により流れをあらたに乱すことの少ないように変位はできるだけ小さくなるように調節をする)だいたい $F < 10^{-4}$ dyn である。一方このとき受感部全体に働く力は(1)式から約 10^2 dyn となる。

注3) 減衰自由振動の周期を T' 、対数減衰率を A とすれば

$$\epsilon = 4.61 \frac{A}{T'}, \quad n = \frac{2\pi}{T'} \sqrt{1 + 0.537 A^2}$$

の関係がある¹³⁾。**Fig. 2** のような記録10個から平均して $T' = 3.21$ sec, $A = 0.256$ (減衰比は 1.80) をえた。

注4) Fourier 変換を行なう前の共分散は、 x を観測値、 N をその総数とすれば

$$\frac{1}{N-k} \left[\sum_{i=1}^{N-k} x_i x_{i+k} - \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} x_i \sum_{i=1}^{N-k} x_{i+k} \right] \quad (k=0,1,\dots,n)$$

であるべきであるが、計算に使用したプログラムでは

$$\frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} x_i x_{i+k}$$

の形をしていたので、 x_i として偏差を使った。しかしまだ完全ではないので低周波側の数個は取り除いた。

注5) Oriob によれば実験水路では、乱流拡散係数 K と現象のスケール L との間には $K = 0.05 L^{4/3}$ の関係があるから、これを使って最小孔子の大体の大きさを評価をすると 1 mm の程度となる。

参 考 文 献

- 1) 松下 玄：開水路断面内の摩擦抵抗分布，昭和39年度農土学会講演要旨，1964.5, p. 167.
- 2) 余越正一郎，角屋 睦：Wall shear の直接測定，京大防災研年報7，1964.3, p. 311.
- 3) Batchelor, G.K.: The Theory of Homogeneous Turbulence, 1953, p. 56.

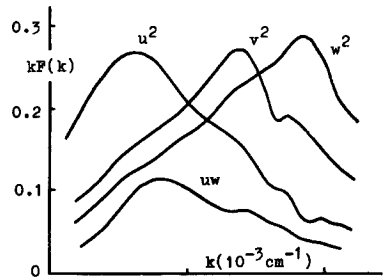


Fig. 11. Turbulence spectra above sea bed (Bowden).

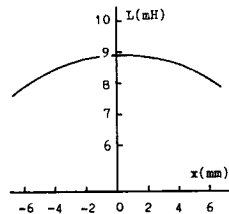


Fig. 12. Inductance of primary coil of differential transformer.

- 4) 光田 寧：強風時における乱れのスペクトルについて，京大防災研年報 6，1963.7，p. 105.
- 5) Shiotani, M. : Some notes on the structure of the wind in the lowest layer of atmosphere. 気象集誌, 31, 1953,p. 327.
- 6) Kármán, Th.v. and Lin, C.C. : On the concept of similarity in the theory of isotropic turbulence. Rev. Mod. Phys. 21, 1949, p. 516.
- 7) 井上栄一：穂波の研究，農業気象 11—1，1955，p. 18.
- 8) Klebanoff, P.S. : Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient. N.A.C.A. Rep. 1247, 1954, p. 1.
- 9) 内島善兵衛：接水気層内乱れの微細構造の実験的研究，農技研報告 A 7 1959-12, p. 101.
- 10) MacCready, P.B. : The inertial subrange of atmospheric turbulence. J. Geophys. Research, 67, 1962, p. 1051.
- 11) 余越正一郎，角屋 睦：熱線型壁面マサツ測定装置の試作，第19回農土学会中四国支部講演要旨，1964.10，p. 39.
- 12) Bowden, K.F. : Measurements of turbulence near the sea bed in a tidal current. J. Geophys. Research. 67, 1963, p. 3181.
- 13) 萩原尊礼：振動測定，1960，p. 42.
- 14) Orlob, G.T. : Eddy diffusion in homogeneous turbulence. Trans. A.S.C.E. 128-1 1961, p. 397.