

開水路彎曲流の内部機構

村本嘉雄・井上喬之

INTERNAL STRUCTURE OF FLOW THROUGH CURVED OPEN CHANNELS

By *Yoshio MURAMOTO and Takayuki INOUE*

Synopsis

This paper describes the internal structure of curved flows based on measurements of three dimensional velocity components in the curved reaches of smooth rectangular channels under conditions of subcritical flows.

Considering the properties of three vorticity components observed, the flow through a curved section was divided into three regions: the generated region, the developed region and the fully developed region of secondary flow. The magnitude of secondary flow predicted from the longitudinal vorticity equation was confirmed by the experimental results in the generated region. Further, the radial distribution of tangential velocity measured in the fully developed region supported the theory of pervious papers.^{1),2)}

1. は し が き

従来、開水路彎曲流の内部機構を解析するのになされてきた方法は層流理論による方法^{3),4)}と三次元境界層理論による方法とに大別されよう。しかし、これらの解析法では、通常、流れ方向に一樣な場合しか解析が難しく、二次流の発生、発達過程における彎曲流の挙動を論ずることはできない。

本論文では、まず、同心円状の彎曲水路における三次元流速成分の特性を実験的に検討し、それに基づいて上の二つの解析法の問題点を指摘した。ついで、彎曲流の内部機構を統一的に把握するために、過度の流れ方向の変化より二次流の発生域、発達域、一樣域を定義し、各領域の特性を明らかにするとともに前論文^{1),2)}の考察の位置づけを行なった。最後に、発生域に関して過度保存則から考察し、また、一樣域に関して前論文の誘導結果を実験値より検討した。

2. 実 験 装 置

(1) 実験水路および計測装置の概要

実験水路は水路幅 50 cm, 深さ 30 cm のコンクリート製 ($n=0.013$) の長方形断面水路で、路床こう配 1/500 にモルタル仕上げされている。その平面形状は Fig. 1 に示すように上, 下流側それぞれ 10m, 11.5m の直線部の間に彎曲偏角 180° の単一彎曲部が挿入されている。彎曲部の中心曲率半径は $r_c=75$ cm, 150 cm の二種類で、中心曲率半径、水路巾比 $r_c' (=r_c/B)$ はそれぞれ 1.5 と 3 である。

計測装置としては流量測定に台形ゼキを用い、水深測定には 1/10 mm 読みのポイント・ゲージを使用した。主流の流速測定は彎曲部の水深変化に即応するように直径 7 mm のプラントル型ピトー管で行ない、路床面近くの測定には直径 1 mm の総圧管を用い、静圧測定は別途に行なった。また、流水断面内の半径方向、鉛直方向の流速成分を間接的に求めるために、三次元流向計測装置を製作した。流向計測装置の構造は Photo. 1 に示すように球型ピトー管、回転支持枠(分度円付)および平行移動装置からなり、球型部の中

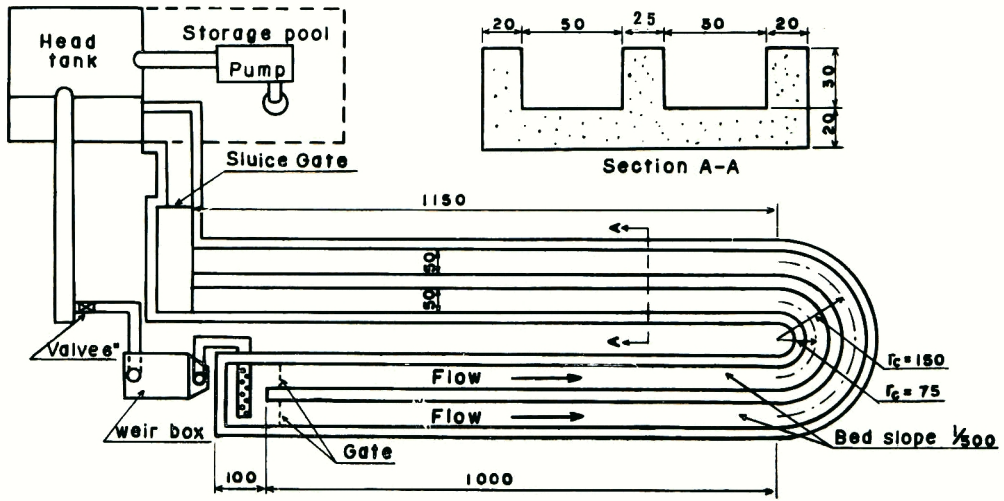


Fig. 1. General plan of experimental facility. (unit ; cm)

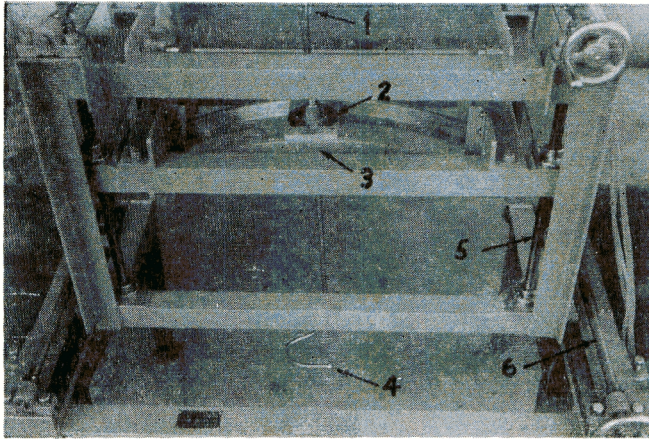


Photo. 1. Three dimensional flow direction instrument. (1. total head tubes, 2. horizontal protractor, 3. vertical protractor, 4. pitot sphere, 5. vertical slide, 6. horizontal slide.)

心を固定中心として水平面内 ($\pm 45^\circ$) および鉛直面内 ($\pm 20^\circ$) で回転させ三次元的な流向を測定するようになっている。

(2) 球型ピトー管の特性と測定精度

球形ピトー管による開水路彎曲流の流向測定は Shukry の研究⁵⁾にみられるが、ピトー管の圧力係数の決定に問題があると思われる。本研究でも当初、Shukry と同型のピトー管 (Fig. 2-(a)) を用いて測定を行ったが⁶⁾、ピトー管の基部が球部の最上部圧力孔 IV (Fig. 2-(c)) に影響を与えるため、圧力係数と偏角との関係が流速および基部の浸水長によって著しく変化し、圧力均衡点では正しい流向を示さないことが明らかになった。それで、Fig. 2-(b) に示すように基部を改良し、また、圧力孔の位置は圧力係数と偏角との関係が直線的かつ急こう配となることを考えて交角 45° にとり、良好な結果を得た⁷⁾。

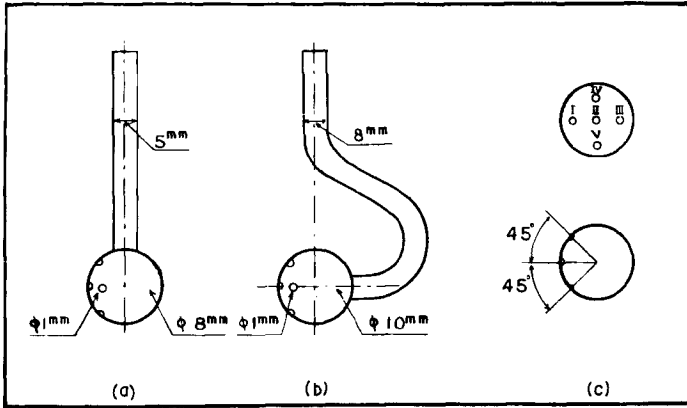


Fig. 2. Pitot sphere ; (a) Shukry type with straight stem,
 (b) improved type with curved stem,
 (c) notation of pressure holes.

球型ピトー管による流向測定の精度については不確定な要素が多く、検定も難しいので従来、吟味されて
 いないが、つぎに、速度こう配の影響と差圧測定の精度の2点から若干の検討を試みる。

(i) 速度こう配の偏角に与える影響

各圧力孔 (Fig. 2-(c)) について、偏角 r による圧力係数 k_r の変化を測定し、ポテンシャル流れにおけ
 る球の圧力係数と偏角との関係

$$k_r = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \rho u^2} = 1 - \frac{9}{4} \sin^2 r \dots\dots\dots (1)$$

と比較した結果を Fig. 3 に示す。偏角が大きいところでは、球面から流れが剥離するため (1) 式の曲線
 からはなれるが、停留点から圧力孔付近 ($r = 45^\circ$) までは (1) 式で近似できることがわかる。

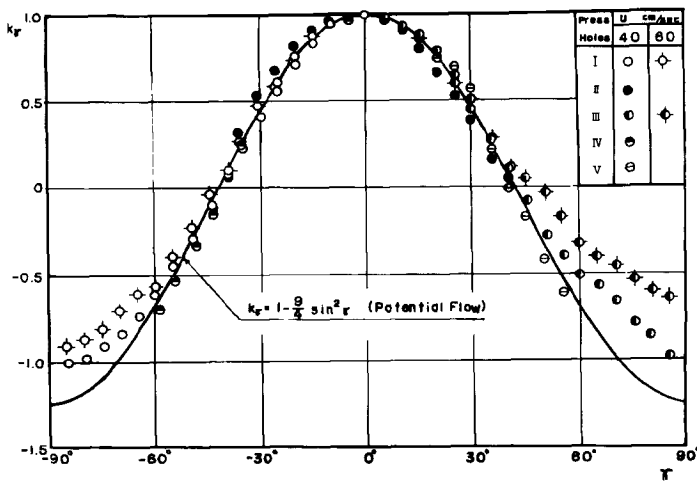


Fig. 3. Relation between dynamic coefficient and angle of inclination.

いま、二つの圧力孔 (Fig. 2-(c) の I, III あるいは IV, V の圧力孔) に作用する平行流の速度をそれぞれ u_1, u_2 ($u_1 < u_2$) とすると、(1) 式より、 $r=45^\circ$ の場合 $p_1 > p_2$ となる。したがって、 $p_1 = p_2$ とする測定位置では次式で与えられる偏角 Δr が見掛け上現われる。

$$u_1^2 \left\{ 1 - \frac{9}{4} \sin^2(45^\circ + \Delta r) \right\} = u_2^2 \left\{ 1 - \frac{9}{4} \sin^2(45^\circ - \Delta r) \right\}$$

この式を整理すると

$$u_2/u_1 = \sqrt{2/(1-9 \sin 2\Delta r)} - 1 \dots\dots\dots (2)$$

となり、 $u_2/u_1 \sim \Delta r$ の関係は Fig. 4 のようになる。

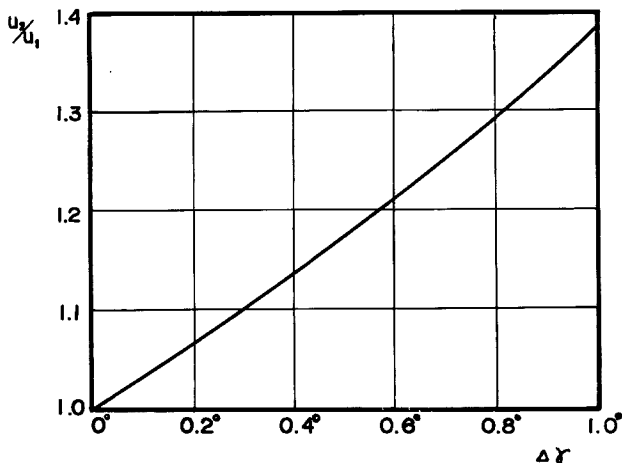


Fig. 4. Deviation of measuring angle by velocity difference at two press. holes.

本実験の測定範囲では u_2/u_1 の最大値は 1.05 であって、 $\Delta r \approx 0.2^\circ$ と考えられる。

(ii) 差圧測定の精度と偏角の不確定量

流速 u , 流向 r の流れで差圧測定計器による測定限界の水頭を Δh , それによる偏角測定の不確定量 Δr とすると、(1) 式より

$$\Delta h = \frac{1}{2g} \left(\frac{u}{\cos r} \right)^2 \frac{9}{4} \{ \sin^2(45^\circ + \Delta r) - \sin^2(45^\circ - \Delta r) \}$$

となる。 Δr を最大とする Δh は $r=0$ の場合を考えれば充分であるから、上式は

$$\Delta h = 1.15 \times 10^3 u^2 \sin 2\Delta r \quad (\text{cm-sec}) \dots\dots\dots (3)$$

と表わされ、 $u=30 \sim 70$ cm/sec の範囲で図示すると Fig. 5 のようになる。本実験で用いた傾斜マノメーターは $\Delta h=0.025$ cm と考えられ、 $u=30 \sim 70$ cm/sec に対して $\Delta r \approx 0.7^\circ \sim 0.1^\circ$ と推定される。

3. 流速特性

彎曲部における座標として円筒座標系を用い、主流の方向に θ 軸、横断外方に r 軸、鉛直上方に z 軸をとる。また、流速ベクトルの大きさを q とし、それが $\theta-r$ 平面および $\theta-z$ 平面となす角をそれぞれ δ, γ とすると、速度の θ, r, z 成分 u, v, w はつぎの関係から求められる。

$$u = q \cos \gamma \cos \delta, \quad v = q \sin \gamma \cos \delta, \quad w = q \sin \delta$$

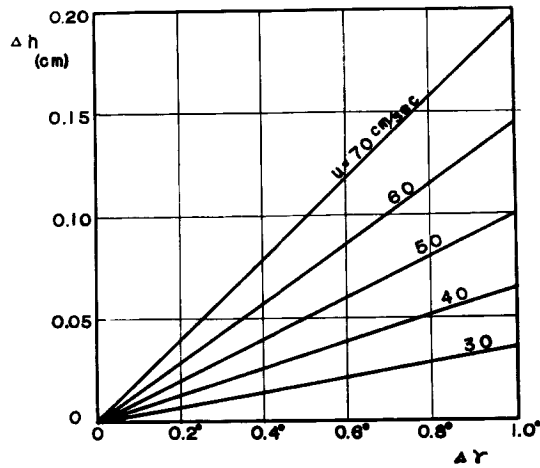


Fig. 5. Relation between accuracy of differential manometer and measurable angle of inclination.

本実験では u, γ, δ を測定し、

$$v = u \tan \gamma, \quad w = u \sec \gamma \cdot \tan \delta$$

の関係から v, w 成分を決定した。

水理条件は $r_c = 75 \text{ cm}, 150 \text{ cm}$ の場合ともに、流量 $Q = 10 \text{ l/sec}$ 、最大 F_r 数は約 0.57 で常流状態であって、彎曲部に剥離域の存在しない流れである。

まず、彎曲部の流速特性を概観するために彎曲部の前半、後半の代表断面 $\theta = 30^\circ, \theta = 150^\circ$ における u, v, w の等流速線図を描くと、 $r_c = 75 \text{ cm}, 150 \text{ cm}$ の場合についてそれぞれ Fig. 6-1, Fig. 6-2 のようになる。

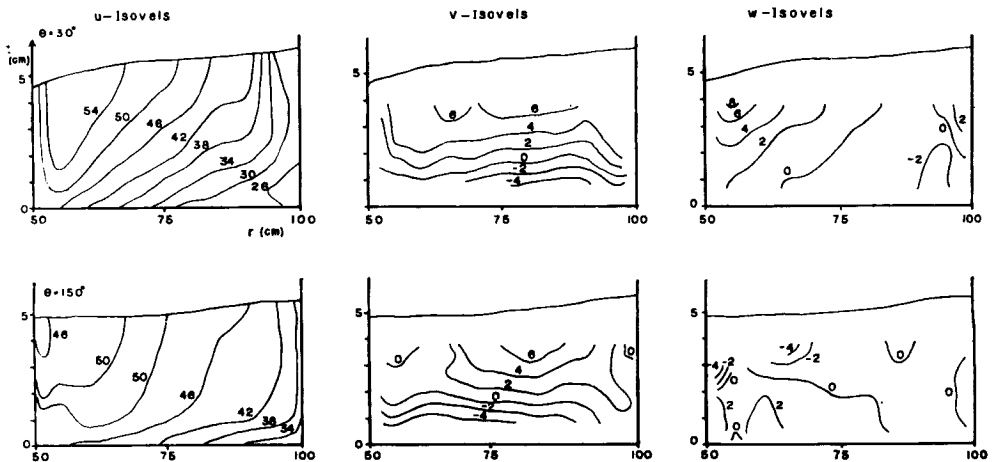


Fig. 6-1. Isovels of three velocity components at $\theta = 30^\circ$ and 150° . ($r_c = 75 \text{ cm}, Q = 10 \text{ l/sec}$)

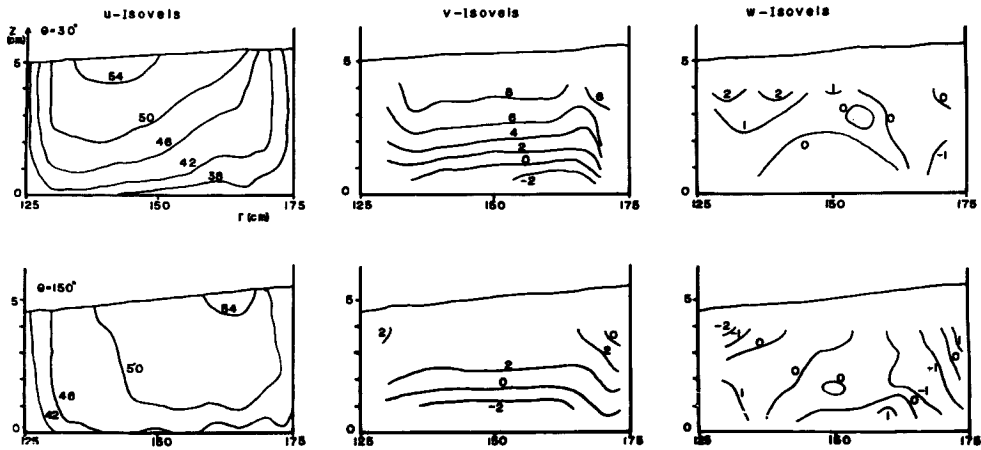


Fig. 6-2. Isovels of three velocity components at $\theta=30^\circ$ and 150° . ($r_c=150\text{ cm}$, $Q=10\text{ l/sec}$)

v, w については流向計測装置の構造, 寸法の制約のため, 底面から 0.8 cm, 水面下 1 cm, 側壁 2 cm 以内の測定が欠除している。また, 測定精度は u について $\pm 0.5\text{ cm/sec}$, v, w については前節の偏角精度から換算流速として最大 $\pm 0.2\text{ cm/sec}$ の誤差が考えられる。

各流速成分の r, z 方向の分布について, 流れ方向の変化にみられる特徴的な傾向を要約すればつぎのようである。

(1) u 分布

(i) u の r 方向の分布は $\partial u/\partial r > 0$ から $\partial u/\partial r < 0$ へ移行する。 $\partial u/\partial r \sim 0$ の断面は $r_c=75\text{ cm}$ の場合 $\theta=150^\circ \sim 180^\circ$, $r_c=150\text{ cm}$ の場合 $\theta=90^\circ$ であって, 流量範囲 $Q=5 \sim 30\text{ l/s}$ においても移行点に変化がみられなかった。

(ii) u の z 方向の分布は $\partial u/\partial z > 0$ から $\partial u/\partial z \sim 0$ へ移行する。一例として, $r_c=150\text{ cm}$ の場合で水路中心における鉛直方向の分布の変化を图示すると Fig. 7 のようになる。二次元水路の流速分布(層流の理

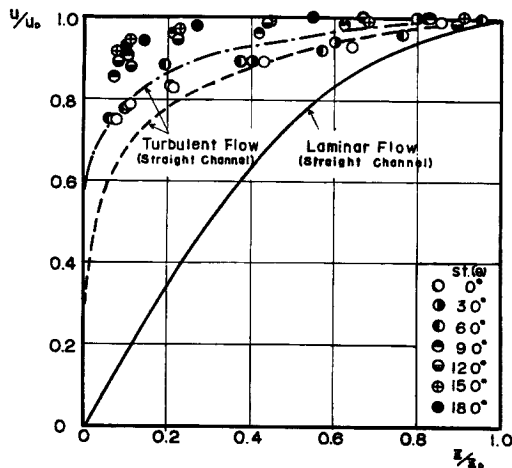


Fig. 7. Vertical distribution of tangential velocity at $r=r_c$ ($r_c=150\text{ m}$, $Q=10\text{ l/sec}$)

論曲線および乱流の実験曲線)と比較して彎曲部後半の流速分布が一様化する傾向がうかがえる。

(2) v 分布

(i) v の r 方向の分布は流れ方向に著しい変化はないが、 $y > \partial v / \partial r < 0$ となる傾向が強まる。

(ii) v の z 方向の分布は u の分布と同様に上層付近で一様化する。

(3) w 分布

u, v の分布に比して、断面中央部の流速値が小さく、彎曲部前半では内岸よりに $w > 0$ 、外岸よりに $w < 0$ の傾向がみられるが、彎曲部後半では一定の傾向を示さない。

以上、各流速成分の変化を定性的に述べたが、こうした流速特性から彎曲流の内部機構を統一的に把握することは難しく、なんらかの抽象化が必要であろう。

4. 内部機構に関する一般的特性

1. に述べた二つの解析法の根底にある仮定を前節の実験事実から検討してみる。層流理論による方法では「主流の遠心力と圧力こう配との差が粘性抵抗あるいは渦動粘性抵抗と均衡する」という仮定に基づいているが、Fig. 6-1, Fig. 6-2, の v 分布にみるように極く壁面付近を除いて粘性抵抗の影響は小さく、本実験の測定範囲では慣性力に比して充分無視できる order であった。また、境界層理論による方法では「流水断面を二層に分け、下層に上層の圧力こう配が影響して二次流が発生する」という考えに基いているが、開水路彎曲部の流入断面では通常、境界層が完全に発達し、水面に達している場合が多く、境界層領域を定めることが難しい。さらに、Fig. 6-1, Fig. 6-2 の v 分布にみるように二次流の発生初期においても上、下層同程度の二次流が存在し、下層の二次流が次第に上層に及ぶことが説明できないように思われる。

従って、開水路彎曲部における二次流の発生に関しては、Thompson が最初に与えた「主流の流速分布によって生ずる遠心力と圧力こう配との差が二次流を発生させる」という漠然とした概念にもどって考える必要がある。すなわち、この概念では、二次流の発生する前提として主流の速度こう配が必要であるが、発生、発達過程では慣性力が主役をなす場合が予想される。換言すれば、彎曲部流入点でのせん断流が彎曲部内で粘性の影響を受けずに変形する過程が主体性をもつと考えられる。

こうした考えを記述する方法として、翼列内の二次流の取り扱い⁸⁾でなされているように、直線部のせん断流を一つの渦で代表させ、それが彎曲部内でどのように変形するかを考察してみる。まず、簡単のために、彎曲部内で一つの固定流管を考え、その横断面内の渦度が流れ方向に如何に変化していくかを実験値から検討する。

いま、流管の断面として壁面および水面近傍で測定の不確な個所を除外し、 $|r_c - r| \leq 15 \text{ cm}$, $z = 0.8 \sim 3.8 \text{ cm}$ の長方形断面をとる。 (θ, r, z) 方向の渦度成分

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{r \partial \theta}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ur)$$

を流速の測定結果より求めると、 $r_c = 75 \text{ cm}$, 150 cm の二ケースについてそれぞれ Fig. 8-1, Fig. 8-2 のようになる。

各渦度成分の流れ方向の変化は二ケースで若干の程度差はあるが、つぎのような共通の傾向がうかがえる。

- (i) ξ は上流の方向をもち、流入点より次第に増加し、 $\theta = 60^\circ$ で最大となって減衰していく。
- (ii) η は外岸の方向をもち、 $\theta = 30^\circ$ まで直線部と同じ値を保ち、以下、次第に減衰していく。
- (iii) ζ は鉛直下方向をもち、 $\theta = 30 \sim 60^\circ$ 付近まで 0 で、以下、次第に発達していく。

以上の特性は一実験例であるが、これを基にして開水路彎曲部で壁面近傍を除く断面内の内部機構に関する一般的特性を把握できるように思う。いま、Fig. 8-1, Fig. 8-2 にみられる各渦度成分の特性を一般化すると Fig. 9-(a) のようになり、また、彎曲部分における渦度の変化を模型的に示すと Fig. 9-(b) のよう

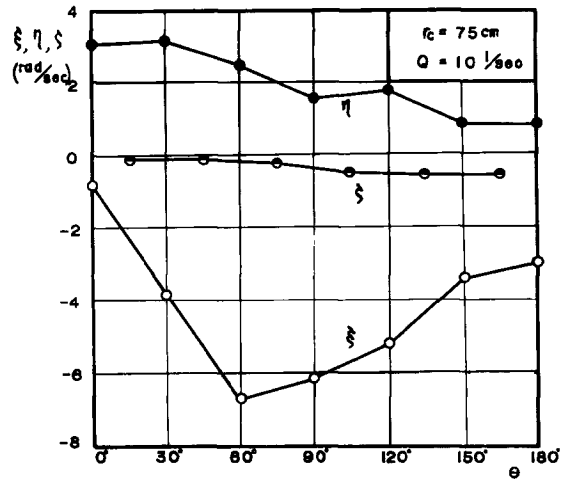


Fig. 8-1. Longitudinal distribution of three vorticity components observed.

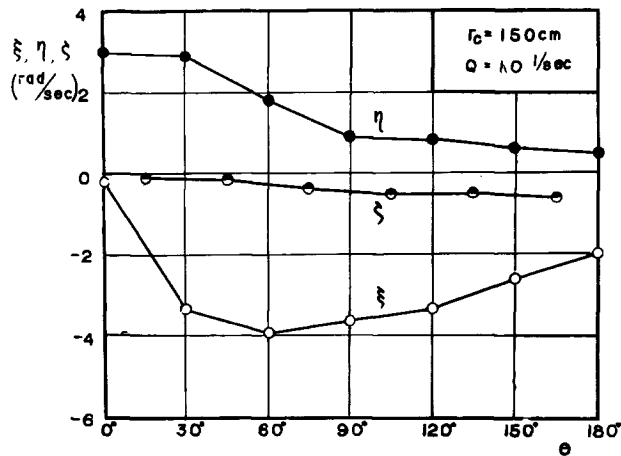


Fig. 8-2. Longitudinal distribution of three vorticity components observed.

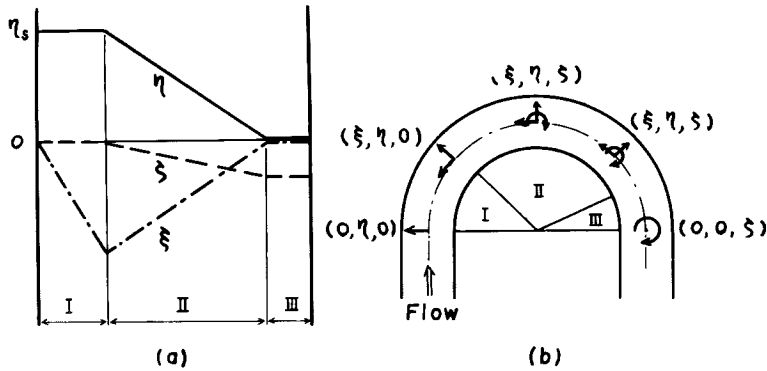
に表わされる。

結局、彎曲部の流れは Fig. 9-(a) に示すように渦度変化によって I；二次元回転流域，II；三次元回転流域，III；一次元回転流域の三領域に分けることができる。一方、これらを二次流の発達過程より考えて、I；発生域，II；発達域，III；完全発達域（一様域）と名づけ、その特性を考えてみる。

まず、発生域では $\eta = \eta_0$ （直線流の渦度）で $\xi = 0$ であるから、直線流の渦度が主流のポテンシャル流れによって変形し、二次流（ ξ ）が発生する領域と考えられよう。

つぎに、発達域では二次流の影響が主流に及んで η の減少、 ζ の発生を招くと同時に、主流の変化が二次流に影響し ξ の減少を招く、相互干渉の領域と云えよう。

最後に、一様域では主流と二次流との相互干渉が安定し、壁面近傍を除くと η 、 ξ は見掛け上 0 となり、 ζ だけが存在する。したがって、この領域では、非粘性回転流としての上層部と底面のせん断応力の影響す



- I ; Two dimensional rotational flow (Generated region of secondary flow)
- II ; Three d.r.f. (Developed region of s.f.)
- III ; One d.r.f. (Fully developed region of s.f.)

Fig. 9. Schematic representation illustrating longitudinal distribution of three vorticity components and secondary flow.

る下層部に分けて、三次元境界層理論による解析^{1),2)}が可能と考えられる。

以上、開水路彎曲流の内部機構を単純化して考えたが、各領域、特性から推察されるように、発達域の現象は発生域、一様域の現象に比して複雑であって、現段階では解析の方向が得られない。したがって、本論文では、以下の節で発生域について若干の考察をし、一様域については、前論文の考察を今回の実験結果より検討したいと思う。

5. 発生域に関する検討

前節で述べた発生域の特性から渦度保存則が近似的に適用できると考えられる。流速ベクトル \vec{u} 、渦度ベクトル $\vec{\omega}$ とすると、定常流における渦度保存式は

$$\text{rot}(\vec{u} \times \vec{\omega}) = (\vec{\omega} \nabla) \vec{u} - (\vec{u} \nabla) \vec{\omega} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

と表わされ、流れ方向の渦度成分に関する式は

$$\left(\xi \frac{\partial}{\partial \theta} + r\eta \frac{\partial}{\partial r} + r\zeta \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{u}{r} - \left(u \frac{\partial}{\partial \theta} + rv \frac{\partial}{\partial r} + rw \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\xi}{r} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

となる。いま、前節の取り扱いと同様に、壁面近傍を除いた流水断面内で単一の渦度の流れ方向の変化を考えるとすると、 $\partial \xi / \partial r = 0, \partial \xi / \partial y = 0$ であって、また、発生域の特性より $\zeta = 0$ と考えられる。

したがって、(5)式は

$$u \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\xi}{r} \right) - \xi \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u}{r} \right) = r\eta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right)$$

あるいは

$$\frac{\partial}{r \partial \theta} \left(\frac{\xi}{u} \right) = ru^{-2} \eta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) \dots\dots\dots (6)$$

と表わされる。上式より ξ を求めるには、 u に彎曲部の境界条件を考慮したポテンシャル流れの関数形を与えねばならないが、一般的な表示が困難なので、ここでは近似的に自由渦分布

$$ur = \text{const.}, \quad \partial u / \partial \theta = 0 \dots\dots\dots (7)$$

を考える。さらに、前節の特性より $\eta = \eta_s$ とし、彎曲部流入点の条件を $\theta = 0, \xi = \xi_s$ とすると、(6)式は

$$\xi = \xi_s - 2\eta_s \theta \dots\dots\dots(8)$$

となる。すなわち、流入直線部で渦度が0でない場合、彎曲部における ξ は θ に比例して直線的に増加することがわかる。

以上の考察結果を前節の ξ の実験値と比較すると、 $r_c=75\text{ cm}$, 150 cm の場合について、それぞれ Fig. 10-1, Fig. 10-2 のようになる。

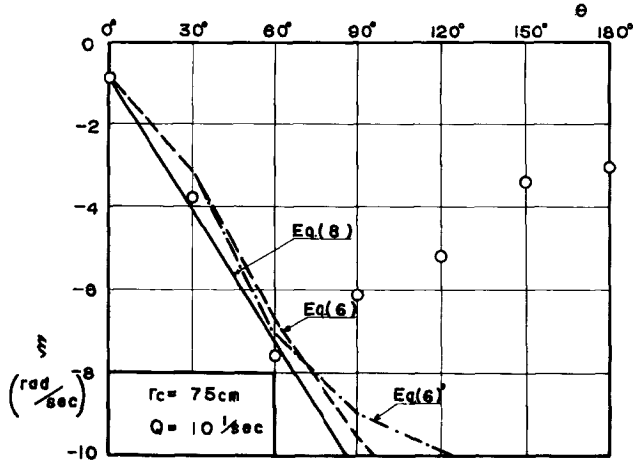


Fig. 10-1. Comparison between tangential vorticity observed and theoretical curves.

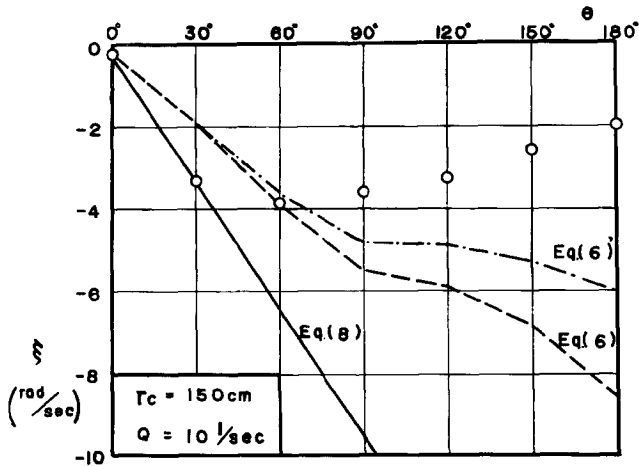


Fig. 10-2. Comparison between tangential vorticity observed and theoretical curves.

これらの図で、(6)式の曲線は $u(r, \theta, z)$ の実験値を用いて数値計算した $\xi(\theta)$ を表わし、(6)'式の曲線は $\eta = \eta_s$ とおいた式、

$$\frac{\partial}{r\partial\theta} (\xi/u) = ru^{-2}\eta_s \frac{\partial}{\partial r} (u/r) \dots\dots\dots(6)'$$

で、 $u(r, \theta)$ の実験値から計算したものである。

図から明らかなように、発生域では、(7)式の仮定で単純化した(8)式によって充分 ξ の変化を予測することができる。しかし、発達域における ξ の変化は、実測の u 分布を用いた(6)、(6)'式によっても予測できなく、こうした単純な取り扱いが適用されないことがわかる。なお、 ξ_s は $r_c=150$ cmの場合ほぼ0に近いが $r_c=75$ cmでは一定値をもち、発生域の特性を決定するには、今後、上流直線部の影響を検討する必要がある。

6. 一様域に関する検討

Fig. 9-(a)に示した一様域は理想的な状態であって、通常の開水路彎曲流ではFig. 8-1, Fig. 8-2にみるように、彎曲部流出点付近でも発達域かあるいは一様域の過渡状態にある場合が多いと考えられる。このような領域の特性は発達域の挙動が解析されない限り充分に把握できないが、ここでは、前論文^{1),2)}の考察で得られた主流の流速分布式

$$\frac{u}{u_c} = \frac{r'^3 + r'_c \sqrt{(r_c'^2 + 1/40)(r_c'^2 - 1/4)}}{r_c'^3 + r_c' \sqrt{(r_c'^2 + 1/40)(r_c'^2 - 1/4)}} \cdot \frac{r'_c}{r'} \dots \dots \dots (9)$$

の適合性について検討してみよう。上式で u_c は水路中心の流速、 $r'=r/B$ を表わす。(前論文¹⁾では r', r'_c をそれぞれ t, a と表示してある。)

まず、 $r_c=75$ cm ($r'_c=1.5$)の場合について $\theta=90^\circ \sim 180^\circ$ の測点における実験値と比較するとFig. 11のようになる。同図で、 $u/u_c=1.5/r'$ 、 $u/u_c=r'/1.5$ の曲線はそれぞれ自由渦、強制渦としての u/u_c 分布を示している。実験値は $\theta=90^\circ \sim 150^\circ$ では自由渦の特性が残っており、 $\theta=180^\circ$ で(9)式の分布に接近している。したがって、 $r_c=75$ cmの場合では彎曲部流出点近くまで発達域と考えられ、一様域を得るにはさらに彎曲偏角を大きくする必要がある。

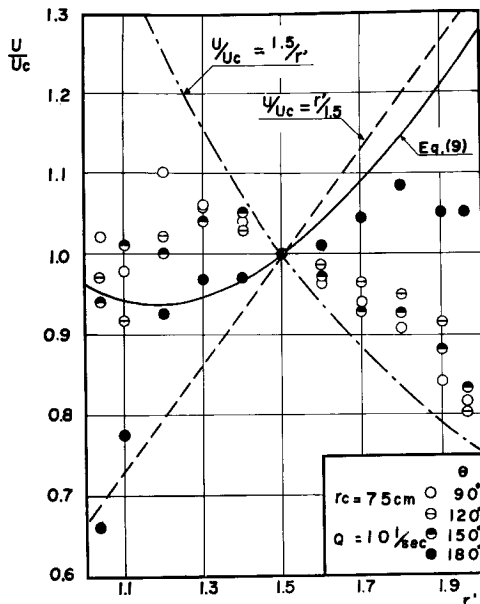


Fig. 11. Comparison between theoretical velocity profiles and experimental data.

同様に、 $r_c=150\text{ cm}$ ($r'_c=3$) の場合について、(9) 式および強制渦の分布と比較して結果を Fig. 12 に示す。実験値は $\theta=120^\circ\sim 180^\circ$ では側壁付近を除いてほぼ(9) 式と合致しており、Fig. 8-2 で ξ, η は発達域の様相を呈しているが、 u 分布としては一様域の式を近似的に適用できると考えられる。Fig. 13 は $\theta=150^\circ$ の測点で流量 $Q=5\sim 30\text{ l/sec}$ の実験値と比較したものであるが、どの流量に対してもほぼ一致しており、水理条件に関係しない(9) 式の表示を裏付けているように思う。

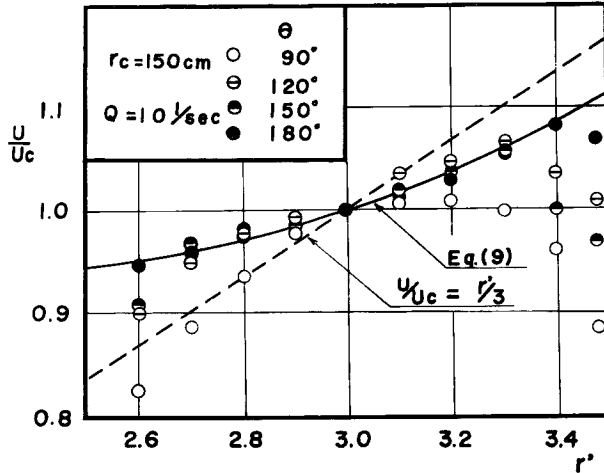


Fig. 12. Comparison between theoretical velocity profiles and experimental data.

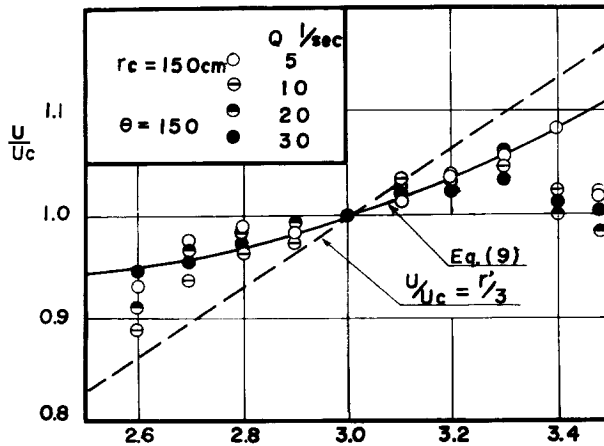


Fig. 13. Comparison between theoretical velocity profiles and experimental data for different discharges.

7. む す び

以上、同心円状の彎曲水路における実験結果から彎曲流の内部機構を把握する方向を明らかにし、発生域および一様域について検討を行なった。

今後、発達域の機構を究明するとともに、本研究では実験条件の制約から検討できなかった、壁面付近の流れの特性および、上、下流直線部の影響について吟味したいと思う。

最後に、実験および図面整理に多大の労をかけた真島克之君、今井猛君に感謝するとともに、本研究の一部は昭和39年度・文部省科学研究費の補助を受けたことを付記し謝意を表す。

参 考 論 文

- 1) 村本嘉雄, 石田真一: 彎曲部の流れに及ぼす二次流の効果について, 京大防災研究所年報, 第7号, 昭39.3.
- 2) Muramoto Y.: Flow through Curved Open Channels [I], Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute, Vol. 14, Part 2, 1965.
- 3) Boussinesq J.: Mémoire l'influence des frottement dans les mouvements réguliers des fluides, Journal de mathématiques pures et appliquées, 2e Série, Tome XIII, 1868.
- 4) Rozovskii I.L.: Flow of Water in Bends of Open Channels, Academy of Science of the Ukrainian SSR, 1957.
- 5) Shukry A.: Flow around Bends in an Open Flume, Trans. ASCE, Vol. 109, 1944.
- 6) 石田真一: 開水路彎曲流に関する基礎的研究, 京大修士論文, 昭39.3.
- 7) 村本嘉雄, 井上喬之: 開水路彎曲流の水理学的特性に関する研究(その5), 土木学会関西支部学術講演会講演概要, 昭39.11.
- 8) 大塚新太郎: 翼列の二次的流れの理論について, 日本航空学会誌, 4巻, 33号, 昭31.10.