

## クノイド波に関する研究 (第2報)

—波速および波長について—

岩 垣 雄 一

STUDIES ON CNOIDAL WAVES (SECOND REPORT)  
—ON THE WAVE VELOCITY AND WAVE LENGTH—

By Yuichi IWAGAKI

## Synopsis

In the first report, the graphs and the method to compute the wave profile from a given wave steepness and water depth to wave height ratio were presented based on the cnoidal wave theory developed by Laitone in 1961.

This paper provides the graphs to find easily the wave velocity, wave length and value of the complete elliptic integral of the first kind from a given wave period, still water depth and wave height for practical use based on Laitone's cnoidal wave theory. In addition, the comparisons of the wave velocity and wave length are made between the first and second approximations of his solution and between Stokes waves of the third order approximation, Airy waves, cnoidal waves of the second approximation and the solitary wave.

## 1. ま え が き

第1報<sup>1)</sup>では、1961年に摂動法によって求めたクノイド波に対する Laitone の理論解<sup>2)</sup>を用い、波形勾配と水深・波高比とを与えて、クノイド波の波形を簡単に求める図表を作成するとともに、第1近似解を用いた場合と第2近似解の場合とでどの程度の差があるかを調べた。さらに、Stokes の波および孤立波の両者と波形を比較して近似の程度を検討した結果、波高の最大 1.4% 程度の誤差を許すとすれば、第1種完全だ円積分の値が3より大きいときには孤立波の第1近似の波形をクノイド波の第1近似の波形としてよいこと、また、Wilson-Webb-Hendrickson の Stokes 波の適用限界<sup>3)</sup>は波形に対しては厳格すぎることを明らかにした。

この論文は、第2報として、同じく Laitone の理論解を用い、通常の波の計算に利用されるように、波の周期と水深および波高を与えて、クノイド波の波速や波長を求める図表を作成すると同時に、Airy の微小振幅波および Stokes 波との差異を明確にしようとしたものである。

## 2. Laitone によるクノイド波の波速式

いま、 $c$  を波速、 $H$  を波高、 $h_t$  を波の谷からの水深、 $g$  を重力加速度、 $k$  を Jacobi のだ円関数の母数、 $\mathbf{K}$  および  $\mathbf{E}$  をそれぞれ第1種および第2種の完全だ円積分とし、suffix 1 および 2 をそれぞれ第1および第2近似解をあらわすものとすれば、波速に関する Laitone の理論解はつぎのようにあらわされる<sup>1), 2), 4)</sup>。

$$\frac{c_1}{\sqrt{gh_t}} = 1 + \frac{H}{h_t} \frac{1}{k^2} \left( \frac{1}{2} - \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}} \right), \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{c_2}{\sqrt{gh_i}} = 1 + \frac{H}{h_i} \frac{1}{k^2} \left( \frac{1}{2} - \frac{E}{K} \right) + \left( \frac{H}{h_i} \right)^2 \frac{1}{k^4} \left\{ \frac{E}{K} \left( \frac{E}{K} + \frac{3}{4} k^2 - 1 \right) - \left( \frac{k^4 + 14k^2 - 9}{40} \right) \right\}. \quad \dots\dots(2)$$

第1報で述べたように、実用的には波の谷からの水深  $h_i$  よりも、平均水深  $h = h_i + \delta$  (ここに、 $\delta$  は波の谷から平均水深までの距離) を用いる方が都合がよいので、(1) および (2) 式を  $h_i$  の代りに  $h$  であらわすと、次式のように変形される。

$$\frac{c_1}{\sqrt{gh}} = \left( 1 - \frac{\delta_1}{H} \frac{H}{h} \right)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{1}{1 - (\delta_1/H)(H/h)} \frac{H}{h} \frac{1}{k^2} \left( \frac{1}{2} - \frac{E}{K} \right) \right\}, \quad \dots\dots(3)$$

$$\frac{c_2}{\sqrt{gh}} = \left( 1 - \frac{\delta_2}{H} \frac{H}{h} \right)^{1/2} \left[ 1 + \frac{1}{1 - (\delta_2/H)(H/h)} \frac{H}{h} \frac{1}{k^2} \left( \frac{1}{2} - \frac{E}{K} \right) + \left\{ \frac{1}{1 - (\delta_2/H)(H/h)} \right\}^2 \left( \frac{H}{h} \right)^2 \frac{1}{k^4} \left\{ \frac{E}{K} \left( \frac{E}{K} + \frac{3}{4} k^2 - 1 \right) - \left( \frac{k^4 + 14k^2 - 9}{40} \right) \right\} \right]. \quad \dots(4)$$

3. 理論解の図式化

(1) 波速

(3) および (4) 式において、 $\delta/H$  は、第1報の Fig. 4 に示すように  $h/H$  および  $K$  の関数 ( $\delta_1/H$  は  $K$  のみの関数) であり、また  $k$  および  $E$  も  $K$  のみの関数であるから、 $c/\sqrt{gh}$  は  $h/H$  および  $K$  の関数としてあらわすことができる。Fig. 1 は  $h/H=2, 5$  および20の場合について図化したもので、破線は第1近似  $c_1/\sqrt{gh}$  を、実線は第2近似  $c_2/\sqrt{gh}$  を示している。なお、 $k \rightarrow 1$  すなわち  $K \rightarrow \infty$  の極限(孤立波)では、 $\delta/H \rightarrow 0$  および  $E \rightarrow 1$  となるので、(3) 式および (4) 式は、それぞれ

$$\frac{c_1}{\sqrt{gh}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{H}{h}, \quad \dots\dots(5)$$

$$\frac{c_2}{\sqrt{gh}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{H}{h} - \frac{3}{20} \left( \frac{H}{h} \right)^2 \quad \dots\dots(6)$$

のようになる。Fig. 1 の右端に示した数字は (5) および (6) 式にもとづく極限值である。この図からわかることは、当然のことながら、 $h/H$  の値が大きくなると、第2近似値は第1近似に近づいてゆくこと、

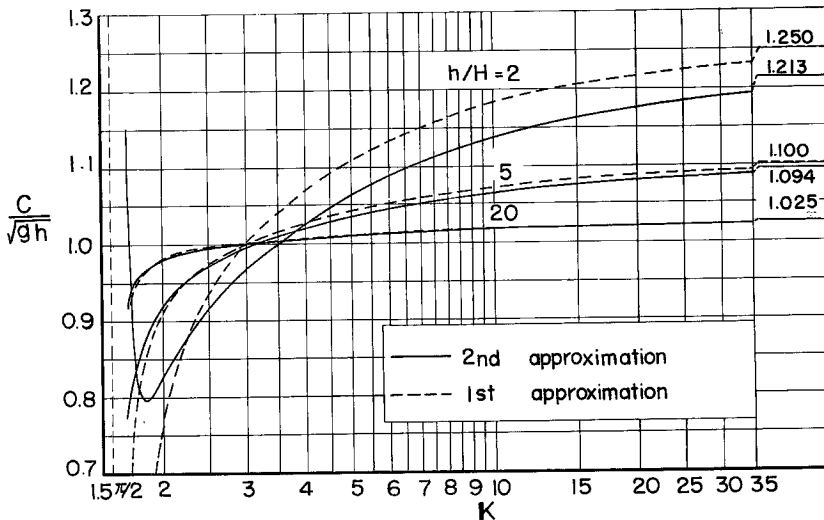


Fig. 1 Comparisons between the first and second approximations of wave velocities.

$K$  が非常に小さいところを除けば、 $h/H=2$  の場合には最大約 4%， $h/H=5$  の場合には約 1%程度第 2 近似は第 1 近似より小さいことがわかる。したがって、 $c/\sqrt{gh}$  と  $K$  との関係に関する限りにおいては、実用的には第 1 近似を用いてもよいと考えられる。

いま  $T=L/c$  の関係から

$$T\sqrt{\frac{g}{h}} = \left(\frac{L}{H} \frac{H}{h}\right) \frac{c}{\sqrt{gh}} \dots\dots\dots(7)$$

の関係があるが、前述のように、 $c/\sqrt{gh}$  は  $K$  および  $h/H$  の関数であり、また第 1 報で示したように  $H/L$  も  $K$  および  $h/H$  の関数であらわされるから、(7) 式より  $T\sqrt{g/h}$  は  $K$  と  $h/H$  との関数である。Fig. 2 はこれを図示したものであって、(7) 式を計算するにあたっては、 $c/\sqrt{gh}$  および  $H/L$  の両者とも第 2 近似を用いた。したがって、Fig. 2 は  $h/H$  をパラメーターとした第 2 近似の  $T\sqrt{g/h}$  と  $K$  との関係を示す。第 2 近似を用いたのは、上述のように  $c/\sqrt{gh}$  の値は第 1 近似と大差がないが、 $H/L$  の値が両者で非常に違うためである。

Fig. 2 を用いると、Fig. 1 に示すようにすでに  $c/\sqrt{gh}$  と  $K$  との関係が見出されているから、直接  $c/\sqrt{gh}$  と  $T\sqrt{g/h}$  との関係を図化することができる。Fig. 3 は両者の関係を第 2 近似について図示したもので、この図から周期、水深および波高を与えると、第 2 近似の波速を求めることができる。なお、同図には Airy の微小振幅波の波速式

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = \sqrt{\frac{L}{2\pi h} \tanh \frac{2\pi h}{L}} \dots\dots\dots(8)$$

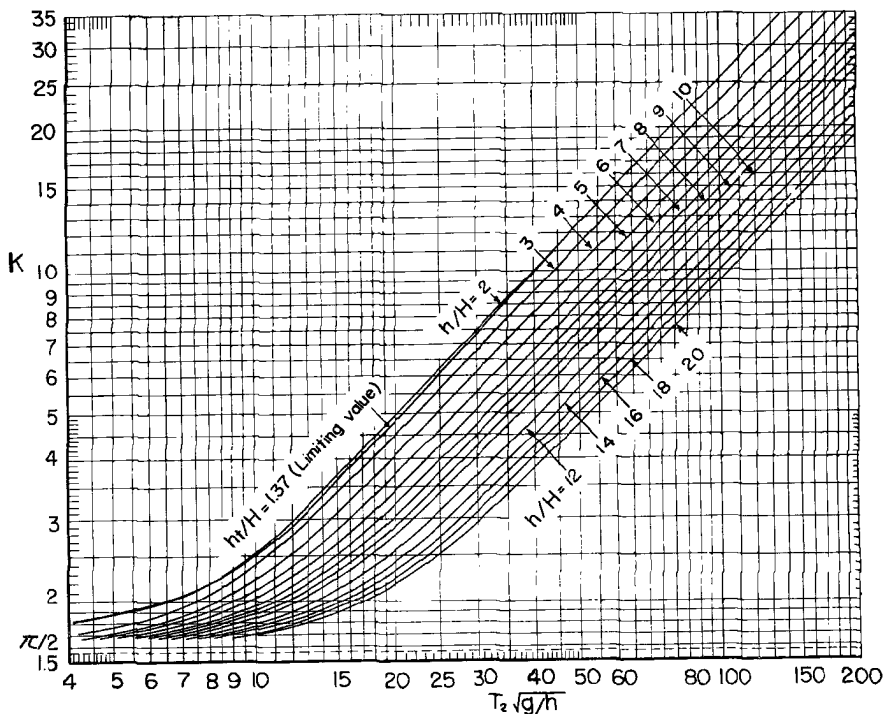


Fig. 2 Relationships between  $K$  and  $T_2\sqrt{g/h}$ .

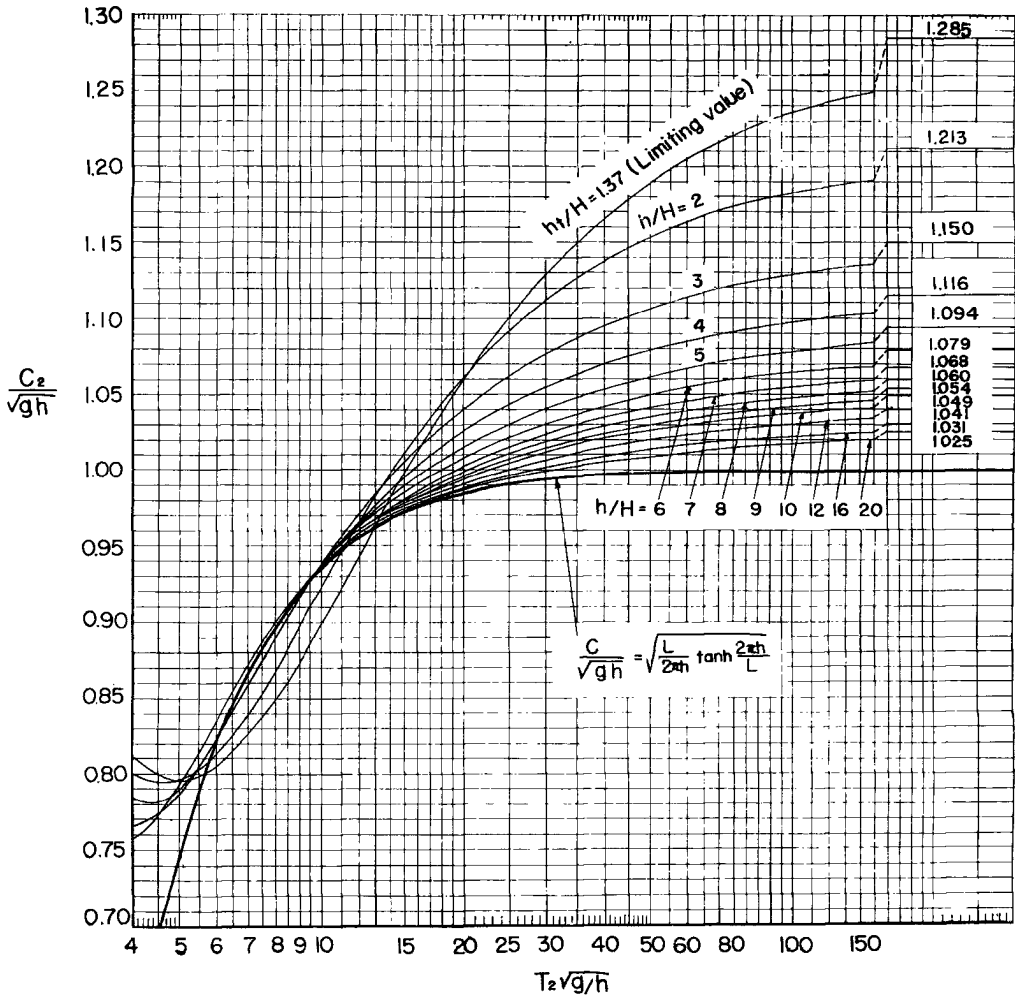


Fig. 3 Relationship between  $c_2/\sqrt{gh}$  and  $T_2\sqrt{g/h}$  with a parameter of  $h/H$ .

から求められる  $c/\sqrt{gh}$  と  $T\sqrt{g/h}$  との関係と、 $T\sqrt{g/h}$  の値が $\infty$ となった極限の孤立波に対する  $c/\sqrt{gh}$  の値が記入されている。Fig. 3 からつぎのようなことがわかる。

1)  $h/H \geq 3$  の場合、 $6 < T\sqrt{g/h} < 11$  の範囲で、クノイド波の波速と微小振幅波の波速とは1~2% 以内の差で両者はほぼ等しい。

2)  $T\sqrt{g/h}$  の値が上の範囲より大きくなると、クノイド波の波速は微小振幅波の波速より大きくなり、その差は  $h/H$  の値が小さいほど著しい。

3) Laitone<sup>4)</sup> が示しているように、 $T\sqrt{g/h}$  の値が小さいところで、クノイド波の波速に極小が現われるが、これは適用範囲外であることを示すもので、この図から推定すると、 $T\sqrt{g/h} < 5.5$  程度ではクノイド波理論は適用されえないと考えられる。

(2) 波 長

第1報において、 $L/H$  と  $K$  および  $h/H$  との関係が示されているので、これを  $L/h$  と  $K$  および  $h/H$

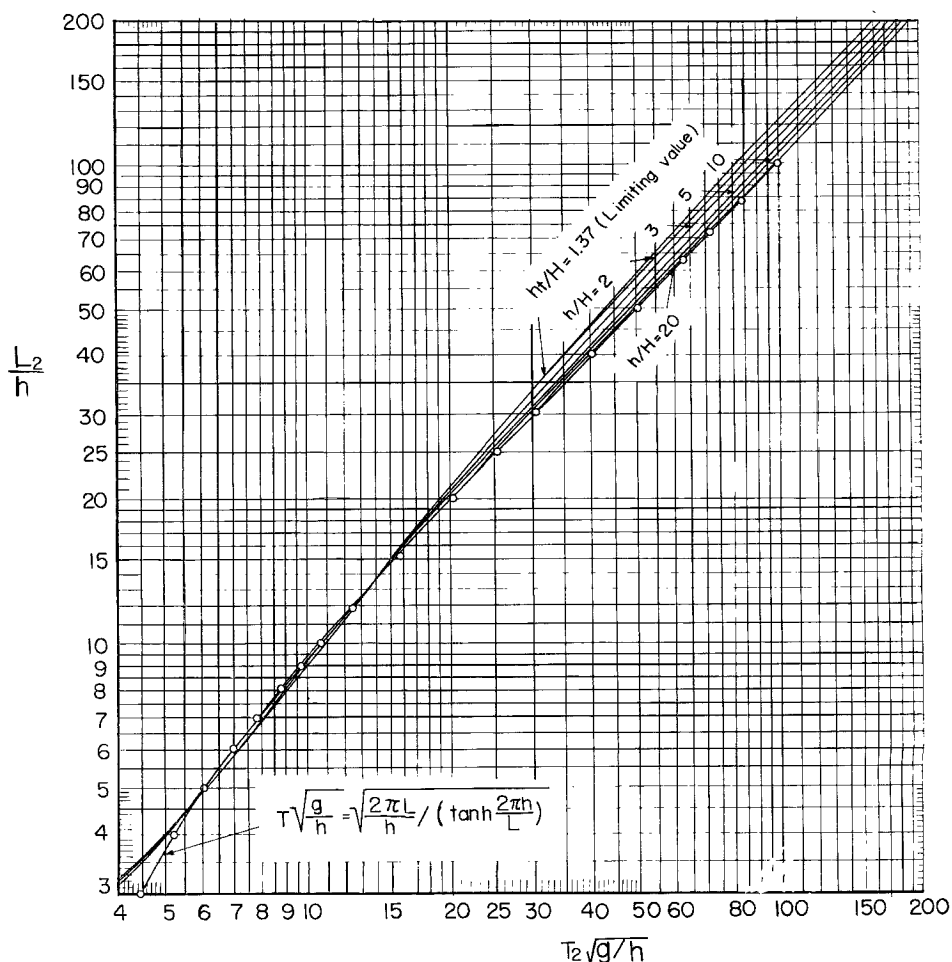


Fig. 4 Relationships between  $L_2/h$  and  $T_2\sqrt{g/h}$  with a parameter of  $h/H$ .

との関係に直し、さらに Fig. 2 を用いると  $h/H$  をパラメーターとした  $L/h$  と  $T\sqrt{g/h}$  との関係が求められる。Fig. 4 は第2近似についてこの関係を図化したものである。同図には、Fig. 3 と同様、微小振幅波の波長と周期の関係を示す式

$$T\sqrt{\frac{g}{h}} = \sqrt{\frac{2\pi L}{h} \left| \tanh \frac{2\pi h}{L} \right|} \dots\dots\dots(9)$$

によって求めた曲線も同時に描かれている。この図からも、 $T\sqrt{g/h}$  が 5.5 程度より小さい範囲ではクノイド波理論は適用されえないことが見出され、また 5% 程度の誤差を許すとすれば、 $5.5 \leq T\sqrt{g/h} \leq 20$  の範囲内では  $h/H$  の値に関係なくクノイド波理論を用いなくても、微小振幅波理論で十分であることがわかる。

(3) 水深変化にともなう波長および波速の変化

水深の深いところから浅いところへ波が進行してくると、波長および波速は変化して、波長は短くなり、波速はおそくなる。深海波の波長および波速は、それぞれ

$$L_0 = gT^2/2\pi, \quad c_0 = gT/2\pi \dots\dots\dots(10), (11)$$

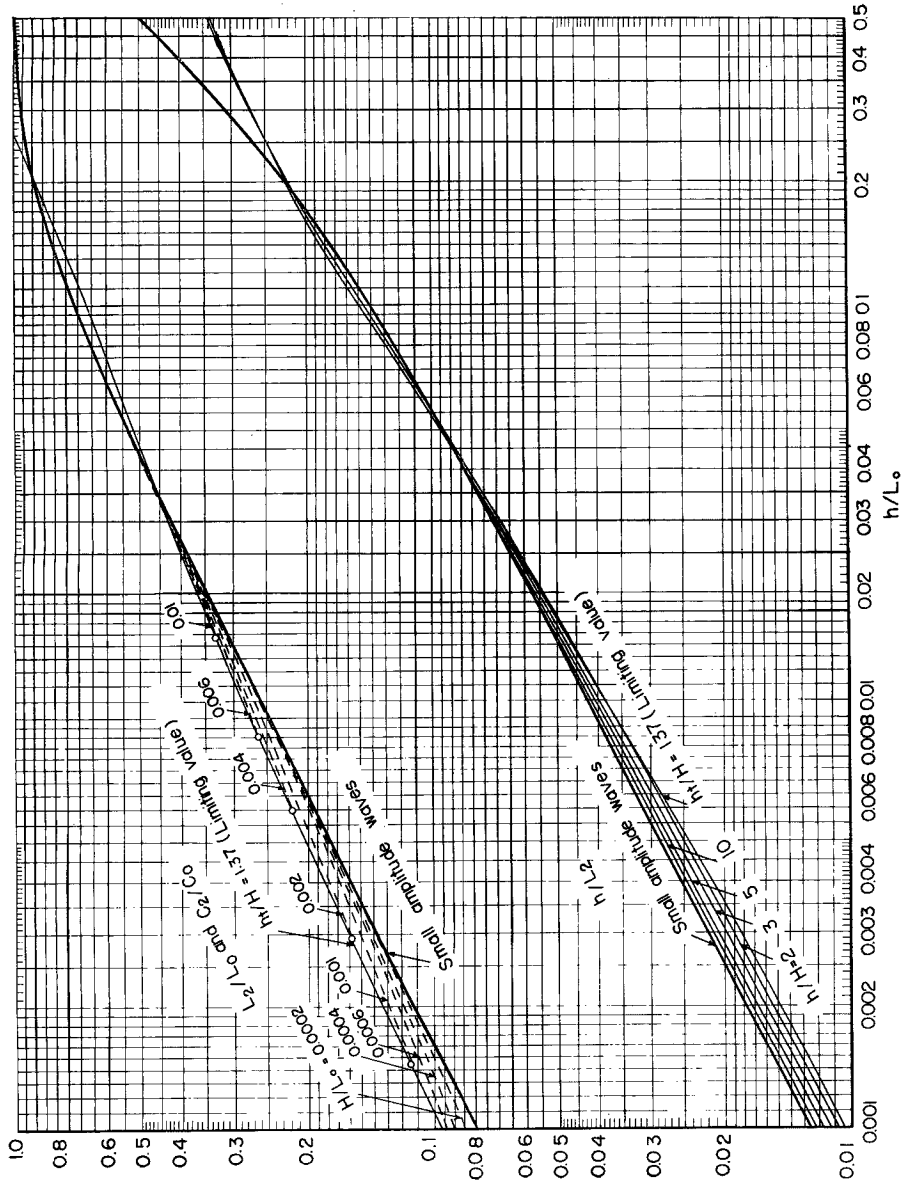


Fig. 5 Relationships between  $L_2/L_0$  or  $c_2/c_0$  and  $h/L_0$  with a parameter of  $h/L_0$  and between  $h/L$  and  $h/L_0$  with a parameter of  $h/H$ .

によってあらわされるが、 $L/L_0=L/(gT^2/2\pi)$  を変形すれば、

$$\frac{L}{L_0} = \frac{2\pi}{(T^2g/h)} \left( \frac{L}{h} \right) \dots\dots\dots(12)$$

となり、また  $L/L_0=c/c_0$  の関係があるから、

$$\frac{c}{c_0} = \frac{c}{(gT/2\pi)} = \frac{2\pi}{(T^2g/h)} \left( \frac{L}{h} \right) \dots\dots\dots(13)$$

とも書ける。Fig. 4 に示したように、 $T\sqrt{g/h}$  は  $L/h$  および  $h/H$  の関数であるから、 $L/L_0=c/c_0$  は  $h/L$  および  $h/H$  の関数である。また  $h/L$  は  $(h/L_0)(L_0/L)$  と変形されるから、 $h/L_0$  および  $h/H$  の関数としてあらわされ、したがって、 $L/L_0=c/c_0$  はまた  $h/L_0$  および  $h/H$  の関数となる。これらの関係を図化したものが Fig. 5 である。図の上の曲線群はパラメーターを  $h/H$  でなく  $H/L_0$  としてあらわした  $L/L_0=c/c_0$  と  $h/L_0$  との関係で、下の曲線群は  $h/H$  をパラメーターとした  $h/H$  と  $h/L_0$  との関係である。いずれも第2近似が用いてある。上の曲線群のパラメーターとして  $h/H$  でなく  $H/L_0$  を用いたのは、水深が変化して波が変形する場合、水深の入った量をパラメーターとするのは不都合だからである。しかし  $H/L_0$  を採用しても波高  $H$  が水深とともに変わるので都合が悪いが、波高変化はエネルギーの伝達から導かれ、ここではそれを取り扱っていないため、仕方なく  $H/L_0$  を採用した。水深減少による波高の増大はせいぜい深海波の波高の2倍までと考えられるので、この図から水深変化による波長や波速のおおよその変化を読みとることができる。なお、 $h_1/H=1.37$  の曲線上の○印は、各  $H/L_0$  の値に対する碎波限界を示したものであり、図中の微小振幅波の曲線は

$$\frac{L}{L_0} = \frac{c}{c_0} = \tanh \frac{2\pi h}{L} \dots\dots\dots(14)$$

をあらわしたものである。

いままではクノイド波と微小振幅波との比較をしてきたが、以下 Stokes 波との比較をしてみよう。Stokes 波としては第1報と同様 3rd order のものを採用することにすれば、波長比および波速比は、次式であらわされる<sup>5)</sup>。

$$\frac{L}{L_0} = \frac{c}{c_0} = \tanh \frac{2\pi h}{L} \left\{ 1 + (2\pi a/L)^2 \frac{\cosh 8\pi h/L + 8}{8(\sinh 2\pi h/L)^4} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

波高  $H$  と  $2a$  との関係は

$$\frac{H}{2a} = 1 + \pi^2 \left( \frac{a}{L} \right)^2 \frac{3}{16} \frac{8(\cosh 2\pi h/L)^6 + 1}{(\sinh 2\pi h/L)^6} \dots\dots\dots(16)$$

なお、ここでは、静水面の座標軸からの距離  $\delta$  は無視することにする。 $h/L=0.02$  および  $0.05$  の場合について計算した結果は Fig. 6 に示す通りである。図中の孤立波の曲線は、(6) 式にもとづいて、

$$\frac{L_2}{L_0} = \frac{c_2}{c_0} = \left( \frac{2\pi h}{L_2} \right) \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{H}{h} - \frac{3}{20} \left( \frac{H}{h} \right)^2 \right\}^2 \dots\dots\dots(17)$$

より求めたもので、波長比についてはこの場合見掛けの値に過ぎない。Fig. 6 からわかることは、 $h/L$  の値が大きき  $0.05$  程度のときは、クノイド波の第2近似と Stokes 波とは  $h/H$  が小さい場合を除けばよく一致するが、 $h/L$  の値が小さくなると漸次離れてゆき、 $h/L=0.02$  の場合に見られるように逆に孤立波の曲線に近づいてゆくことである。この場合孤立波との差は  $h/H=10$  のとき約4.5%、 $h/H=3$  の場合約9.2%である。

なお、Masch-Wiegel<sup>6)</sup> は電子計算機を用いて、クノイド波の数表を作成しているが、波の谷からの水深  $h_1$  を平均水深として計算していること、また波長の計算式として、第1報の(9)式で示される第1近似式よりもっと簡略化した式を用いていることなどから、水深・波高比が小さい場合にはかなり誤差が入ること

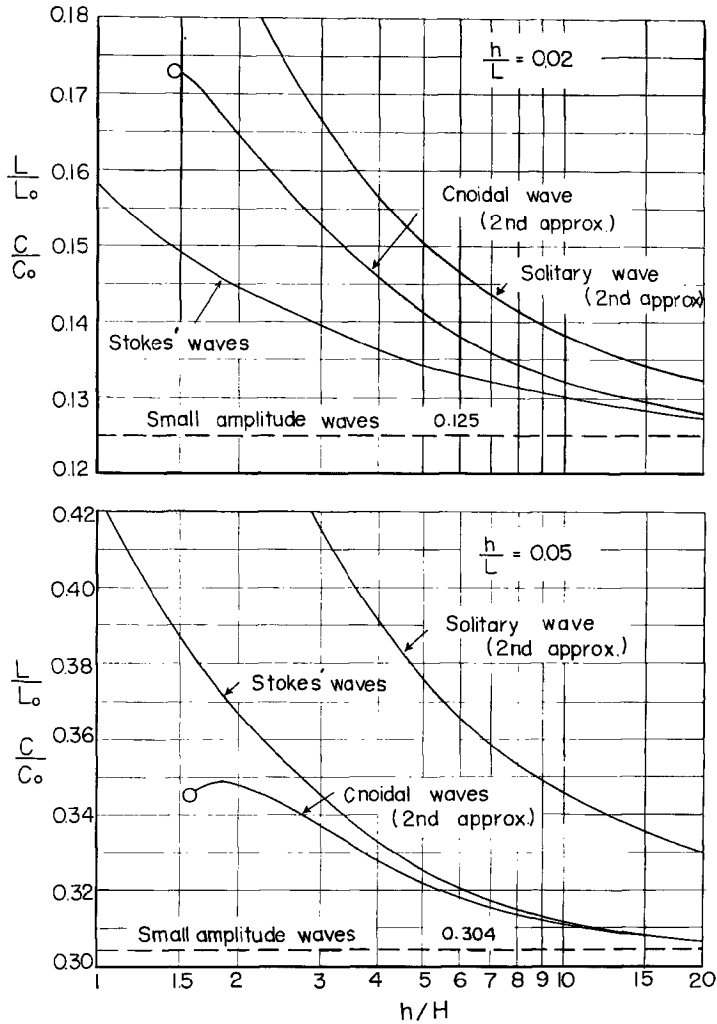


Fig. 6 Comparisons between  $L/L_0$  and  $c/c_0$  of cnoidal waves, stokes waves and solitary wave when  $h/L=0.02$  and  $0.05$ .

とが考えられる。これとの比較については、別の機会にゆずりたい。

また、最近、岸・佐伯<sup>7)</sup>はクノイド波の限界と波の峯高について検討しているが、やはり Korteweg de Vries の理論式を用いているので、 $h_i$  と平均水深が混同していて誤差がかなり含まれていると予想される。

#### 4. 結 語

以上、この論文では、第1報と同様 Laitone のクノイド波理論の結果を用い、波の周期、水深および波高を与えて波速および波長を求める実用的な図表を作成し示した。また、水深変化にともなう波長や波速の変化も、波高・沖波波長比をパラメーターとして図化しておいた。そして、さらに、第1近似と第2近似との比較、微小振幅波、Stokes 波および孤立波との比較も試み、近似の程度を明らかにした。なお、第1報に示した、波の谷から平均水面までの距離や波形についても、Fig. 2 を用いれば、波の周期、水深および



波高を与えて  $K$  を見出すことにより求めることができることを付記しておく。

最後に数値計算に協力して頂いた吉田宣子嬢に謝意を表するとともに、この研究は文部省特定研究費による研究の一部であることを付記する。

#### 参 考 文 献

- 1) 岩垣雄一：クノイド波に関する研究（第1報）—波形こう配および波形について—，京大防災研究所年報第7号，昭39.3，pp. 373~386.
- 2) Laitone, E.V. : The Second Approximation to Cnoidal and Solitary Waves, Jour. of Fluid Mechanics, Vol. 9, 1961, pp. 430~444.
- 3) Wilson, B.W., L.M. Webb and J.A. Hendrickson : The Nature of Tsunamis, Their Generation and Dispersion in Water of Finite Depth, National Science Co., Tech. Rep. No. SN 57-2, August 1952, pp. 1~150.
- 4) Laitone, E.V. : Limiting Conditions for Cnoidal and Stokes Waves, Jour. of Geophysical Research, Vol. 67, No. 4, April 1962, pp. 1555~1564.
- 5) Skjelbreia, L. : Gravity Waves, Stokes' Third Order Approximation, Tables of Functions, Council on Wave Research, The Engineering Foundation, 1959, pp. 1~337.
- 6) Masch, F.D. and R.L. Wiegel : Cnoidal Waves, Tables of Functions, Council on Wave Research, The Engineering Foundation, 1961, pp. 1~129.
- 7) 岸 力・佐伯 浩：クノイド波に関する研究，第11回海岸工学講演会講演集，昭39.11，pp. 7~11.