

開水路彎曲流の内部機構(Ⅱ)

村 本 嘉 雄

INTERNAL STRUCTURE OF FLOW THROUGH CURVED OPEN CHANNELS (Ⅱ)

by *Yoshio* MURAMOTO

Synopsis

As described in a previous paper¹⁾, the flow through a simple curved open channel may be divided into three regions; a generated region, a developing region and a fully developed region of secondary flow.

In the first part of the present paper, the existence and the properties of these regions are reexamined by a series of experiments shown in **Table-1**. From the longitudinal distributions of three mean vorticity components observed, it was found that the flow in the curved reach has the characteristics of the generated region and the developing region, and the fully developed region will be never reached in many practical cases.

In the second part, the vertical distributions of radial velocity with or without the effects of bed wall friction are discussed. Considering small perturbations from a flow as a free vortex, the distributions of radial velocity are derived from longitudinal vorticity equations for a laminar and a turbulent flow. The experimental results within the generated region support the theoretical considerations.

1. ま え が き

一般に、曲線水路における二次流の発生機構は「上流直線部のせん断流れを代表する渦度が彎曲部において主流(ポテンシャル流れ)によって変形する過程」として把握することができる。こうした二次流の概念および解析法は、Squire と Winter²⁾ が翼列内の流れに適用して以来、Hawthorne³⁾、Lighthill⁴⁾ などによって拡張、一般化され、近年、流体力学における二次流理論の一方をなしている。しかし、これまで発表されている理論では、渦度の変形、移送に際して、粘性による渦度の拡散が無視されている場合が多く、最近、Marris⁵⁾、Hawthorne⁶⁾ などによって、層流の場合についての若干の考察がなされているが、二次流の分布形を求めるまでに至っていないようである。

一方、開水路彎曲流に限定した場合、その二次流の分布形については、Rozovskii⁷⁾ が詳細な考察を行っており、最近、Ben-Chie-Yen⁸⁾ も同じ観点から検討を加えている。しかし、これらの取り扱いは、主流方向に変化のない、完全に発達した二次流に限定されており、発生、発達過程における現象に適用することはできないと考えられる。

前論文¹⁾では、開水路彎曲流の内部機構を巨視的に把握するために、三次元渦度成分の流れ方向の変化を実験的に検討し、彎曲部の流れに対して、発生域、発達域、一様域の三種の領域を定義し、各領域の特性に

ついて考察した。

本論文では、境界条件、水理条件の異なる若干の実験結果を補足し、各領域の特性と存在範囲について吟味する。また、二次流の分布形に関して、底面の影響による渦度の拡散を考慮する場合としない場合に分けて考察し、実験結果と比較検討する。

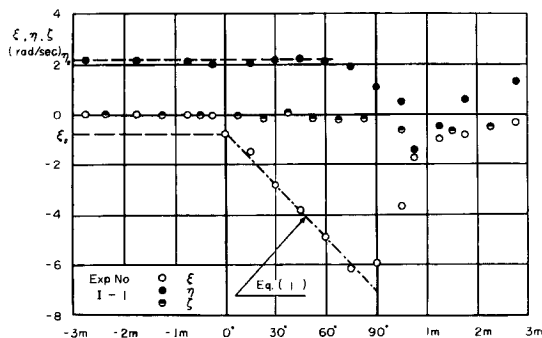
2. 渦度の特性

開水路弯曲部の流れに関係する形状要素は固定床に限っても多種多様であるが、ここでは、同心円状の単

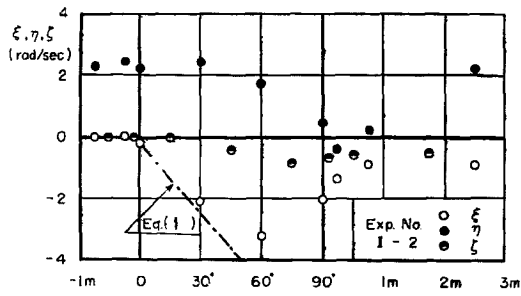
Table-1 Experimental Condition.

No. of Exp.	Channel characteristics Cross section, Material (Manning's n)	Deflection angle θ (degree)	Channel width B (cm)	Central radius r_c (cm)	r_c' $(\frac{r_c}{B})$	Bed slope i	Discharge Q (l/sec)	Mean depth of entrance h_i (cm)	R_e (10^4)	Fr_i
I - 1	Rectangular, Lucite ($n=0.00986$)	90	25	25	1	0.002	8.52	8.59	2.78	0.432
I - 2	" "	90	25	75	3	0.002	8.52	7.27	2.64	0.555
II - 1	Rectangular, Concrete ($n=0.0134$)	180	50	75	1.5	0.002	10.0	5.13	1.75	0.550
II - 2	" "	180	50	75	1.5	0.005	25.0	6.02	3.82	1.08
II - 3	" "	180	50	150	3	0.002	10.0	5.45	1.75	0.502
II - 4	" "	180	50	150	3	0.005	20.0	4.82	3.06	1.21
III - 1	Rectangular, Lucite ($n=0.00986$)	90	50	150	3	0.002	10.0	4.94	2.49	0.582
III - 2	Rectangular, Sand bed ($d_m=0.9\text{mm}$, $n=0.0160$)	90	50	150	3	0.002	10.0	6.44	2.28	0.391

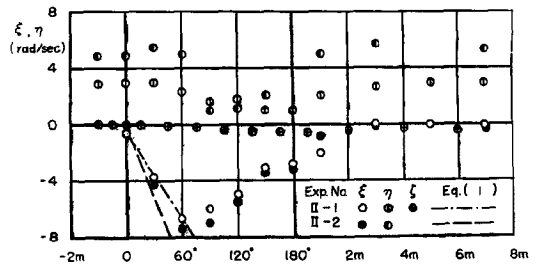
一弯曲部をもつ実験水路で行なった測定結果について考察する。実験方法の詳細はすでに発表しているの^{1), 9)}で省略するが、本文の考察に用いた実験値の諸条件を一括して **Table-1** に示す。**Table-1** で h_i , Fr_i は弯曲部流入点での平均水深とそれより求めた Froude 数である。



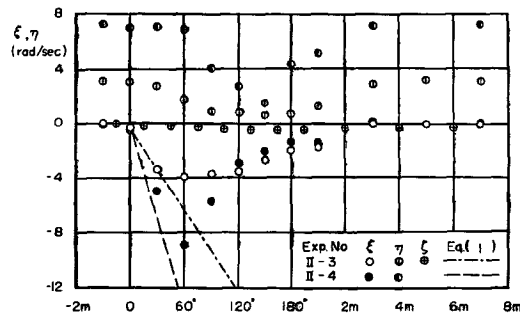
(a)



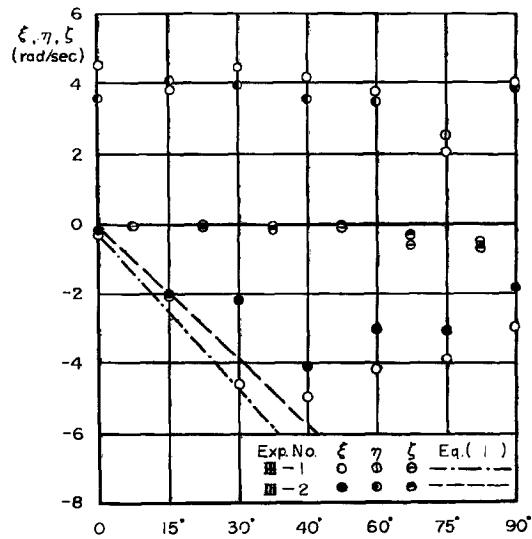
(b)



(c)



(d)



(e)

Fig. 1 (a)~(e) Longitudinal distributions of three components of mean vorticity.

前論文と同様の手法で、壁面近くを除いた流水断面内の代表的な渦度成分 ξ , η , ζ を求め、それらの水路中心線に沿った変化を図示すると Fig. 1 (a) ~ (e) のように表わされる。各図で、鎖線および破線は渦度保存則から導かれる式、

$$\xi = -2\eta_s \theta + \xi_s \dots \dots \dots (1)$$

を示している。これらの図より、上、下流直線部、弯曲部の渦度の特性および実験条件の影響を要約するとつぎのようになる。

1) 上流直線部における渦度は、 ξ が最も大きい I-1 のケース (Fig. 1 (a)) でも、上流25cmでその影響が消えており、通常、二次流は弯曲部流入点の極く近傍から発生するものと考えられる。

2) 下流直線部における渦度は、上流直線部に比して弯曲部の影響範囲が長く、2~4 mに及んでおり、普通 $\xi \sim 0$, $\eta \sim \eta_s$, $\zeta \sim 0$ に近づく減衰域としての特性をもっている。しかし、弯曲偏角が小さく、曲率が大きい場合には、Fig. 1 (a) にみるように、流出点付近でなお η が減少し、 ζ が発達する発達域の特性を保持することがある。

3) 弯曲部内では、すべてのケースで $\xi \sim \theta$, $\eta \sim \eta_s$, $\zeta \sim 0$ となる発生域および ξ , η が減少し、 ζ が発達する発達域が認められる。しかし、 $\xi \sim 0$, $\eta \sim 0$, $\zeta \sim \text{const}$ となり、一次元非粘性回転流としての上層部(境界層の外層)を仮定できる一様域の存在は明確でない。また、発生域における(1)式の適合性は実験ケースによって異なり、こうした粗視的な渦度表示では明らかでない。

4) Fr 数の影響は、Fig. 1 (c), (d) にみられるように、Fr 数の増大によって ξ の絶対値は増加しているが、各領域の範囲は変化していない。

5) 水路粗度の影響は、Fig. 1 (e) に示されるように、渦度の絶対値は変化しているが、領域範囲には明確な影響を与えていない。

6) 弯曲偏角 θ の影響は、 $r_c' = 3$ の Fig. 1 (b), (d), (e) の比較から検討すると、発生域の範囲について、(b), (d) では $\theta = 0 \sim 60^\circ$ で一致しているが、(e) では $\theta = 0 \sim 45^\circ$ で若干の差異がある。I-2, III-1 (Fig. 1 (b), (e)) のケースは θ , r_c' が同一なので、スケールの差、すなわち絶対長が現象に関係しているとも考えられるが、この測定範囲では明らかでない。

7) 曲率半径比 r_c' の影響は、 r_c' の小さい場合、発生域の範囲 (θ) が大きく、 ξ 変化の直線性が明確になっている。特に、 $r_c' = 1$ のケース (Fig. 1 (a)) では、その範囲が $\theta = 25^\circ$ まで及んでいるのが注目される。

以上、4) ~ 7) に述べた諸条件の他に Re 数、h/B、断面形状などの要素が考えられるが、本実験の範囲では明らかにできない。いま、上の渦度の特性に関する検討で、 $\partial|\xi|/\partial\theta \geq 0$ の範囲を一括して表示すると Table-2 のようになる。Table-2 には、従来よく検討されている主流の最大流速の位置 $r_M \geq r_c$ ($\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=r_c} \geq 0$) が比較されている。両者の範囲は対応する場合もあるが、II-1, 2のケースでは可成り差があり、 $u(r)$ 分布から二次流の特性を一義的に論ずることは難しいようである。なお、第三欄の θ_i については次節で考察する。

弯曲部における各領域の存在範囲については、 r_c' を主要素と考え、(r_c' , θ) 座標を用いた区分についてすでに発表した¹⁰⁾。しかし、上に述べたように、弯曲部の場合は噴流の Core region のように初期状態の領域を幾何学的形状だけから規定することは難しいと考えられる。

つぎに、水深方向、半径方向に異なる測点における渦度の特性について若干述べてみる。Fig. 2 (a), Fig. 2 (b) はそれぞれ水路中心 ($r=r_c$) で z 方向に異なる3点および z を一定とし r 方向に異なる3点の分布の一例を示したものである。渦度の算定は、測定間隔に限定され、 $\Delta r (= \Delta y) = 10\text{cm}$, $\Delta z = 1\text{cm}$, $\Delta x = 40\text{cm}$ (弯曲部) および $50\text{cm} \sim 100\text{cm}$ (直線部) をとっている。

Fig. 2 (a) にみられるように、底面近くでは弯曲部中央付近 ($\theta = 60^\circ \sim 90^\circ$) で ξ が一様化する傾向、流出点で $\eta = \eta_s$, $\zeta = 0$ への回復が早いなど、底面せん断応力の影響が若干みられる。また、外岸近傍では、側壁のせん断応力と遠心力の相互作用による流れの不安定性および二次流の発生が予想されるが、Fig. 2 (b)

Table. 2 Experimental results of extent of $\frac{\partial|\xi|}{\partial\theta} \geq 0$ and $r_M \geq r_c$, and critical position of generated region θ_i calculated from Eq. (28).

No. of Experiment	Station : θ (degree)				$\theta_i = \frac{0.44Q}{\kappa U_* r_c^2 \ln \frac{r}{r_1}}$
	Generated region $\frac{\partial \xi }{\partial\theta} > 0$	Developing region $\frac{\partial \xi }{\partial\theta} < 0$	$r_M < r_c$ $(\frac{\partial u}{\partial r} < 0)_{r=r_c}$	$r_M > r_c$ $(\frac{\partial u}{\partial r} > 0)_{r=r_c}$	
I - 1	0 ~ 75	90	0 ~ 90		193
I - 2	0 ~ 60	90	0 ~ 60	90	76.4
II - 1	0 ~ 60	90 ~ 180	0 ~ 150	180	52.1
II - 2	0 ~ 60	90 ~ 180	0 ~ 150	180	63.8
II - 3	0 ~ 60	90 ~ 180	0 ~ 60	90 ~ 180	26.0
II - 4	0 ~ 60	90 ~ 180	0 ~ 30	60 ~ 180	35.6
III - 1	0 ~ 45	60 ~ 90	0 ~ 45	60 ~ 90	27.3
III - 2	0 ~ 45	60 ~ 90	0 ~ 45	60 ~ 90	23.8

r_M : radial position of u_{max} .

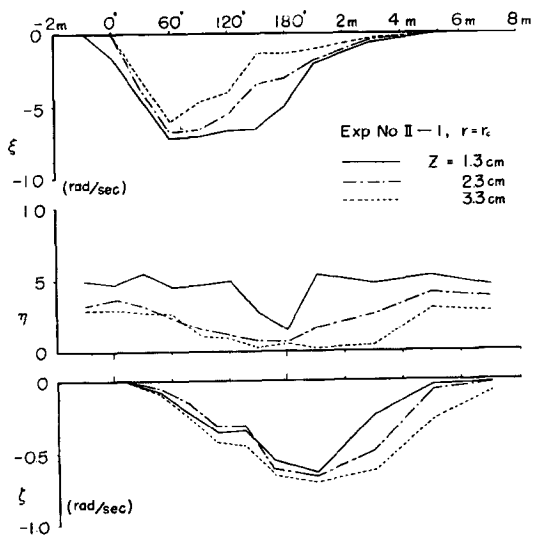


Fig. 2 (a) Longitudinal distribution of vorticity components at different depth and constant radius $r=r_c$.

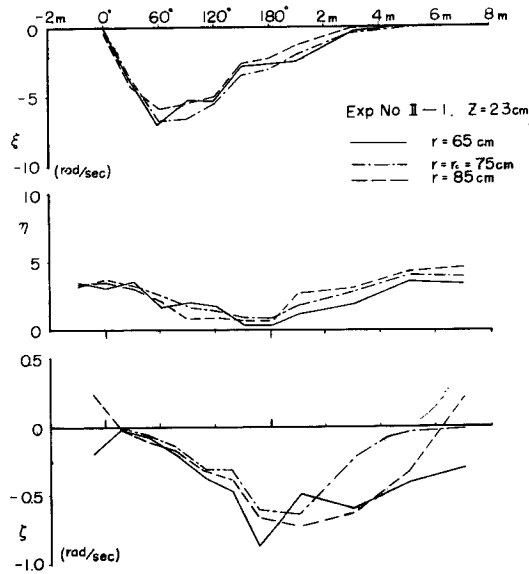


Fig. 2 (b) Longitudinal distribution of vorticity components at different radius and constant depth $z=2.3\text{cm}$.

の測定範囲では明らかでなく、 $r=r_c$ における特性を保持している。

以上、 r 、 z 方向に異なる点における渦度分布は、Fig. 1 の渦度分布とほぼ同じ傾向を示しており、大局的には前論文に述べた巨視的な内部機構の把握が可能と考えられる。

3. 二次流の流速分布

開水路弯曲部に発生する二次流の特性は前節で検討したように、渦度保存則にもとづく(1)式だけでは十分に記述できないように思われる。この点に関して吟味するために、横断方向の流速 v および渦度 ξ の鉛直方向の分布について、実験結果の一例を示すと Fig. 3 のようになる。この図は、前出の Fig. 1 (c) に対応

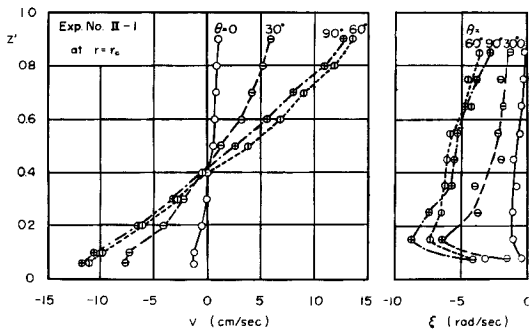


Fig. 3 Vertical distribution of radial velocity and longitudinal vorticity observed.

するもので、弯曲部前半で水路中央における二次流の発達を認めることができる。底面近傍の流向測定が困難なので、 v 分布の負の最大値はえられてないが、 ξ 分布の最大値 (v 分布の変曲点) が現われており、発生域においても底面付近における渦度の拡散を無視できないように思われる。

つぎに、前論文と同様に渦度式より出発して、底面の影響による拡散項の入らない場合と入る場合について、 ξ 、 v の分布形を求め実験値と比較検討してみよう。

ξ 成分に関する定常流の渦度式は、底面による鉛直方向の渦度の拡散を主体と考えるとつぎのように与えられる。

$$\left(\xi \frac{\partial}{\partial \theta} + r\eta \frac{\partial}{\partial r} + r\xi \frac{\partial}{\partial z} \right) u - \left(u \frac{\partial}{\partial \theta} + rv \frac{\partial}{\partial r} + rw \frac{\partial}{\partial z} \right) \xi = -\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\varepsilon \xi) \dots (2)$$

ここで、 ε は動粘性係数を表わし、層流では、 $\varepsilon = \nu$ 、乱流では渦動粘性係数 $\varepsilon = \kappa h U_* z'$ を仮定する。ただし、 $z' = z/h$ である。(2) 式で流速、渦度に関して、自由渦分布 $U = D/r$ (D : 定数) からの摂動を考え、二次以上の項を無視すると、

$$\frac{\partial \xi}{\partial \theta} = -2\eta + \frac{r^2}{D} \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\varepsilon \xi) \dots (3)$$

となる。ここで、 η を直線部の渦度 η_s に近似し、層流の場合 $\eta_s = \frac{U_*^2}{\nu}(1-z')$ 、乱流の場合、 ε の仮定に対応して、 $\eta_s = U_* / \kappa h z'$ と考える。なお、乱流の場合の ε 、 η_s の仮定については、せん断応力の分布を考えて、(a) $\varepsilon = \kappa h U_* z' (1-z')$ 、 $\eta_s = U_* / \kappa h z'$ 、(b) $\varepsilon = \kappa h U_* z' \sqrt{1-z'}$ 、 $\eta_s = \frac{U_*}{\kappa h} \sqrt{\frac{1-z'}{z'}}$ とおく場合も検討したが、関数形が複雑化するだけで、結果に本質的な差異がないので、ここでは、上述の最も単純な仮定による取り扱いだけを述べる。

(1) 拡散項を無視する場合

(3) 式で右辺第 2 項を無視し、

$$\partial \xi / \partial \theta = -2\eta_s \dots (4)$$

より、層流、乱流の場合について ξ 、 v を求める。

(a) 層流； $\theta = 0$ で $\xi = 0$ の条件を用いると (4) 式より、

$$\xi_i = -2 \frac{U_*^2}{\nu} \theta (1-z') \dots (5)$$

となる。広巾の弯曲水路では、鉛直方向の速度成分の影響は側壁近傍以外では小さいので、 $\xi \sim -\partial v / \partial z$ と近似する。 v に関する境界条件としては、底面 $z' = 0$ で $v = 0$ の条件と上、下層の連続関係 $\int_0^1 v dz' = 0$ が考えられるが、(4) 式の取り扱いでは底面のせん断応力の影響が無視されているので、後者を用いることにする。すなわち、現象としては、弯曲部流入点の底面で $v = 0$ であるが、弯曲部内では連続関係によって滑りが生ずると考える。この条件を用いると、(5) 式より

$$v_i = \frac{U_*^2 h}{3\nu} \theta f_i(z') = \frac{U_*^2 h}{3\nu} \theta (6z' - 3z'^2 - 2) \dots (6)$$

が得られる。

(b) 乱流； $\theta = 0$ で $\xi = 0$ の条件より

$$\xi_i = -\frac{U_*}{2\kappa h} \frac{1}{z'} \dots (7)$$

となる。(7) 式は底面まで適用できないので、粘性底層と接属すると考え、 $z' = \delta'$ において $\xi_i = \xi_i'$ とすると、 $\delta' = \nu / \kappa h U_*$ で与えられる。 $0 \leq z' \leq \delta'$ 、 $\delta' \leq z' \leq 1$ に対して、それぞれ (5) 式、(7) 式より v_i 、 v_i' を求め、

$$z' = \delta' \text{ で } v_i = v_i', \int_0^{\delta'} v_i dz' + \int_{\delta'}^1 v_i' dz' = 0$$

の条件より積分定数を決定するとつぎのようになる。

$$0 \leq z' \leq \delta' : v_i = 2 \frac{U_*^2 h}{\nu} \theta z' + 2 \frac{U_* \theta}{\kappa} \left(\ln \delta' - \frac{1}{2} \delta' \right) \dots (8)$$

$$\delta' \leq z' \leq 1 : v_i = 2 \frac{U_* \theta}{\kappa} \left(\ln z' + 1 - \frac{1}{2} \delta' \right) \dots (9)$$

しかし、通常、 $\delta' < 10^{-2}$ であって、(9) 式は極く底面近くまで、

$$v_i = 2 \frac{U_* \theta}{\kappa} f_i(z') = 2 \frac{U_* \theta}{\kappa} (\ln z' + 1) \dots (9')$$

によって近似できる。

いま、(6) 式、(9)' 式で境界条件に関係しない関数形 $f_i(z')$ 、 $f_i'(z')$ を図示すると、Fig. 4 のよ

うになる。 $f_l(z')$ 曲線の0点は $f_t(z')$ 曲線のそれより上にあつて、曲管などで得られている実験事実に対応している。

本実験は乱流状態にあると考えられるので、(9)'式と v 測定値とを比較した結果を Fig. 5 (a) ~ (c) に示す。なお、(9)'式で κ は発生域を考え、直線流に対応する $\kappa=0.4$ をとり、 U_* は水面こう配の平均値を加味し、 $U_* = \sqrt{ghI_c}$ (I_c : エネルギーこう配) より算定した。

Fig. 5 (a) は Fig. 1 (c) に対応する実験値で、発生域と考えられる $\theta=30^\circ, 60^\circ$ の断面では(9)'式に近い値を示すが、発達域と考えられる $\theta=90^\circ$ 以降では、当然、理論曲線からはなれる。また、底面近くでは、発生域における実験値でも理論曲線より小さい値を示しており、 $\theta=30^\circ$ より $\theta=60^\circ$ で底面の存在による粘性の影響が上方に及んでいることが注目される。Fig. 5 (b) は6種の実験ケースで発生域と考えられる $\theta=30^\circ$ の断面の水路中央における実験値を示したものである。底面近くを除いて、(9)'式にはほぼ一致していると考えられる。Fig. 5 (c) は、 $v(z)$ 分布の半径方向の変化に対する(9)'式の適合性を検討するために、II-3の $\theta=30^\circ$ の断面で5測点の実験値を示したものである。図にみられるように、 $r=130, 150\text{cm}$ の内岸、外岸近くでは、上層部でも理論曲線から可成りはなれており、特に外岸近くの測定値のずれが大きい。(9)'式の U_* の算定に水面こう配の影響を加味しても充分でなく、鉛直方向の速度成分の影響、外岸における流れの不安定性などの効果を検討する必要がある。

(2) 拡散項を考慮する場合

(3) 式で $\partial\xi/\partial\theta=0$ の場合と $\partial\xi/\partial\theta \neq 0$ の場合に分けて考える。

(i) $\frac{\partial\xi}{\partial\theta}=0$ の場合

$$\frac{\partial^2(\xi\xi)}{\partial z^2} = 2D\eta_s/r^2 \dots\dots\dots (10)$$

この式は、 ξ が主流方向に変化しなくなった状態、すなわち、Rozovskii などが考察している充分に発達した二次流に対応するものと考えられる。しかし、(10)式の誘導過程では、 $\eta=\eta_s, \xi=0$ の条件が前提となっているので、実際現象をどの程度表現できるか疑問である。以下に、層流、乱流の場合について v 分布形を求め、Rozovskii の式とあわせて実験値と比較検討してみよう。

(a) 層流: 境界条件として、底面 $z'=0$ で $v=0$ 、水面 $z'=1$ で $\xi=0$ および前述の

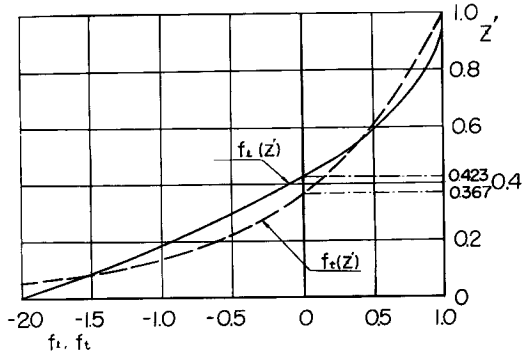
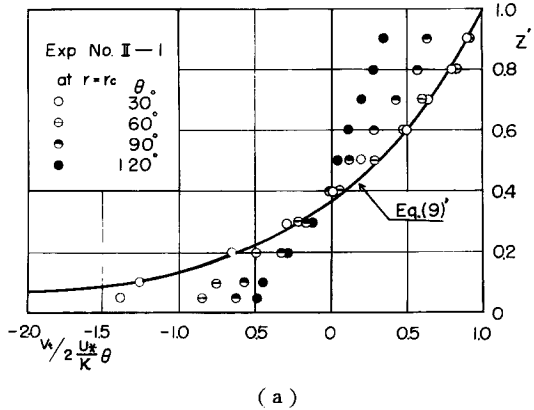
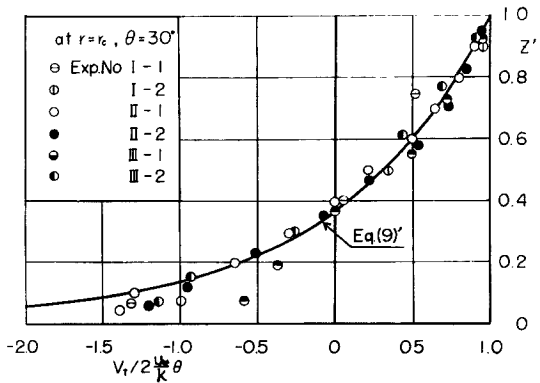


Fig. 4 Curves of $f_l(z')$ and $f_t(z')$ in Eqs. (5) and (9)', respectively.



(a)



(b)

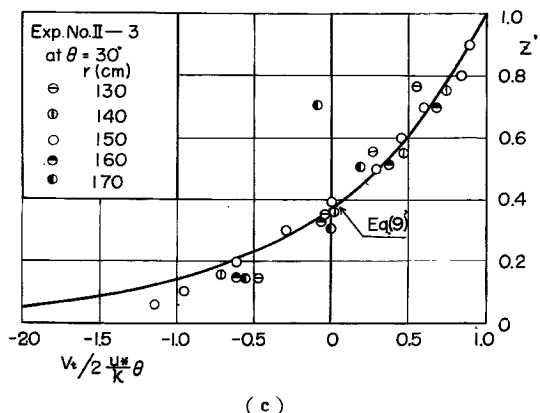


Fig. 5 (a)~(c) Comparison between theoretical distribution of radial velocity and experimental results.

$\int_0^1 v dz' = 0$ の条件を用いて (10) 式より ξ , v 分布を求めるとつぎのようになる。

$$\xi_t = -\frac{D}{15r^2} \left(\frac{U_* h}{v}\right)^2 (5z'^3 - 15z'^2 + 12z' - 2) \dots\dots\dots (11)$$

$$v_t = \frac{Dh}{60r^2} \left(\frac{U_* h}{v}\right)^2 g_t(z') = \frac{Dh}{60r^2} \left(\frac{U_* h}{v}\right)^2 (5z'^4 - 20z'^3 + 24z' - 8z') \dots\dots\dots (12)$$

(b) 乱流；境界条件として、 $z' = 1$ で $\xi = 0$ および $\int_0^1 v dz' = 0$ の条件を用い、前項と同様に底層付近の検討を行なうと、 $1 \geq z' \geq \delta'$ の ξ , v 分布形は近似的につぎのように表わされる。ただし、この場合、 $\delta' \approx 7.5 \left(\frac{v}{\kappa U_* h}\right)^2 \leq 10^4$ である。

$$\xi_t = \frac{D}{\kappa^2 r^2} \left(2\ln z' + 1 - \frac{1}{z'}\right) \dots\dots\dots (13)$$

$$v_t = \frac{Dh}{\kappa^2 r^2} g_t(z') = \frac{Dh}{\kappa^2 r^2} (z' - 2z' \ln z' + \ln z') \dots\dots\dots (14)$$

(12) 式、(14) 式で境界条件に関係しない関数形、 $g_t(z')$, $g_t(z')$ を図示すると、Fig. 6 のようになる。層流の場合、 $v = 0$ の点は水深の 1/2 より上にあつて、(5) 式の $f_t(z')$ より底面の影響が効いていることがわかる。

乱流の場合について、彎曲部後半の測定値と比較した結果を Fig. 7 (a) ~ (d) に示す。これらの図で実線は、つぎの Rozovskii の式を表わしている。

$$v = \frac{u_m h}{\kappa^2 r^2} \left[F_1(z') - \frac{\sqrt{g}}{\kappa C} F_2(z') \right] \dots (15)$$

ただし、 $F_1(z') = \int \frac{2\ln z'}{z'-1} dz'$, $F_2(z') = \int \frac{\ln^2 z'}{z'-1} dz'$, $\kappa = 0.5$, C ; Chézy 係数および u_m は r 点における主流の平均流速である。また、(14) 式に含まれる定数 D は Basic flow として自由渦分布を仮定していることから $D = Q/h \ln r_2/r_1$ (r_1 : 内岸の半径, r_2 : 外岸の半径) とし、 κ は発達域における η の減少を考え、平均値として $\kappa = 0.55$ を用いた。したがって、(14) 式の係数は $D/\kappa^2 r^2 \approx 3.3Q/r^2 \ln r_2/r_1$ となる。

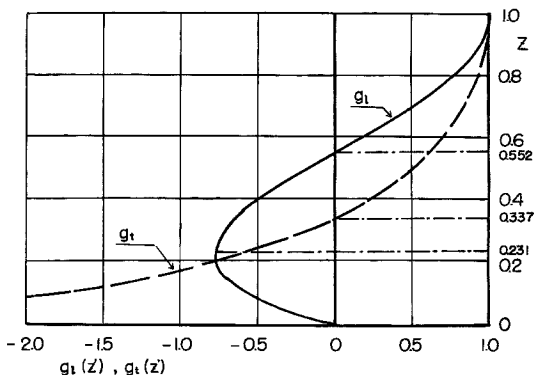


Fig. 6 Curves of $g_t(z')$ and $g_t(z')$ in Eqs. (12) and (14), respectively.

なお、発達域における $u(z)$ 分布はほぼ対数則に従うが、上、下層で若干、曲折する場合もある。また、速度こう配 ($\sim \eta$) の減少を κ の変化に帰着させる点も問題であるが、 u 分布に関する詳細な検討は別報で述べるつもりである。

Fig. 7 (a) ~ (d) よりわかるように、Rozovskii の式は発達域の初期 ($\theta=90^\circ$) の実験値と全体的な傾向は似ているが、 $v=0$ 点が実験値より高く、絶対値の評価には問題がある。また、 v 分布が変形する $\theta=120^\circ\sim 180^\circ$ の断面では水面付近で食い違いが大きくなる。一方、(14) 式では、水面付近の条件が加味されているので、 $\theta=120^\circ\sim 180^\circ$ 断面の実験値と上層部の特性は類似しているが、底面付近で両者の差が大きく、底層の条件を検討する必要がある。また、**Fig. 7 (a)**、**(b)** に関しては、 κ を各断面で補正することによってより近い分布形をうるが、変形の著るしい **Fig. 7 (c)** のケースおよび **Fig. 7 (d)** の側壁近くの分布は記述できない。

以上、実験値は発達域にあって三次元的な特性が現われており、理論曲線はいずれも一次元的な取り扱いであるので、本質的に適用が困難と考えられる。

(ii) $\frac{\partial \xi}{\partial \theta} \neq 0$ の場合

(3) 式を解く際に、右辺第1項による付加項として(4)式の解をとる場合と(10)式の解をとる場合が考えられる。しかし、発達の極限として後者をとり、それへの漸近解を求めることは、上に検討したように現象からみて問題がある。したがって、前者を考え、(3)式の解を

$$\xi = -2\eta_s \theta + \xi_1(\theta, z') / \varepsilon \dots (16)$$

の形で与える。(16)式を(3)式へ代入することにより、 ξ_1 に関する式は、層流、乱流の場合についてそれぞれつぎようになる。

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial \theta} = \frac{\nu r^2}{Dh^2} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial z'^2} \dots (17)$$

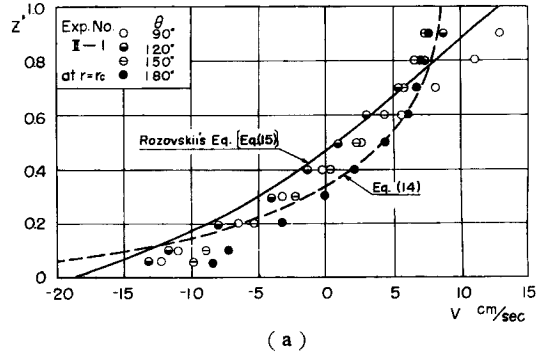
$$\frac{\partial \xi_1}{\partial \theta} = \frac{\kappa U_*^* r^2}{Dh} z' \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial z'^2} \dots (18)$$

(17)式に対して $s = \sqrt{\frac{D}{4\nu\theta}} \frac{h}{r} z'$ 、(18)式に対して $s = \sqrt{\frac{Dh}{\kappa U_*^* \theta}} \frac{z'^{1/2}}{r}$ を用いて変数変換を行なうと、 $\xi_1(s)$ に関する式、

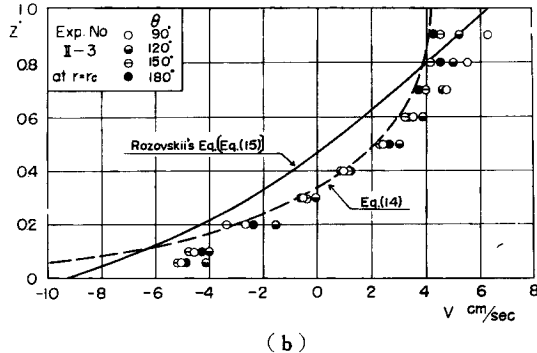
$$d^2 \xi_1 / ds^2 + 2s d\xi_1 / ds = 0 \dots (19)$$

あるいは、その解として、

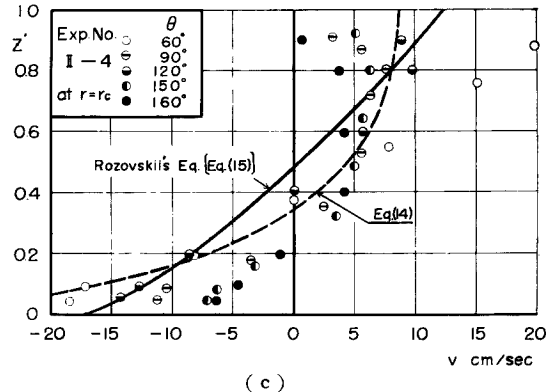
$$\xi_1 = A_1 \text{erfs} + A_2 \dots (19')$$



(a)



(b)



(c)

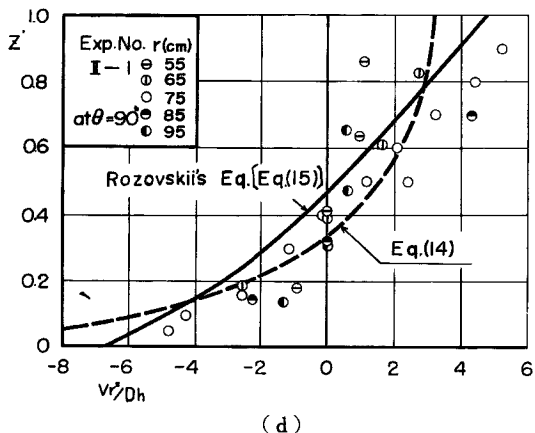


Fig. 7 (a)~(d) Comparison with theoretical distributions of radial velocity and experimental results.

が得られる。ここで、 A_1, A_2 は積分定数、 $erfs = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s \exp(-s^2) ds$ である。いま、自由表面 $s = s_n$ で $\xi_1 = 0$ および $erfs_n \sim 1$ を考えると、(19)' 式は新たな積分定数 A を用いて

$$\xi_1 = A(1 - erfs/erfs_n) = A(1 - erfs) \dots\dots\dots (20)$$

で表わされる。したがって、(16) 式は層流、乱流の場合について、それぞれつぎのようになる。

$$\xi = -2\frac{U_*^2}{\nu} \theta (1 - z') + A_1(1 - erfs) \dots\dots\dots (21)$$

$$\xi = -2\frac{U_* \theta}{\kappa h} \frac{1}{z'} + A_1(1 - erfs) \dots\dots\dots (22)$$

また、 v に関する式は、水面における流速 v_h を用いてつぎのように表わされる。

$$v = \left\{ \frac{U_*^2 h}{\nu} \theta (2z' - z'^2 - 1) + v_h \right\} - A_1 \sqrt{\frac{4\nu\theta}{D}} r \left(s - \int erfs dt \right) \dots\dots\dots (23)$$

$$v = \left\{ 2\frac{U_* \theta}{\kappa} \ln z' + v_h \right\} - 2A_1 h \left(\ln s - \int \frac{1}{t} erfs dt \right) \dots\dots\dots (24)$$

(21) 式、(22) 式で右辺第 1 項は慣性力のみによって生ずる負の方向の渦度、第 2 項がそれを減衰させる正方向の渦度を表わしている。いま、前者を ξ_i 、後者を ξ_d で表わし、 $\xi = \xi_i + \xi_d$ に対応する v を考えると、弯曲部流入点付近で底面近くの現象の概観は、乱流の場合について Fig. 8 のようになる。すなわち、

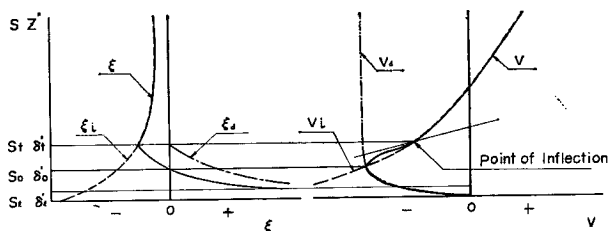


Fig. 8 Schematic representation illustrating generation and viscous diffusion of secondary vorticity or flow.

底面の影響が及ぶ限界点 $z' = \delta'_i$ ($s = s_i$) において v 分布に変曲点が現われ、 $-\xi_i = \xi_d$ の点 $z' = \delta'_o$ ($s = s_o$) において v は負の最大値をとる。また、底面の極く近傍 $0 \leq z' \leq \delta'_i$ ($0 \leq s \leq s_i$) では粘性底層の領域にあって、底面で $\xi = const$ 、 $v = 0$ になると考えられる。しかし、(23) 式、(24) 式における右辺第 1 項 (v_i) 第 2 項 (v_d) の関数形はそれぞれ Fig. 8 の破線、鎖線で示すようになり、単に、 $v_d + v_i$ としては実線の

vを得ることができない。そこで、v分布を $0 \leq z' \leq \delta_o'$ では v_d , $\delta_o' \leq z' \leq 1$ では v_i で近似できると仮定する。こうした取り扱い、水路の Inlet length の解析に対応するが、この場合、上層部の流れが $v_i = 0$ から出発する回転流であること、発達極限の分布形が明らかでない点に問題がある。

上の仮定にもとづいて v の分布形を定めるには、 δ_o' , A_l (A_t), v_h の三つの値を与えなければならない。いま、 δ_o' に関しては、(23)式、(24)式の第2項の()内の関数がほぼ一定値になる限界の s (≈ 1.5)より求め、 A_l (A_t), v_h は $z' = \delta_o'$ で $v_d = v_i$, $\int_0^{\delta_o'} v_d dz' + \int_{\delta_o'}^1 v_i dz' = 0$ の条件より求める。その結果、層流の場合

$$\delta_o' = 1.5 \sqrt{\frac{4\nu\theta}{D}} \frac{r}{h} \dots\dots\dots (25) \qquad v_h = \frac{1}{3} \frac{U_*^2 h}{\nu} \theta (1 + 1.28\delta_o') \dots (26)$$

$$A_t = \frac{U_*^2}{\nu} \theta (1.81 \frac{1}{\delta_o'} - 6.63) \dots\dots\dots (27)$$

乱流の場合、

$$\delta_o' = 2.25 \frac{\kappa U_* \theta}{Dh} r^2 \dots\dots\dots (28) \qquad v_h = \frac{2U_* \theta}{\kappa} (1 + 3.96\delta_o' + 2.96\delta_o' \ln \delta_o') \dots (29)$$

$$A_t = 1.05 \frac{U_*^2}{\kappa h} \theta (1 + 1.96\delta_o' + \delta_o' \ln \delta_o') \dots (30)$$

が得られる。ただし、 v_h , A_l (A_t) に関する式は $\delta_o' \leq 10^{-1}$ に対するものである。

以上の考察については、現在まだ詳細な検討を行っていないが、底面の影響が水面に及ぶ限界を(28)式および前述の定数 D を用いて求めると、

$$\delta_o' = 1 ; \theta_i = \frac{Dh}{2.25\kappa U_* r^2} = \frac{0.44Q}{\kappa U_* r_c^2 \ln r_2/r_1} \dots\dots\dots (28)'$$

となる。(28)'式で $\kappa = 0.4$ として、Table-1の各実験ケースについて θ_i を求めた結果を Table-2 に示してある。 θ_i は実験値の発生域の限界とほぼ対応する場合もあるが、その範囲内に含まれる場合が多く、適用範囲が限られたものとなる。Inlet length の推定においても、こうした結果がみられるようであるが、今後、上式を誘導する際に用いた仮定について検討したいと考えている。

4. 結 び

以上、本論文では、Table-1に示した8種の実験結果より前論文で定義した領域区分を再検討し、湾曲部においては、発生域、発達域の特性が主体となることを明らかにした。また、二次流の分布形について、直線流の渦度が粘性の影響を受けずに変形する過程を主現象と考え、底面の摩擦による拡散を副次的なものとして考察した。この方向にそって解析する場合、湾曲部の形状に対応する主流の仮定、底面近傍における取り扱い、および連続の関係が問題となる。本文の考察では、これらに対して、自由渦分布、境界層的な接続および上、下層の連続関係という単純な仮定を用いた。発生域の範囲では、このようにして現象をある程度説明できるが、渦度の変形が著るしくなる発達域にまで拡張することはできない。

今後、これらの仮定を再検討し、現象に対する近似度を高める方向とともに、内、外岸付近の流れの挙動に関連して、壁面近傍の流れの安定性について検討したいと考えている。

最後に、本研究にあたり御指導、御鞭撻をいただいた芦田教授に感謝の意を表するとともに、実験および整理に際して多くの労をかけた鈴木健志君に感謝する次第である。

参 考 文 献

- 1) 村本嘉雄, 井上喬之; 開水路湾曲流の内部機構, 京大防災研究所年報, 第8号, 昭40.3.
- 2) Squire H.B. and K.G. Winter; The Secondary Flow in a Cascade of Airfoils in a Nonuniform stream, J. Aeronaut. Sci., 18, 1951.
- 3) Hawthorne W. R.; Secondary Circulation in Fluid Flow, Proc. Roy. Soc., A 206, 1951.

- 4) Lighthill M. J. ; Drift, *J. Fluid Mech.*, 1, 1956.
- 5) Marris A. W. ; The Generation of Secondary Vorticity in a Incompressible Fluid, *Trans. ASME, Ser. D*, Dec. 1963.
- 6) Hawthorne W. R. ; *Engineering Aspects—Research Frontiers in Fluid Dynamics* (Ed. by Seeger & Temple), John Wiley & Sons., New York, p. p.1-29, 1965.
- 7) Rozovskii I. L. ; Flow of Water in Bends of Open Channels, *Acad. Sci. Ukrainian SSR*, 1957.
- 8) Ben-Chie-Yen ; Characteristics of Subcritical Flow in a Meandering Channel, Report of Institute of Hydraulic Research, Univ. of Iowa, 1965.
- 9) Muramoto Y. ; Flow through Curved Open Channels, *Bull. of Disaster Prevention Research Institute Vol. 14, Part 2*, 1965.
- 10) 村本嘉雄；開水路弯曲流の水理学的特性に関する研究（その7），土木学会関西支部年次学術講演会講演概要，昭40.11.