

地震動のシミュレーションとその応用

土 岐 憲 三

SIMULATION OF EARTHQUAKE MOTION AND ITS APPLICATION

By *Kenzo TOKI*

Synopsis

This study concerns the response of a structure with single degree of freedom to earthquakes which are represented as nonstationary random process. The earthquake motion is assumed to be a product of nonstationary deterministic function and stationary random process of which spectral density is arbitrary. By use of this representation the artificial earthquakes are generated on digital computer.

The response of structure is treated as the problem of the threshold crossing and then the expected number of the excess of responses over a certain level is calculated. The consideration is carried out on the effect of spectral characteristics of earthquakes by the presented response spectrum which contains a probabilistic quantity as a parameter.

1. 緒 言

構造物の耐震設計には地震波形の設定が何等かの方法が必要であるが、地震動が地盤の条件、地震の規模、地震波の伝播過程などの多くの因子の影響を受けて非常に複雑な動的挙動を示すものであり、また地震波形の非予測性、非再現性という面から見ても、あらゆる耐震設計に有用な標準となる地震波形が設定される可能性はきわめて少ないものと考えざるを得ない。こうした事情のため、現在の耐震設計における地震波形の設定は、実際の地震動によって得られた特定の地震記録による方法と、数学的に表現した模擬の地震波形による方法とが、その場合に応じて適当に取捨選択して用いられている。耐震工学の面から見た地震動そのものの性質、特に耐震工学上最も重要な意味を持つ強震の特性を明らかにするための研究においては前者の方法が用いられるのは当然であるが、耐震設計を目的とした振動系の地震応答解析や設計された特定の構造物の地震に時する安全性の検討などにおいて行なわれる逐次応答計算などでもしばしば用いられる方法である。このような場合、EL-Centro, May 18, 1940, Taft, July 21, 1952, Vernon, Oct. 2, 1933, Niigata, June 16, 1964, などの実地震記録がよく用いられるが、これらを用いる理由としては構造物の地震応答、とりわけ非線型振動系に対しては重ね合わせの原理が成立しないことから、系の応答に及ぼす入力地震波形の影響が大きく、その故に応答計算に用いる入力地震波形は、実際に得られた地震記録によるべきであるという論が行なわれる。しかしながら、われわれが行なう耐震設計は未来に発生するであろう自然現象を対象としなければならないという宿命を持つ以上、地震動の時間的変動あるいは地震波形の非予測性、非再現性を考慮すれば、過去の特定の時点、特定の場所で得られた地震波形を耐震設計の標準入力として用いることの妥当性に関しては疑問を持たざるを得ない。しかるに構造物の地震応答計算における入力としてこれらの過去の強震記録がしばしば用いられるのは、それらが実際の地震によって記録されたものであるという裏づけを持っていること、異なった研究あるいは研究者によっても共通のデータとして使用し得るというなかば標準化された性格を有しているからにほかならない。

次に、実際の地震動ないしはその記録波形の持つ特性を抽象化した模擬地震波形を応答解析に用いる方法は二つの方法に大別できよう。その第1は構造物に破壊的な影響を及ぼすのは地震波形のうちでも特別な強度と周期を伴った数波にすぎないという立場から、これを矩形波や正弦波から構成される時間軸における確定関数で表現する方法であり、その第2は確率過程として把握する方法である。特にこの第2の立場は地震波の不規則性に注目して、これを時間軸上に不規則に配列されたパルス³⁾や white noise⁴⁾として表わした地震波による構造物の応答が、実地震記録による応答とよく一致することから、これらを応答解析における地震波形とする方法であり、また一方では構造物の造られる地表面付近に達する地震波動は震源で発生した地震動が地盤内を通過して到達したものであることから、これを特定の周波数特性を有する振動系の応答⁵⁾として表現する場合もある。

地表面付近で観測される地震動がその地盤の影響を受けやすいという見地からは、地震波形を確率過程として表現する場合にも、地盤の周波数特性を考慮することが望ましいが、それは必ずしも振動系の周波数応答で抽象されるとは限らないから、そのような方法に一般性を持たせるには周波数特性の自由な選択が可能な方法が都合がよい。そこで本研究では任意の周波数特性を有する定常確率過程⁶⁾と時間に関する確定関数との積で構成される非定常確率過程で地震波形を模擬し、このような入力地震波に対する構造物の応答に及ぼす地震波の持つ周波数特性の影響および地震波を確率過程として表わした場合の確率量を導入した応答スペクトルの概念について検討を行なったものである。

2. 確率過程による地震波形のシミュレーション

地震波形を確率過程として表現し、これに対する構造物や基礎地盤の応答に関する研究はすでに広く行なわれており、特に定常確率過程としての取り扱い耐震工学上における各種の問題に応用されている。このような定常確率過程としての解析においては相関関数やスペクトル密度の概念が導入されるが、確率過程で模擬した地震波形に地盤の有する周波数特性を反映させるためには、そのスペクトル密度が自由に換えられねばならない。その方法としては、ランダムパルス列によるショットノイズ型の定常確率過程がよく用いられ、この方法では理論的には任意のスペクトル密度を周波数領域において与えることができるが、これを時間領域において表現するためにはスペクトル密度の平方根の逆フーリエ変換が可能でなければならないため、任意のスペクトルを与えることは実際上困難が伴う。特に、構造物の建設される地点の地盤の特性を反映させるために、常時微動の測定などによって得られた周波数特性を地震波形のスペクトルとする場合には、これが必ずしも関数表示できるとは限らないため、ショットノイズ型による表現が不便な場合がある。そこで本研究においては周波数領域においては任意のスペクトルを持ち、時間領域では確率変数の導入により簡単な解析関数で表現できる定常確率過程と非定常性を規定する時間に関する確定関数との積で地震動を模擬し、そのスペクトルの変形についても言及した。

2.1 任意のスペクトルを有する定常確率過程

余弦波の重ね合わせとして与えられる関数 $g_N(t)$ を考える。

$$g_N(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \cos(\eta_n t + \varphi_n) \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 η_n, φ_n は確率変数であり、 N は正整数である。上式において $g_N(t)$ は時間 t を固定すれば確率的に定まる量の無限和であるから、中央極限定理により η_n, φ_n に無関係に、その値はガウス分布をすることになり、 $g_N(t)$ はガウス過程であることがわかる。したがって、 $g_N(t)$ は任意の確率変数を持つことができるから、いまこれを次式のように表わす。

$$g(\eta, \varphi; t) = \cos(\eta t + \varphi) \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 η は確率密度 $p_\eta(\eta)$ を持つ確率変数であり、 φ は $[0, 2\pi]$ で一様分布をする位相角である。

式(2)で表わされる定常確率過程の自己相関関数 $R_g(\tau)$ は

$$R_g(\tau) = E[\{g(\eta, \varphi; t)\} \{g(\eta, \varphi; t + \tau)\}] = \frac{1}{2} E[\cos \eta \tau + \cos \{\eta(2t + \tau) + 2\varphi\}]$$

しかるに φ は $[0, 2\pi]$ で一様分布をとるから

$$E[\cos \{\eta(2t + \tau) + 2\varphi\}] = 0$$

である。したがって、次式が成立する。

$$R_g(\tau) = \frac{1}{2} E[\cos \eta \tau] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} p_g(\eta) \cos \eta \tau d\eta$$

ここで、 $p_g(\eta)$ は $\eta < 0$ に対しては 0 とすれば、式 (2) で表わされる確率過程の自己相関関数は次式のごとくになる。

$$R_g(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} p_g(\eta) \cos \eta \tau d\eta \dots\dots\dots (3)$$

一般に、定常確率過程に対しては、その自己相関関数とスペクトル密度とはフーリエ変換の対をなすから、 $g(\eta, \varphi; t)$ のスペクトル密度を $S_g(\omega)$ とすれば次式が得られる。

$$\begin{aligned} S_g(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_g(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_0^{\infty} p_g(\eta) \cos \eta \tau e^{-i\omega\tau} d\eta \\ &= \pi \int_0^{\infty} p_g(\eta) \{\delta(\omega - \eta) + \delta(\omega + \eta)\} d\eta = \pi p_g(\omega) \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

すなわち、式 (2) で表わされる定常確率過程のスペクトル密度は確率変数 η の確率密度と相似であることになる。したがって、任意のスペクトル密度 $S(\omega)$ を持つ定常確率過程は確率密度 $S(\omega)/\pi$ を持つ確率変数 η を用いて式 (2) により表わされる。

2.2 非定常確率過程による地震波形のシミュレーション

地震動は本来非定常な現象であるから、地震波形を確率過程として表現するためには、これを非定常確率過程として取扱うのが妥当であり、またその場合には確率法則、例えば確率分布関数なども時間とともに変化するものとするのが自然な考え方であろう。しかしながら、実際の地震動により得られた地震波形は、地震動を確率過程と考える観点からは単に一つの member function にすぎないから、こうした自然地震の記録波形から、それが属する集合の確率法則の時間的変化を見い出すのはきわめて困難である。

このような理由により、地震波形を非定常確率過程として取り扱う場合には、地震波形を定常確率過程を表わす関数と、時間に関する確定関数との積で与えられる擬定常確率過程としての表現^{7),8)} が用いられている。本研究においても、このような方法による地震波形の模擬を行なった。すなわち、地震加速度波形 $f(t)$ を定常確率過程 $g(\eta, \varphi; t)$ と時間に関する確定関数 $\psi(t)$ との積で次式のように表わす。

$$f(\eta, \varphi; t) = \psi(t)g(\eta, \varphi; t) = \psi(t)\cos(\eta t + \varphi) \dots\dots\dots (5)$$

地震波形を上式のような非定常確率過程として取り扱う場合には、その自己相関関数が二つの時点 t_1, t_2 の時間差 τ のみの関数とはならず通常の間関数やスペクトル密度に関する表現は用いることができないが、時間を parameter とする集合平均として定義される相関関数を考えることができる。

いま、式 (5) で表わされる非定常確率過程 $f(\eta, \varphi; t)$ の共分散を $K_{FF}(\tau_1, \tau_2)$ とすれば次式で定義される。

$$K_{FF}(\tau_1, \tau_2) = E[\{f(\eta, \varphi; \tau_1) - \mu_F(\tau_1)\} \{f(\eta, \varphi; \tau_2) - \mu_F(\tau_2)\}] \dots\dots\dots (6)$$

ただし、

$$\mu_F(\tau) = E[f(\eta, \varphi; \tau)]$$

しかるに、式 (5) から明らかのように、 $f(\eta, \varphi; \tau)$ の集合平均は 0 であるから、上式は

$$\begin{aligned} K_{FF}(\tau_1, \tau_2) &= E[\psi(\tau_1)\psi(\tau_2)\cos(\eta\tau_1 + \varphi)\cos(\eta\tau_2 + \varphi)] \\ &= \frac{1}{2} E[\psi(\tau_1)\psi(\tau_2)\{\cos \eta(\tau_1 - \tau_2) + \cos(\eta\tau_1 + \eta\tau_2 + 2\varphi)\}] \end{aligned}$$

となる。右辺第 2 項はを含み、その集合平均は 0 であるから、前と同様にして

$$K_{FF}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2} \psi(\tau_1) \psi(\tau_2) \int_0^\infty R_\sigma(\eta) \cos \eta(\tau_1 - \tau_2) d\eta \quad \dots\dots\dots (7)$$

が得られる。したがって、2乗平均 $\sigma_f^2(t)$ は式(7)で $\tau_1 = \tau_2 = t$ として

$$\sigma_f^2(t) = \frac{1}{2} \psi(t)^2 \quad \dots\dots\dots (8)$$

となり、確定関数 $\psi(t)$ のみで表わされる。

また、式(5)で表わされる非定常確率過程のスペクトル構造は、定常確率過程 $g(\eta, \varphi; t)$ のそれとは当然異なるが、この場合通常のスペクトル密度の概念は用いることができない。しかしながら、非定常確率過程 $f(t)$ がそのフーリエ変換 $F(\omega)$ を持つならば、その generalized spectral density $\Phi_{FF}(\omega_1, \omega_2)$ は次式で与えられる。

$$\Phi_{FF}(\omega_1, \omega_2) = E[F(\omega_1)F^*(\omega_2)] - E[F(\omega_1)]E[F^*(\omega_2)] \quad \dots\dots\dots (9)$$

ただし、 $F^*(\omega)$ は $F(\omega)$ の complex conjugate である。いま、式(5)において、確定関数 $\psi(t)$ がフーリエ変換 $\bar{\psi}(\omega)$ を有するものとすれば、非定常確率過程 $f(\eta, \varphi; t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ は容易に次式で与えられる。

$$F(\omega) = \frac{1}{2} \{ \exp(i\varphi) \bar{\psi}(\omega - \eta) + \exp(-i\varphi) \bar{\psi}(\omega + \eta) \} \quad \dots\dots\dots (10)$$

しかるに、上式から明らかに

$$E[F(\omega)] = E[F^*(\omega)] = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$F(\omega_1)F^*(\omega_2) = \frac{1}{4} \{ \exp(i2\varphi) \bar{\psi}(\omega_1 - \eta) \bar{\psi}^*(\omega_2 - \eta) + \exp(-i2\varphi) \bar{\psi}(\omega_1 + \eta) \bar{\psi}^*(\omega_2 + \eta) \\ \bar{\psi}(\omega_1 - \eta) \bar{\psi}^*(\omega_2 + \eta) + \bar{\psi}(\omega_1 + \eta) \bar{\psi}^*(\omega_2 - \eta) \}$$

であるから、結局 $f(\eta, \varphi; t)$ の generalized spectral density $\Phi_{FF}(\omega_1, \omega_2)$ は次式で与えられる。

$$\Phi_{FF}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{4} \int_0^\infty \{ \bar{\psi}(\omega_1 - \eta) \bar{\psi}^*(\omega_2 + \eta) + \bar{\psi}(\omega_1 + \eta) \bar{\psi}^*(\omega_2 - \eta) \} p_\sigma(\eta) d\eta \quad \dots\dots\dots (12)$$

以上のように、地震波形を定常確率過程と確定関数との積で表示するに際して、定常確率過程として式(2)の表現を用いることにより、集合平均により定義される相関関数、スペクトル密度などが、非定常性を規定する確定関数およびそのフーリエ変換形のみで書き表わすことができ、これは地震波形の非定常性、スペクトル構造などの一般的な見通しを容易にすることができる。

2.3 数 値 計 算 例

確定関数 $\psi(t)$ および確率変数 f の確率密度 $p(f)$ が次式で与えられる場合について電子計算機による地震波形の発生を行なった。

$$\psi(t) = \frac{at e^{1-t/t_p} U(t)}{t_p} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$p(f) = \frac{2f^2 e^{-2f/f_p}}{\pi f_p^3} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ただし、 t_p は $\psi(t)$ が最大になる時間 t の値、 $U(t)$ は unit step function、 f_p は $p(f)$ が最大になるときの周波数 f の値である。これらの関係を Fig. 1 に図示した。

式(5)で表わされる関数を電子計算機内で発生させるために、同式中の $\cos(\eta t + \varphi)$ を式(1)のように書き改め、それに式(13)の確定関数 $\psi(t)$ を乗じて地震波形とした。まず、式(1)で表わされる定常確率過程 $g_N(t)$ を電子計算機内で自動的に発生させる方法としてはモンテカルロ法の手法を用いた。すなわち、[0, 1] で一様な擬似乱数を計算機内で発生させた後、これを $p(f)$ 分布に従う乱数に変換して得られる乱数 f_N と、[0, 2π] で一様分布をする擬似乱数とから、周波数 η_N および位相角 φ_N を求めた。計算に用いた擬似乱数は2組の8桁の数を与えて、その積の中央部8桁を抽出して新しい乱数とする方法を用いた。このようにして得られた波形を、 t_p によって無次元化して Fig. 2 に示した。図中において $t^* =$

Fig. 1 Deterministic function $\psi(t)$ and probability density $p(f)$ used in numerical computation.

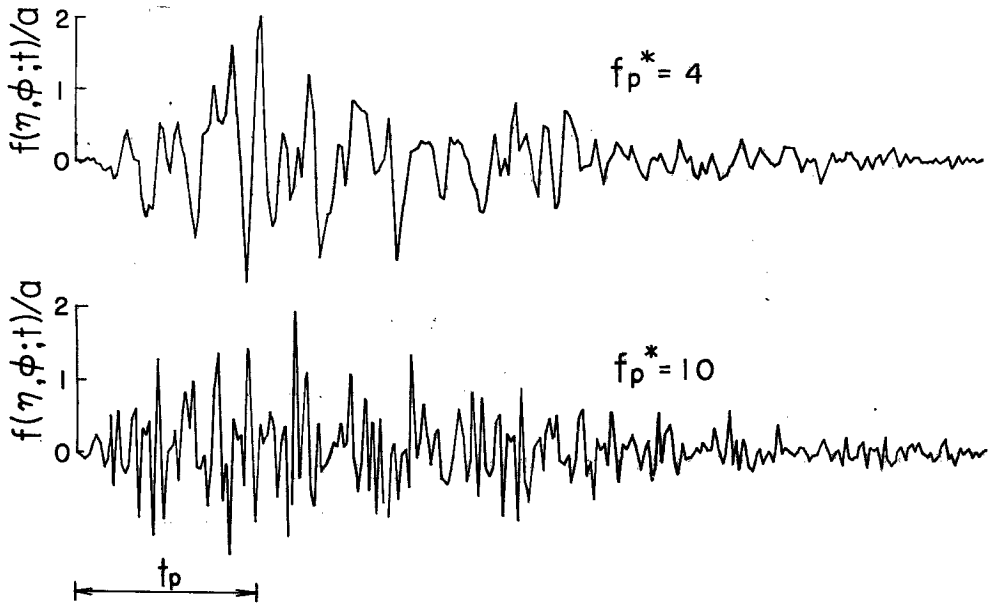
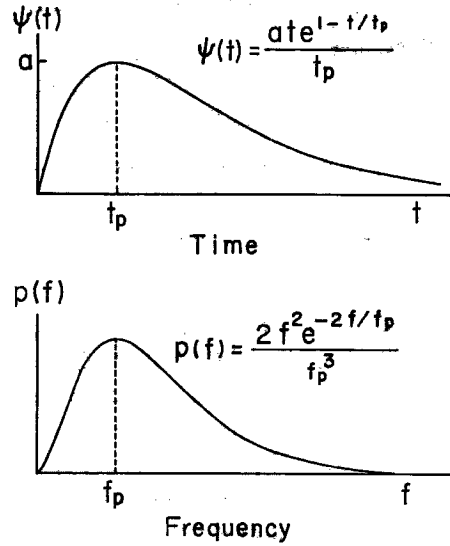


Fig. 2 Examples of artificial earthquakes generated on digital computer.

t/t_p , $f_p^* = f_p t_p$ である。すなわち、 $f_p^* = 4, 10$ はそれぞれ、 $g_N(t)$ のスペクトルのピークに対応する周期と $\psi(t)$ が最大になる時間との比が 4, 10 の場合である。いずれの場合も $f_N(\eta, \phi; t)$ の最大値はほぼ 2 に近い値を示しているが、これは $g_N(t)$ の標準偏差 σ_g が $1/\sqrt{2}$ であるから $g_N(t)$ の最大値、したがって $f_N(\eta, \phi; t)$ の最大値の大略の推定値は $3\sigma_g$ 程度であることを示している。

3. 非定常確率過程入力に対する構造物の応答

3.1 線型1自由度系の応答

線型1自由度の振動系で抽象できるような構造物の入力加速度 $f(t)$ に対する応答変位 $x(t)$ は、系が $t=0$ まで静止していたものとすれば、単位衝撃応答関数 $h(t)$ を用いて次式のごとくに表わされる。

$$x(t) = \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau \dots\dots\dots(15)$$

ただし、

$$h(t) = \frac{1}{\omega_d} \exp(-\zeta t) \sin \omega_d t \quad (t \geq 0) \dots\dots\dots(16)$$

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad \omega_0^2 = k/m, \quad \zeta = c/2m\omega_0$$

であり、 m, k, c はそれぞれ質量、ばね定数、減衰係数である。

式(15)における入力加速度 $f(t)$ が確率過程であれば、その応答 $x(t)$ もやはり確率過程となり、その確率的特性は期待値と共分散によって完全に記述することができる。いま、入力加速度 $f(t)$ として、先の式(5)で表わされる非定常確率過程 $f(\eta, \varphi; t)$ を用いれば、 $f(\eta, \varphi; t)$ はガウス過程であり、その期待値は0であるから、応答 $x(t)$ も同じくガウス過程であり、

$$E[x(t)] = 0 \dots\dots\dots(17)$$

が成立つ。従ってこの場合には応答 $x(t)$ の共分散 $K_{XX}(t_1, t_2)$ は次式のようになる。

$$\begin{aligned} K_{XX}(t_1, t_2) &= E[\{X(t_1)\}\{X(t_2)\}] \\ &= E\left[\int_0^{t_1} h(t_1-\tau_1)\psi(\tau_1)\cos(\eta\tau_1+\varphi)d\tau_1 \int_0^{t_2} h(t_2-\tau_2)\psi(\tau_2)\cos(\eta\tau_2+\varphi)d\tau_2\right] \\ &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} E[\psi(\tau_1)\psi(\tau_2)\cos(\eta\tau_1+\varphi)\cos(\eta\tau_2+\varphi)]h(t_1-\tau_1)h(t_2-\tau_2)d\tau_1d\tau_2 \\ &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K_{FF}(\tau_1, \tau_2)h(t_1-\tau_1)h(t_2-\tau_2)d\tau_1d\tau_2 \dots\dots\dots(18) \end{aligned}$$

ここで、 $K_{FF}(\tau_1, \tau_2)$ は入力 $f(\eta, \varphi; t)$ の共分散であり、それは式(7)で与えられるから、上式に代入すると次式が得られる。

$$K_{XX}(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \psi(\tau_1)\psi(\tau_2)h(t_1-\tau_1)h(t_2-\tau_2)p_\eta(\eta)\cos \eta(\tau_1-\tau_2)d\tau_1d\tau_2d\eta \dots\dots\dots(19)$$

次に

$$\left. \begin{aligned} I_O(\eta, t) &= \int_0^t h(t-\tau)\psi(\tau)\cos \eta\tau d\tau \\ I_S(\eta, t) &= \int_0^t h(t-\tau)\psi(\tau)\sin \eta\tau d\tau \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

で定義される量 $I_O(\eta, t), I_S(\eta, t)$ を用いると、式(19)は結局次式となる。

$$K_{XX}(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \int_0^\infty p_\eta(\eta)\{I_O(\eta, t_1)I_O(\eta, t_2) + I_S(\eta, t_1)I_S(\eta, t_2)\}d\eta \dots\dots\dots(21)$$

また、応答速度 $\dot{x}(t)$ 、応答加速度 $\ddot{x}(t)$ の共分散、 $K_{\dot{X}\dot{X}}(t_1, t_2)$ 、 $K_{\ddot{X}\ddot{X}}(t_1, t_2)$ および $K_{X\dot{X}}(t_1, t_2)$ 、 $K_{X\ddot{X}}(t_1, t_2)$ などは

$$\left. \begin{aligned} K_{\dot{X}\dot{X}}(t_1, t_2) &= \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} K_{XX}(t_1, t_2) \\ K_{\ddot{X}\ddot{X}}(t_1, t_2) &= \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} K_{\dot{X}\dot{X}}(t_1, t_2) \\ K_{X\dot{X}}(t_1, t_2) &= \frac{\partial}{\partial t_2} K_{XX}(t_1, t_2) \\ K_{X\ddot{X}}(t_1, t_2) &= \frac{\partial}{\partial t_2} K_{X\dot{X}}(t_1, t_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

により計算され、応答量の2乗平均などは、その結果において $t_1 = t_2 = t$ とすることにより次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_w^2(t) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty p_\sigma(\eta) \{I_o^2(\eta, t) + I_s^2(\eta, t)\} d\eta \\ \sigma_z^2(t) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty p_\sigma(\eta) \{\dot{I}_o^2(\eta, t) + \dot{I}_s^2(\eta, t)\} d\eta \\ \sigma_{\dot{z}}^2(t) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty p_\sigma(\eta) \{\ddot{I}_o^2(\eta, t) + \ddot{I}_s^2(\eta, t)\} d\eta \\ \sigma_{\alpha z \beta \alpha z}(t) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty p_\sigma(\eta) \{\dot{I}_o(\eta, t) \dot{I}_o(\eta, t) + \dot{I}_s(\eta, t) \dot{I}_s(\eta, t)\} d\eta \\ \sigma_{\pm \alpha z \varphi \pm z}(t) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty p_\sigma(\eta) \{\ddot{I}_o(\eta, t) \dot{I}_o(\eta, t) + \ddot{I}_s(\eta, t) \dot{I}_s(\eta, t)\} d\eta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

ただし、 $\dot{I}(\eta, t)$ 、 $\ddot{I}(\eta, t)$ はそれぞれ $I(\eta, t)$ の t に関する1階、2階の導関数である。

式(20)に含まれる η は確率変数であるが、 $I_o(\eta, t)$ 、 $I_s(\eta, t)$ に対しては定数としての取り扱いができるから、非定常確率過程としての系の応答を、 $\psi(t) \cos \eta t$ なる確定入力的作用の下における系の過渡応答の問題に転換して考えることができることになり、それは $I_o(\eta, t)$ 、 $I_s(\eta, t)$ などを求めることに帰着する。

確定関数 $\psi(t)$ として、式(13)の関数を用いると、 $I_o(\eta; t)$ 、 $I_s(\eta; t)$ などは以下のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} I_o(\eta; t) &= at_p^2 [J_o(\eta^*; t^*) + J_o(-\eta^*; t^*)] \\ I_s(\eta; t) &= at_p^2 [J_s(\eta^*; t^*) - J_s(-\eta^*; t^*)] \\ \dot{I}_o(\eta; t) &= at_p [-\zeta \omega_a^* I_o(\eta; t) + \omega_a^* \{J_s(\eta^*; t^*) + J_s(-\eta^*; t^*)\}] \\ \dot{I}_s(\eta; t) &= at_p [-\zeta \omega_a^* I_s(\eta; t) - \omega_a^* \{J_o(\eta^*; t^*) - J_o(-\eta^*; t^*)\}] \\ \ddot{I}_o(\eta; t) &= a [-\omega_a^{*2} I_o(\eta; t) - 2\zeta \omega_a^* \dot{I}_o(\eta; t) + t^* e^{1-t^*} \cos \eta^* t^*] \\ \ddot{I}_s(\eta; t) &= a [-\omega_a^{*2} I_s(\eta; t) - 2\zeta \omega_a^* \dot{I}_s(\eta; t) + t^* e^{1-t^*} \sin \eta^* t^*] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

ここに、

$$\begin{aligned} J_o(\eta^*; t^*) &= \frac{e^{-\zeta \omega_a^* t^*}}{2\omega_a^*} \left[-\frac{t^* e^{1-t^*}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \sin(\eta^* t^* - \gamma) + \frac{e^{1-t^*}}{\alpha^2 + \beta^2} \sin(\eta^* t^* - \delta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \sin(\omega_a^* t^* + \delta) \right] \\ J_s(\eta^*; t^*) &= \frac{e^{-\zeta \omega_a^* t^*}}{2\omega_a^*} \left[\frac{t^* e^{1-t^*}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cos(\eta^* t^* - \gamma) - \frac{e^{1-t^*}}{\alpha^2 + \beta^2} \cos(\eta^* t^* - \delta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \cos(\omega_a^* t^* + \delta) \right] \end{aligned}$$

$$\alpha = \zeta \omega_a^* - 1, \quad \beta = \omega_a^* + \eta^*, \quad \gamma = \tan^{-1}(\beta/\alpha), \quad \delta = \tan^{-1} \{2\alpha\beta/(\alpha^2 - \beta^2)\}, \quad \omega_a^* = \omega_0 t_p,$$

$$\omega_a^* = \omega_0 t_p, \quad \eta^* = \eta t_p, \quad t^* = t/t_p.$$

式(22)、(23)による数値計算結果の一例を Fig. 3 に示した。最上段から順に、入力加速度、応答加速度、応答速度、応答変位の標準偏差の無次元量を示している。また、 T^* は無次元の固有周期であるが、これらの図から、入力が最大になる時間と応答が最大になる時間との差がかなり大きく、特に T^* が0.8の場合では応答変位が最大になるのは入力が最大になるまでの時間の約2倍に達することがわかる。このように地震波形を確率過程として表わすことは、地震動の非定常性が構造物の応答に及ぼす影響を調べるには非常に都合がよいことを示している。

3.2 確率量をパラメーターとする応答スペクトル

確率過程 $x(t)$ および、その時間に関する導関数 $\dot{x}(t)$ が2次元ガウス分布に従うものとすれば、 $x(t)$ が

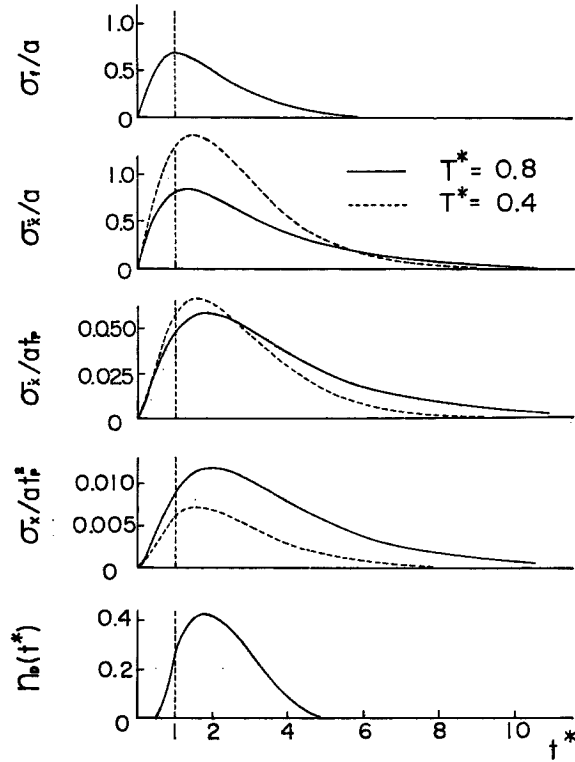


Fig. 3 R. M. S. of input excitation and responses and rate of threshold crossing per unit time ($f_p^* = 4$).

時間 t_1 から t_2 までの間に $x(t) = \xi$ を正の勾配で横切る回数の期待値 $N(\xi; t_1, t_2)$ は S. O. Rice により次式で与えられている⁹⁾。

$$N(\xi; t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{\infty} \dot{x}(t) p_{x\dot{x}}(\xi, \dot{x}, t) d\dot{x} dt \dots\dots\dots(24)$$

ここに、 $p_{x\dot{x}}(x, \dot{x}, t)$ は x, \dot{x} に関する同時確率密度関数である。いま、 $x(t)$ を非定常確率過常に対する線型 1 自由度系の応答であるとすれば、前述のように応答変位 $x(t)$ 、応答速度 $\dot{x}(t)$ はともにガウス過程となるから、 $p_{x\dot{x}}(x, \dot{x}, t)$ としては次式で与えられるガウス同時確率密度関数を用いることができる。

$$p_{x\dot{x}}(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}\sqrt{1-\rho_{x\dot{x}}^2}} \exp\left[-\frac{\sigma_{\dot{x}}^2 x^2 - 2\sigma_x\sigma_{\dot{x}}\rho_{x\dot{x}}x\dot{x} + \sigma_x^2 \dot{x}^2}{2\sigma_x^2\sigma_{\dot{x}}^2(1-\rho_{x\dot{x}}^2)}\right] \dots\dots\dots(25)$$

ここで、式 (24) の $N(\xi; t_1, t_2)$ を単位時間当りの値を与える関数 $n(\xi, t)$ に書き改めると、

$$N(\xi; t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} n(\xi, t) dt \dots\dots\dots(26)$$

であり、このとき $n(\xi, t)$ は

$$n(\xi, t) = \int_0^{\infty} \dot{x}(t) p_{x\dot{x}}(\xi, \dot{x}, t) d\dot{x} \dots\dots\dots(27)$$

となる。上式に式 (25) の $p_{x\dot{x}}(x, \dot{x}, t)$ を持込むと結局次式が得られる。

$$n(\xi, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\sigma_x}\right)^2\right\} \left[\sqrt{1-\rho_{x\dot{x}}^2}\right] \left\{-\frac{\rho_{x\dot{x}}\xi}{2(1-\rho_{x\dot{x}}^2)}\left(\frac{\xi}{\sigma_x}\right)^2\right\}$$

$$+ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \rho_{\alpha\beta} \left(\frac{\xi}{\sigma_{\alpha}} \right) \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\rho_{\alpha\beta}}{\sqrt{2(1-\rho_{\alpha\beta}^2)}} \frac{\xi}{\sigma_{\alpha}} \right) \right\} \dots\dots\dots (28)$$

となる。したがって、応答量 $\sigma_{\alpha}, \sigma_{\beta}, \rho_{\alpha\beta}$ を式 (22) によって求めれば、応答変位 $x(t)$ が単位時間当りに変位レベル ξ を正の勾配で越える回数の期待値が得られる。しかるに、地震時における構造物の応答が解析の対象とされる場合には、変位レベル ξ を正の勾配で越えることと、変位レベル $-\xi$ を負の勾配で越えることは同じ程度の意味を持つが、応答変位および応答速度の期待値が 0 である場合にはこの両者は等しい値になる。したがって、変位レベル $\xi, -\xi$ をそれぞれ正、負の勾配で越える単位時間当りの回数の期待値を $n_D(t)$ とすると

$$n_D(t) = 2n(\xi, t) \dots\dots\dots (29)$$

としてよい。

応答速度が速度レベル v を越える単位時間当りの期待値についても同様な考えにより、その値 $n_V(t)$ は

$$n_V(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma_{\beta}}{\sigma_{\alpha}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{v}{\sigma_{\beta}} \right)^2 \right\} \left[\sqrt{1-\rho_{\alpha\beta}^2} \left\{ -\frac{\rho_{\alpha\beta}}{2(1-\rho_{\alpha\beta}^2)} \left(\frac{v}{\sigma_{\beta}} \right)^2 \right\} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \rho_{\alpha\beta} \left(\frac{v}{\sigma_{\beta}} \right) \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\rho_{\alpha\beta}}{\sqrt{2(1-\rho_{\alpha\beta}^2)}} \frac{v}{\sigma_{\beta}} \right) \right\} \right] \dots\dots\dots (30)$$

$n_D(t), n_V(t)$ はいずれも単位時間当りの期待値であるから、これを時間 $t=0$ から ∞ まで積分した値は、変位および速度レベルと構造物の固有周期の関数であると考えられる。すなわち、

$$N_D(T^*) \equiv N(\xi; 0, \infty) = \int_0^{\infty} n_D(t) dt \dots\dots\dots (31)$$

$$N_V(T^*) \equiv N(v; 0, \infty) = \int_0^{\infty} n_V(t) dt \dots\dots\dots (32)$$

したがって、これらは応答設定レベルを S_D, S_V とすると、

$$N_D(T^*) = f_n(S_D; T^*) \dots\dots\dots (33)$$

$$N_V(T^*) = f_n(S_V; T^*) \dots\dots\dots (34)$$

と書けるが、これらの関係をレベル S_D, S_V について書き換えると

$$S_D = f_n\{T^*; N_D(T^*)\} \dots\dots\dots (35)$$

$$S_V = f_n\{T^*; N_V(T^*)\} \dots\dots\dots (36)$$

なる関係が成立する。すなわち、式 (34) は期待値 $N_D(T^*), N_V(T^*)$ をパラメーターとする、無次元固有周期と応答設定レベルとの関係にはかならないから、一種の応答スペクトルであると解してよい。

式 (14) で与えられる確定時間関数と式 (15) で示される周波数特性を持つ定常確率過程との積で表わした非定常確率過程に対する構造物の応答に関して、上述の方法を用いて行なった数値計算結果を Fig. 3 ~ Fig. 9 に示した。まず、Fig. 3 の最下図は $f_D^* = 4, T^* = 0.8$ の場合について、応答変位が応答設定レベル $S_D = 0.8 at_V^2 / \omega_d^{*2}$ を越える単位時間当りの回数の期待値 $n_D(t)$ を示したものであるが、この曲線で囲まれる面積、すなわち $N_D(T^*)$ の値は 1.01 であり、応答が変位レベル S_D を越える回数の期待値が約 1 であることを示している。また、 f^* が 5 付近での σ_{α} の値は σ_{α} の最大値のほぼ 1/2 であるが、その時の $n_D(t^*)$ の値はほとんど 0 であり、 $n_D(t^*)$ は応答レベルに対してきわめて鋭感な量であることがわかる。

Fig. 4 は応答設定レベル S_D が $n_D(t^*)$ にどのような影響を与えるかを例示したものであり、 S_D の増大につれて $n_D(t^*)$ の値は減少し、したがって $n_D(t^*)$ 曲線で囲まれた面積として与えられる 1 回の地震当りの設定レベルを越える回数の期待値 $N_D(T^*)$ は急速に減少することを示している。これらの関係を、より明確にするために、応答設定レベル S_D, S_V と期待値 $N_D(T^*), N_V(T^*)$ との関係を示したのが Fig. 5, 6 である。これはまた式 (33), (34) の関係を図示したものにはかならない。これらの図中で T^* は無次元固有周期を表すパラメーターであるが、 $S_D \sim N_D(T^*), S_V \sim N_V(T^*)$ の関係を示す曲線はいずれも半対数紙上ではほぼ直線であることから、設定レベルの増大に対してそのレベルを越える回数は指数的に減少することがわかる。また、パラメーター T^* の影響については、速度応答よりも変位応答が、それも設定レ

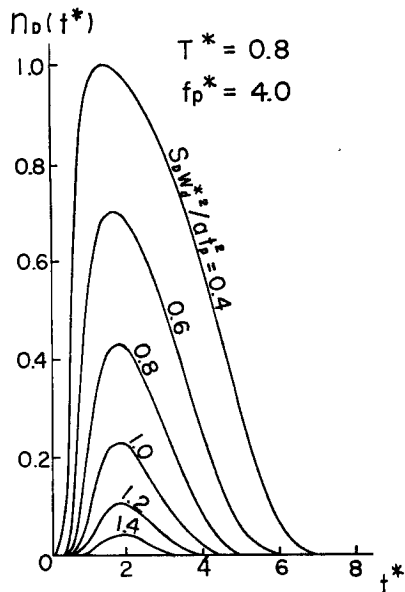


Fig. 4 Rate of threshold crossing per unit time.

場合が、地震動の記録波形から求める応答スペクトルに相当するものと考えられる。 $N_D(T^*)$, $N_V(T^*)$ の値が1より小さな値に対する曲線は、1回の地震によって応答が設定レベルを越える回数が小さくなる応答レ

ベルの大なる場合の方がその度合いが大きいことも明らかである。したがって変位応答の場合には、設定レベルを一定とすれば、固有周期が大なるほど、そのレベルを越える回数は増大することを示している。

次に、Fig. 5, 6において $N_D(T^*)$, $N_V(T^*)$ を一定にして、無次元の非減衰固有周期 T^* と応答設定レベル S_D, S_V との関係を示したのがFig. 7である。これは式(35), (36)の関係に相当し、一種の応答スペクトルと考えられるが、実地震による記録から計算された応答スペクトルと類似の特性を示している。すなわち、変位応答では S_D は T^* に対して漸増の傾向を持ち、速度応答では S_V は T^* に対してほぼ一定値を示している。これらの図中において、パラメータはいずれも設定レベルを越える回数の期待値 $N_D(T^*)$, $N_V(T^*)$ であるが、この期待値は応答の最大値が設定レベルを越す確率の上限値ともみなせるから¹⁰⁾、この値が1となるレベルを見出すことは近似的には、各固有周期ごとの応答の最大値を探す操作に等しいと考えてもよい。したがって、これらの図中でパラメータの $N_D(T^*)$ や $N_V(T^*)$ の値が1の場合

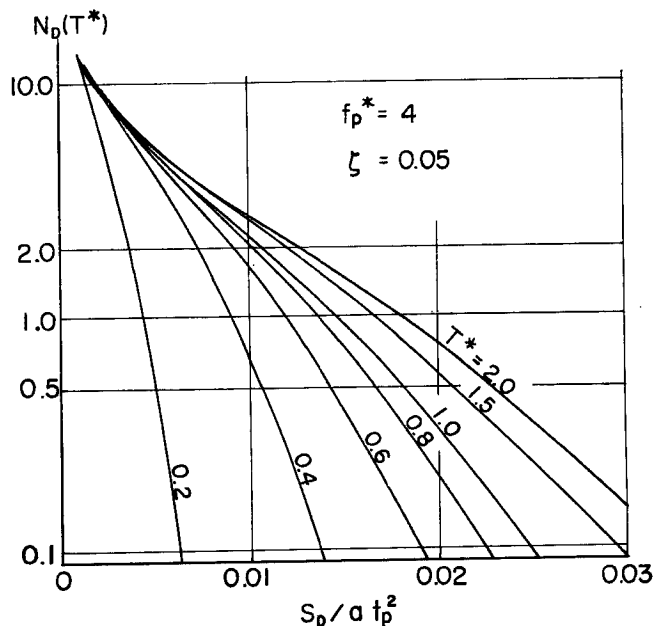


Fig. 5 Expected rate of threshold crossing with respect to response level (displacement).

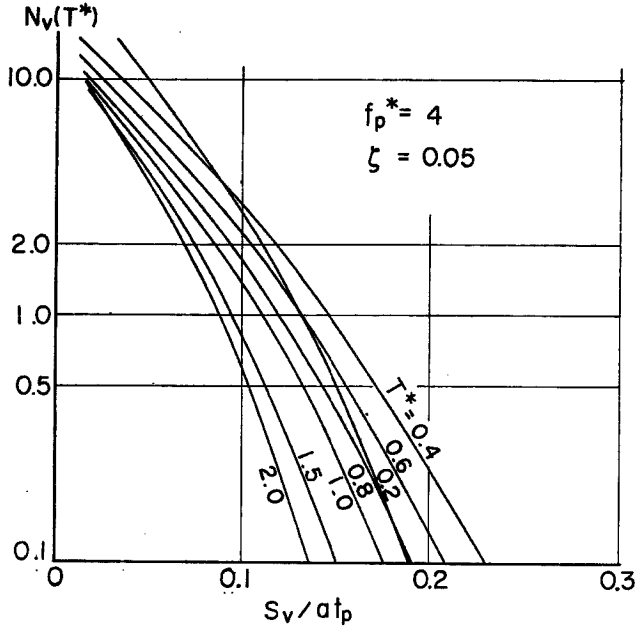


Fig. 6 Expected rate of threshold crossing with respect to response level (velocity).

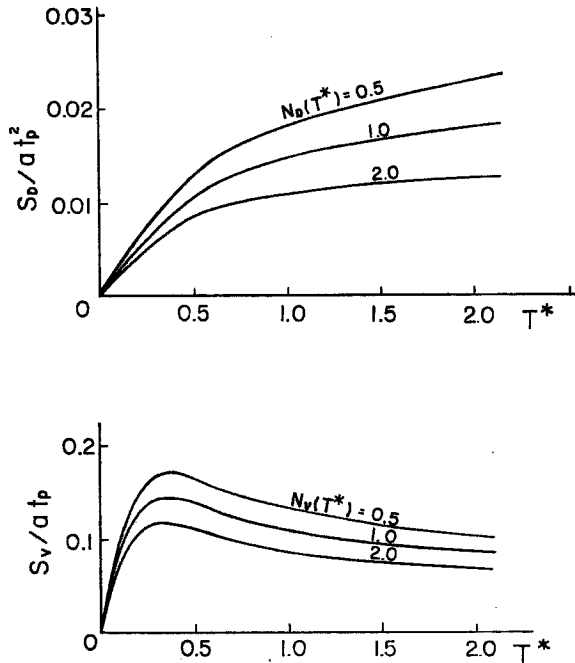


Fig. 7 Response spectra with probabilistic parameter ($f_p^*=4$).

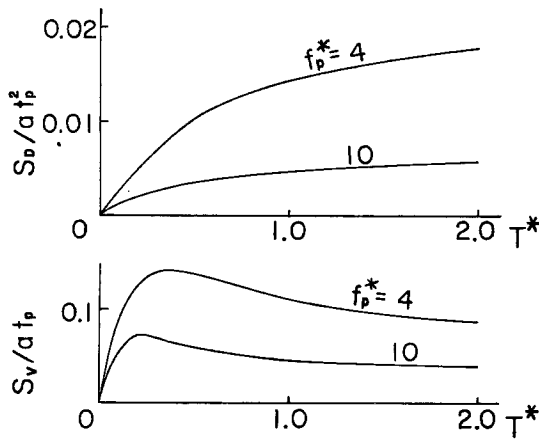


Fig. 8 Response spectra showing effect of predominant frequency.

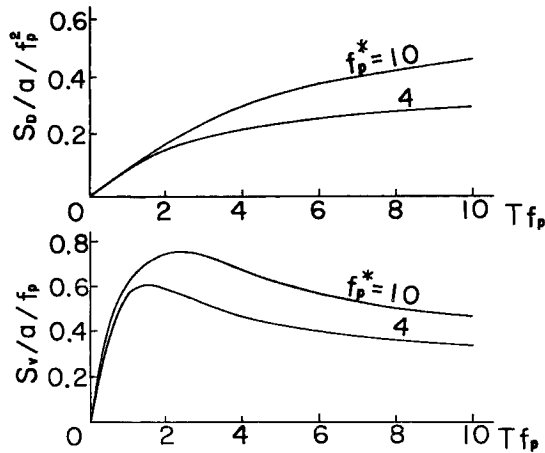


Fig. 9 Response spectra showing effect of non-stationarity.

応答スペクトルでは異なった状況下で得られた地震波形から求めた応答スペクトルを平均化することにより、地震波形に反映されている地盤特性あるいは周波数特性を無視してしまう点において妥当性を欠くものと思われる。したがって応答スペクトルに、より一般性を具備させるためには、地盤の特性を周波数特性に集約することに関しては多少の議論の余地は残るであろうが、地震動の非定常性ととも、この周波数特性を積極的に考慮する必要がある。

4. 結 び

地震動あるいはその記録波形は、規則性、予測性、再現性、定常性などがいずれも否定される非常に複雑な動的挙動を示す現象であり、本来確率統計的に把握されるべき性格を備えていることから、耐震設計にお

ベルを示すから、結局応答を大きく評価する、換言すれば安全側の値を与える応答スペクトルといえる。また、 $N_D(T^*)$ 、 $N_V(T^*)$ が2の場合は応答が2回程度は越える可能性のあるレベルを表わしているから、先の場合とは逆に危険側の値を与えるが、これは構造物の応答に関する安全率や余裕性についての目安を与えるといえる。このように、地震動を確率過程と考えることにより、応答スペクトルにパラメーターとしての確率量を導入することができ、応答の持つ情報をより多く導き出せることを示している。

次に、入力卓越周期が応答とどのような関係にあるかを示したのが Fig. 8, 9 である。いずれの図も $N_D(T^*)$ 、 $N_V(T^*)$ が1であり、 $f_p^* = f_p t_p$ が4の場合と10の場合を比較してあるが、Fig. 8 では無次元化の基準値として地震動の強さが最大になる時間 t_p を取っているから、 t_p を一定にして卓越振動数 f_p を変えた場合に相当し、Fig. 9 は f_p を一定にして t_p の差異による応答の相異を比較したことになる。明らかに S_D 、 S_V は f_p に反比例し、 t_p に比例的であることがこれらの図からわかるが、 t_p および加速度振幅が同じであれば、それに含まれる周波数が高いほど応答レベルは小さくなり、また、加速度振幅と卓越振動数が同じであれば、 t_p すなわち、継続時間の長い地震動に対する応答レベルが増大することを示すものである。

このように、地震波形の持つ周波数特性やその非定常性が応答スペクトルに影響を及ぼすことは明らかであり、しかもその程度は必ずしも小さくないことがわかるが、通常の応

いて予想すべき地震波形としては非定常確率過程として取り扱うことが考えられる。このような観点から、本研究では地盤の有する周波数特性を容易に反映させられるような非定常確率過程による地震波形の表現とこれに対する構造物の応答についての検討を行なった。

まず、任意の確率密度関数を有する確率変数を周波数とする余弦波と時間に関する確定関数との積で地震波形を模擬し、このような入力地震波に対する線型1自由度系の応答は、周波数を定数とみなした確定入力に対する応答の問題に置換され、応答の評価、一般的に見通しが容易になることを示した。また、入力地震波を確率過程とする場合には、これに対する構造物の応答を、設定レベルを越える期待回数で評価することにより、確率量を導入した応答スペクトルが得られることを示し、耐震設計における応用性について検討を行なった。さらに入力地震波の周波数特性および継続時間が応答スペクトルに及ぼす影響についての検討から、実地震記録に対する応答スペクトルを平均化するという従来の方法の持つ疑点を明らかにした。

しかし、地震動の強さ、震動エネルギーの時間的消長についてはまだ不明な点が多く、地震動を非定常な現象として取り扱う際の資料が十分でない。また非定常確率過程に対する非線型系の応答の問題にはまだ議論の余地が多く残されており、これらについては今後の資料の集積や研究にまたねばならない。

最後に、本研究の遂行に当り、終始御指導を頂いた後藤尚男教授ならびに数値計算に数々の御助力を頂いた同研究室の助手、大学院学生諸氏に深謝の意を表する次第である。

なお、本研究の数値計算はすべて京都大学電子計算機 KDC-II によったことを付記する。

参 考 文 献

- 1) Housner, G. W. : Characteristics of Strong Motion Earthquakes, Bull. of S. S. A., Vol. 37, 1947, pp.19—31.
- 2) Bycroft, G. N. : White Noise Representation of Earthquake, Proc. of A. S. C. E., EM2, April, 1960, pp.1—16, pp.173—189.
- 3) 田治見 宏：耐震理論に関する基礎的研究，東京大学生産技術研究所報告，第8巻，第4号，昭34.3, pp.173—189.
- 4) Housner, G. W. and P. C. Jennings: Generation of Artificial Earthquakes, Proc. of A. S. C. E., Vol.90, EM1, Feb., 1964, pp.113—150.
- 5) 篠塚正宜，佐藤吉彦：地震動のシミュレーションとこれに対する構造物の応答，日本地震工学シンポジウム（1966）講演集，pp.167—172.
- 6) 後藤尚男，土岐憲三，秋吉 卓：電子計算機による耐震設計用の人工地震波に関する研究，日本地震工学シンポジウム（1966）講演集，pp.25—30.
- 7) Bolotin, V. V. : Statistical Theory of the Aseismic Design of Structures, Proc. of the 2nd. W. C. E. E., 1960, pp.1365—1374.
- 8) 棚橋諒，小堀鐸二，南井良一郎：構造物の動的耐震設計法と地震レスポンス，京都大学防災研究所年報，第5号B，昭37.3, pp.1—32.
- 9) Rice, S. O. : Mathematical Analysis of Random Noise, Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, Dover, 1954, pp.133—294.
- 10) Freudenthal, A. M. and M. Shinozuka: Probability of Structural Failure under Earthquake Acceleration, 土木学会論文集，第118号，昭40.6, pp.9—16.