

# SH 型トルクによる多層構造地盤の 震動特性について (1)

島 通 保・入倉孝次郎

## CHARACTERISTICS OF VIBRATIONS PRODUCED BY SH-TYPE TORQUE IN A MULTILAYERED ELASTIC GROUND (1)

By *Michiyasu* SHIMA, *Kojiro* IRIKURA

### Synopsis

Integral expressions for the displacement fields produced by SH torque on the surface are derived by using a technique applied first by N. A. Haskell to seismological problem, when an elastic isotropic solid half-space is composed of homogeneous layers with plane parallel boundaries. The integrals for the fields near the source are exactly calculated by digital computer for the branch line integral and the residues,

The numerical results are compared with spectra in the case where an infinite train of harmonic plane waves is vertically transmitted to the surface layers.

### 1. 序

地盤の地震時の震動特性は、地盤の地下構造によるものであることが次第に明らかにされてきた。このような地盤の震動特性は、普通、自然地震による地震動記録の波形のフーリエ解析によって求められているが、一般に、基盤への入力波形が不明であるため、基盤より上の層の構造のみによるものとはいい難い。もちろん、深さ数十m以上の基盤層での同時測定が行なわれておればよいが、実際問題として通常困難である。

入力波形あるいは起振力の特徴のはっきりしているものとしては、人工的に起されたものが考えられる。振動の周波数も自然地震のものにほぼ等しく、強い起振力を持つものとして、不平衡重錘型加振機、電磁式加振機があり、調和振動を継続的に発生させることができるから、共振現象としての地盤の固有振動特性を調べるのに都合がよい。ところで、下方から入射する自然地震波に対応する波を発生させるために、加振機を地中深く設置することは、一般に困難である。しかし、弾性波動論における相反性の定理によると、震源と受震点の位置を逆にした場合、同一の起振力に対して、元と同じ振動の得られることが明らかにされている。そこで、上記の場合も、地表での地盤の震動特性を求めようとするためには、地表で加振し、地中（例えば基盤）で受震して、震動記録をとればよい。

下方からの平面波の入射による地表の震動特性と、点状震源による球面波の入射によるそれとの関係をまずつけておくため、いくつかの平行層から成る地盤の、地表あるいは地中に震源の存在する場合について、定常な正弦波状の加振による、平行層構造の震動特性を調べた。

層構造における弾性波動の問題は、以前から、主に表面波の伝播・分散現象を調べるため、多くの人々によって研究されている<sup>1)</sup>。表面波の完全な形成は震源から遠い所であること、震源近傍での数値計算の容易でないこと等から、震源からずっと隔たった点では詳しく調べられているが、震源のごく近くでは、まだほ

とんど明らかにされていないようである。鉛直に近い角度からの入射は、この震源に近い場合になるから、自然地震のS波部分に対応する震動特性を知るには、SH 的震源による震源近傍の変位の振幅の周波数特性を調べる必要がある。そこでまず第一段階として、震源はSH タイプのトルクとし、鉛直軸について軸対称のネジレ波を等方的に出すとする。地表および地中の各点の変位に対する積分表示の形式解を導く手続きは、Haskell に従うマトリックス定式化によった<sup>3), 4)</sup>。すなわち、被積分項は、各層に対するHaskellの層マトリックスの積と震源の特性を表わす因子の積からなり、多層の場合も簡潔に表示される。このような積分表示は複素平面上の複素積分として表わされるが、震源から近い点の変位であるため、極からの寄与の他に、分岐からの切目に沿った積分(branch line integral)の寄与も大きくなる。数値計算の詳細は第2部において報告する予定であるが、自然地震による地盤の震動特性との対応をみるため、今回はまず、基盤中のかなり深さでの2, 3の例を上げるにとどめた。

記号

- $\bar{v}_j$ :  $j$  番目の層の変位の $\theta$ 成分 (円筒座標系)
- $\omega$ : 角振動数
- $\rho_j$ : 密度
- $\beta_j$ : S波伝播速度
- $k_j$ : 角波数 ( $\omega/\beta_j$ )
- $\gamma_j$ :  $\sqrt{(k_j^2 - k^2)}$
- $\mu_j$ : 剛性率
- $d_j$ : 層の厚さ

2. 波動方程式とマトリックスによる定式化

Fig. 1 に示されているような、いくつかの平行層からなる半無限弾性体中にある、軸対称な点状のSHタイプのトルク震源によって発生した波動の、各層中の変位が、次のような調和振動をするものとする、

$$\bar{v}_j(r, z)e^{i\omega t}$$

空間部分  $\bar{v}_j(r, z)$  はポテンシャル  $\bar{\chi}_j(r, z)$  によって表わされ、

$$\bar{v}_j(r, z) = -\frac{\partial \bar{\chi}_j(r, z)}{\partial r} \dots \dots \dots (1)$$

$\bar{\chi}_j(r, z)$  は波動方程式を満足する。すなわち

$$\nabla^2 \bar{\chi}_j(r, z) = -k_j^2 \bar{\chi}_j(r, z) \dots \dots \dots (2)$$

震源が軸対称のSHタイプであるため、変位は方位角( $\theta$ )成分のみで変数に $\theta$ を含まない。

また応力  $\bar{p}_{\theta z_j}(r, z)$  は

$$\bar{p}_{\theta z_j}(r, z) = -\mu_j \frac{\partial^2 \bar{\chi}_j(r, z)}{\partial r \partial z} \dots \dots \dots (3)$$

である。

ここで  $\bar{\chi}_j(r, z)$  が次のように積分表示されるものとする、

$$\bar{\chi}_j(r, z) = \int_0^\infty \chi_j(z) J_0(kr) dk \dots \dots \dots (4)$$

$\bar{v}_j, \bar{p}_{\theta z_j}$  も同様に積分表示される。

$$\bar{v}_j(r, z) = \int_0^\infty \left\{ -\chi_j(z) \frac{dJ_0(kr)}{dr} \right\} dk \equiv \int_0^\infty \frac{i\dot{v}_j(z)}{kc} \frac{dJ_0(kr)}{d(kr)} dk \dots \dots \dots (5)$$

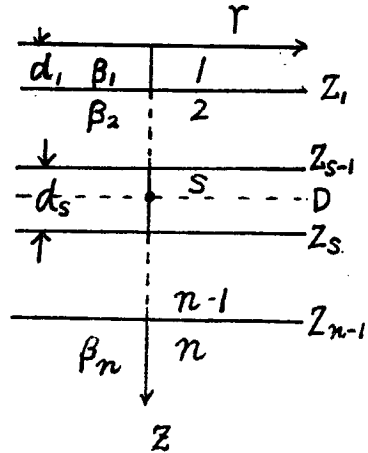


Fig. 1 Structure of elastic half space.

$$\bar{p}_{\theta z_j}(r, z) = \int_0^\infty \left\{ -\mu_j \frac{d\chi_j(z)}{dz} \frac{dJ_0(kr)}{dr} \right\} dk \equiv \int_0^\infty \left\{ -\tau_j(z) \frac{dJ_0(kr)}{d(kr)} \right\} dk$$

なお  $\chi_j(z)$  は次の方程式を満足する。

$$\frac{d^2 \chi_j(z)}{dz^2} = (k^2 - k_j^2) \chi_j(z) \dots\dots\dots (6)$$

層の境界における変位および応力の連続の境界条件から、被積分項の係数の間には

$$\begin{bmatrix} \frac{\dot{v}_j(z_{j-1})}{c} \\ \tau_j(z_{j-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v}_{j-1}(z_{j-1}) \\ \tau_{j-1}(z_{j-1}) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (7)$$

の関係が成立つ。

震源を含まない層においては、ポテンシャル  $\chi_j(z)$  は (6) の一般解として

$$\chi_j(z) = \bar{\epsilon}_j' e^{-i\gamma_j z} + \bar{\epsilon}_j'' e^{i\gamma_j z} \dots\dots\dots (8)$$

と表わせるが

$$\epsilon_j' = \bar{\epsilon}_j' k e^{-i\gamma_j z_{j-1}}, \quad \epsilon_j'' = \bar{\epsilon}_j'' k e^{i\gamma_j z_{j-1}} \dots\dots\dots (9)$$

のように係数  $\epsilon_j, \epsilon_j''$  を定義すれば、(5) の  $\dot{v}_j/c, \tau_j$  に対する定義の式を使って、

$$\frac{\dot{v}_j(z)}{c} = (\epsilon_j' + \epsilon_j'') i k \cos\{\gamma_j(z - z_{j-1})\} + (\epsilon_j' - \epsilon_j'') k \sin\{\gamma_j(z - z_{j-1})\} \dots\dots (10)$$

$$\tau_j(z) = -(\epsilon_j' + \epsilon_j'') \mu_j \gamma_j \sin\{\gamma_j(z - z_{j-1})\} - (\epsilon_j' - \epsilon_j'') i \mu_j \gamma_j \cos\{\gamma_j(z - z_{j-1})\}$$

$j$  番目の層に対し、(10) を  $z = z_{j-1}$  で計算すると

$$\begin{bmatrix} \frac{\dot{v}_j(z_{j-1})}{c} \\ \tau_j(z_{j-1}) \end{bmatrix} = E_j \begin{bmatrix} \epsilon_j' + \epsilon_j'' \\ \epsilon_j' - \epsilon_j'' \end{bmatrix} \dots\dots\dots (11)$$

あるいは

$$\begin{bmatrix} \epsilon_j' + \epsilon_j'' \\ \epsilon_j' - \epsilon_j'' \end{bmatrix} = E_j^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\dot{v}_j(z_{j-1})}{c} \\ \tau_j(z_{j-1}) \end{bmatrix}$$

$$E_j^{-1} = \begin{pmatrix} (ik)^{-1} & 0 \\ 0 & -(ik\mu_j\beta_j)^{-1} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (12)$$

さらに  $z = z_j$  でも同じように計算して、 $(\epsilon_j' + \epsilon_j'')$ 、 $(\epsilon_j' - \epsilon_j'')$  を消去すると次のような Haskell のマトリックスが得られる。

$$\begin{bmatrix} \frac{\dot{v}_j(z_j)}{c} \\ \tau_j(z_j) \end{bmatrix} = a_j \begin{bmatrix} \frac{\dot{v}_j(z_{j-1})}{c} \\ \tau_j(z_{j-1}) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (13)$$

$$a_j = \begin{pmatrix} \cos Q_j & ik \sin Q_j \\ \frac{i\mu_j\gamma_j \sin Q_j}{k} & \mu_j\gamma_j \cos Q_j \end{pmatrix} \dots\dots\dots (14)$$

$$Q_j = \gamma_j d_j$$

次にもしこの層が震源を含んでいる場合には前の一般解 (8) に、さらに震源による項が加わる。一般に点状震源の存在する点は、数学的な特異点であって、この点で source function は不連続になる。この震源に対するポテンシャル  $\chi_{s0}(z)$  は、例えば次のように表わせる。

$$\chi_{s0}(z) = \begin{cases} S_0^+ e^{-i\gamma_s(z-D)} & z > D \\ S_0^- e^{-i\gamma_s(D-z)} & z < D \end{cases} \dots\dots\dots (15)$$

したがって、この層に対する  $\chi_s(z)$  は

$$\begin{aligned} \chi_s(z) &= \bar{\epsilon}_{s1}' e^{-i\gamma_s z} + \bar{\epsilon}_{s1}'' e^{i\gamma_s z} & z < D \\ \chi_s(z) &= \bar{\epsilon}_{s2}' e^{-i\gamma_s z} + \bar{\epsilon}_{s2}'' e^{i\gamma_s z} & z > D \end{aligned} \dots\dots\dots (16)$$

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{s1}' &= \bar{\epsilon}_s', & \bar{\epsilon}_{s1}'' &= \bar{\epsilon}_s'' + S_0^- e^{-i\gamma_s D} \\ \bar{\epsilon}_{s2}' &= \bar{\epsilon}_s' + S_0^+ e^{i\gamma_s D}, & \bar{\epsilon}_{s2}'' &= \bar{\epsilon}_s'' \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$\bar{\epsilon}_{s1}'$ ,  $\bar{\epsilon}_{s1}''$ ,  $\bar{\epsilon}_{s2}'$ ,  $\bar{\epsilon}_{s2}''$  は単なる係数であるから, (16) は (8) と同じ形である。したがって震源を含まない層におけると同じ手続きによって, 震源の上の点と層の上の境界との関係および震源の下の点と層の下の境界との関係が次のように得られる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\dot{v}_{s1}(D)}{c} \\ \tau_{s1}(D) \end{bmatrix} &= a_{s1} \begin{bmatrix} \frac{\dot{v}_{s1}(z_{s-1})}{c} \\ \tau_{s-1}(z_{s-1}) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{\dot{v}_{s2}(z_s)}{c} \\ \tau_{s2}(z_s) \end{bmatrix} &= a_{s2} \begin{bmatrix} \frac{\dot{v}_{s2}(D)}{c} \\ \tau_{s2}(D) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$a_{sl} = \begin{pmatrix} \cos Q_{sl} & ik \sin Q_{sl} \\ i\mu_s \gamma_s \sin Q_{sl} & \mu_s \gamma_s \cos Q_{sl} \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$Q_{s1} = \gamma_s(D - z_{s-1}), \quad Q_{s2} = \gamma_s(z_s - D)$$

また震源の上の点と下の点の間には (5) と (16) によって,

$$\begin{bmatrix} \frac{\dot{v}_{s2}(D)}{c} \\ \tau_{s2}(D) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{v}_{s1}(D)}{c} \\ \tau_{s1}(D) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta \left( \frac{\dot{v}_s}{c} \right) \\ \delta \tau_s \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\begin{aligned} \delta \left( \frac{\dot{v}_s}{c} \right) &= ik^2(S_0^+ - S_0^-) \\ \delta \tau_s &= -ik\mu_s\gamma_s(S_0^+ + S_0^-) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (21)$$

(18) において  $S_0^\pm = 0$  とおくと, 変位, 応力の層の境界値と, 層の中の値との関係式にもなる。

### 3. 点状SHトルク震源に対する解

ここで序文でのべた考えにしたがって, 震源を地表にとり, 地中の変位の周波数特性を調べる。震源として, 簡単のためまず, SH タイプの軸対称のトルクを採用し, 等方的に波が発生するとすると, ポテンシャルは

$$\bar{\chi}_0(r, z) = \frac{e^{ik_1\sqrt{r^2+z^2}}}{\sqrt{r^2+z^2}} \quad \dots\dots\dots (22)$$

である。これの積分表示は

$$\bar{\chi}_0(r, z) = \int_0^\infty S_0^\pm e^{-i\gamma_1|z-D|} J_0(kr) dk \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$S_0^+ = S_0^- = \frac{-ik}{\sqrt{k_1^2 - k^2}} \quad \dots\dots\dots$$

また

$$\delta \left( \frac{\dot{v}_1}{c} \right) = 0, \quad \delta \tau_1 = -2\mu_1 k^2 \quad \dots\dots\dots (24)$$

震源は地表にあるから (19) の

$$a_{s1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_{s1}(D) = 0$$

層構造として3層をとり, 第2層の変位に対する表示を求める。境界条件と (13), (18), (20) を使うと

$$\begin{bmatrix} \frac{\dot{v}_2(z_2)}{c} \\ \tau_2(z_2) \end{bmatrix} = a_2 a_1 \begin{bmatrix} \frac{\dot{v}_{12}(D)}{c} \\ \tau_{12}(D) \end{bmatrix} = a_2 a_1 \begin{bmatrix} \frac{\dot{v}_1(0)}{c} \\ \delta \tau_1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (25)$$

基盤層に対しては、

$$\begin{bmatrix} \epsilon_2' + \epsilon_2'' \\ \epsilon_2' - \epsilon_2'' \end{bmatrix} = E_2^{-1} \begin{bmatrix} \dot{v}_3(z_2) \\ c \\ \tau_3(z_2) \end{bmatrix} = E_2^{-1} \begin{bmatrix} \dot{v}_2(z_2) \\ c \\ \tau_2(z_2) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (26)$$

が成立しているが、震源は基盤層より上にあるから、波は下方から入射してはならないし ( $c > \beta_3$  の場合)、また無限の下方では変位は有限でなければならない ( $c < \beta_3$  の場合)。この条件をみたすためには、 $\epsilon_2'' = 0$

したがって、

$$\begin{bmatrix} \epsilon_2' \\ \epsilon_2' \end{bmatrix} = E_2^{-1} \begin{bmatrix} \dot{v}_2(z_2) \\ c \\ \tau_2(z_2) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (27)$$

さらに右边に (25) を入れると

$$\begin{bmatrix} \epsilon_2' \\ \epsilon_2' \end{bmatrix} = E_2^{-1} a_2 a_1 \begin{bmatrix} \dot{v}_1(0) \\ c \\ \delta\tau_1 \end{bmatrix} \equiv J \begin{bmatrix} \dot{v}_1(0) \\ c \\ \delta\tau_1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (28)$$

(28) において、 $\epsilon_2'$  を消去すると、

$$\frac{\dot{v}_1(0)}{c} = \frac{J_{22} - J_{12}}{J_{11} - J_{21}} \delta\tau_1 \dots\dots\dots (29)$$

(25) および (18) の下にある注意とから

$$\frac{\dot{v}_1(z)}{c} = \frac{J_{22} - J_{12}}{J_{11} - J_{21}} [a_1(z)]_{11} \delta\tau_1 + [a_1(z)]_{12} \delta\tau_1 \dots\dots\dots (30)$$

$$\frac{\dot{v}_2(z)}{c} = \frac{J_{22} - J_{12}}{J_{11} - J_{21}} [a_2(z) a_1]_{11} \delta\tau_1 + [a_2(z) a_1]_{12} \delta\tau_1 \dots\dots\dots (31)$$

ここで  $a_1, a_2$  は (14) で与えられており、 $a_1(z), a_2(z)$  は

$$\left. \begin{aligned} a_1(z) &= \begin{pmatrix} \cos \gamma_1 z & \frac{ik \sin \gamma_1 z}{\mu_1 \gamma_1} \\ \frac{i \mu_1 \gamma_1 \sin \gamma_1 z}{k} & \cos \gamma_1 z \end{pmatrix} \\ a_2(z) &= \begin{pmatrix} \cos \gamma_2(z-d_1) & \left(\frac{ik}{\mu_2 \gamma_2}\right) \sin \gamma_2(z-d_1) \\ \left(\frac{i \mu_2 \gamma_2}{k}\right) \sin \gamma_2(z-d_1) & \cos \gamma_2(z-d_1) \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

また基盤層に対しては、(10) において  $j=3$  に対して、 $\epsilon_3'' = 0$  とおき、 $z=z_1, z=z_2$  に対して、 $v_3/c, \tau_3$  を求め、 $\epsilon_3'$  を消去すれば、

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_3(z) \\ c \\ \tau_3(z) \end{bmatrix} = [\cos \gamma_3(z-d_1-d_2) - i \sin \gamma_3(z-d_1-d_2)] \begin{bmatrix} \dot{v}_3(z_2) \\ c \\ \tau_3(z_2) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (33)$$

したがって、(31) とあわせて、

$$\begin{aligned} \frac{\dot{v}_3(z)}{c} &= \{\cos \gamma_3(z-d_1-d_2) - i \sin \gamma_3(z-d_1-d_2)\} \\ &\times \left[ \frac{J_{22} - J_{12}}{J_{11} - J_{21}} (a_2 a_1)_{11} + (a_2 a_1)_{12} \right] \delta\tau \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

これを (5) に入れて積分すれば、各層における変位が得られるが、積分路として、リーマン面上で radiation condition をみたすものがとられなければならない。この条件をみたすものとは  $\gamma_j = \sqrt{k_j^2 - k^2}$  の虚数部分を負にする面であればよく、この面をリーマン面上葉とすれば、ここで

$$\gamma_j = \sqrt{k_j^2 - k^2} = -i \sqrt{k^2 - k_j^2} \equiv -i \bar{\gamma}_j \dots\dots\dots (35)$$

となる。そうすると (30)~(34) の各函数は,  $k_1 > k_2 > k_3$  の場合,

$$k_2 < k < k_1 :$$

$$\begin{aligned} J_{11} - J_{21} &= \frac{\left[ \cos Q_1 \cosh Q_2 - \left( \frac{\mu_1 \gamma_1}{\mu_3 \gamma_3} \right) \sin Q_1 \cosh Q_2 + \left( \frac{\mu_2 \gamma_2}{\mu_3 \gamma_3} \right) \cos Q_1 \sinh Q_2 - \left( \frac{\mu_1 \gamma_1}{\mu_2 \gamma_2} \right) \sin Q_1 \sinh Q_2 \right]}{ik} \\ J_{22} - J_{12} &= \frac{\left[ \cos Q_1 \cosh Q_2 + \left( \frac{\mu_3 \gamma_3}{\mu_1 \gamma_1} \right) \sin Q_1 \cosh Q_1 + \left( \frac{\mu_2 \gamma_2}{\mu_3 \gamma_3} \right) \cos Q_1 \sinh Q_2 + \left( \frac{\mu_2 \gamma_2}{\mu_1 \gamma_1} \right) \sin Q_1 \sinh Q_2 \right]}{-\mu_3 \gamma_3} \end{aligned} \quad (36)$$

$$(a_2 a_1)_{11} = \cos Q_1 \cosh Q_2 - \left( \frac{\mu_1 \gamma_1}{\mu_2 \gamma_2} \right) \sin Q_1 \sinh Q_2$$

$$(a_2 a_1)_{12} = ik \left[ \frac{\cos Q_1 \sinh Q_2}{\mu_2 \gamma_2} + \frac{\sin Q_1 \cosh Q_2}{\mu_1 \gamma_1} \right]$$

$$k_3 < k < k_2 :$$

$$\begin{aligned} J_{11} - J_{21} &= \frac{\left[ \cos Q_1 \cos Q_2 - \left( \frac{\mu_1 \gamma_1}{\mu_3 \gamma_3} \right) \sin Q_1 \cos Q_2 - \left( \frac{\mu_2 \gamma_2}{\mu_3 \gamma_3} \right) \cos Q_1 \sin Q_2 - \left( \frac{\mu_1 \gamma_1}{\mu_2 \gamma_2} \right) \sin Q_1 \sin Q_2 \right]}{ik} \\ J_{22} - J_{12} &= \frac{\left[ \cos Q_1 \cos Q_2 + \left( \frac{\mu_3 \gamma_3}{\mu_1 \gamma_1} \right) \sin Q_1 \cos Q_2 + \left( \frac{\mu_2 \gamma_2}{\mu_3 \gamma_3} \right) \cos Q_1 \sin Q_2 - \left( \frac{\mu_2 \gamma_2}{\mu_1 \gamma_1} \right) \sin Q_1 \sin Q_2 \right]}{-\mu_3 \gamma_3} \end{aligned} \quad (37)$$

$$(a_2 a_1)_{11} = \cos Q_1 \cos Q_2 - \left( \frac{\mu_1 \gamma_1}{\mu_2 \gamma_2} \right) \sin Q_1 \sin Q_2$$

$$(a_2 a_1)_{12} = ik \left[ \frac{\cos Q_1 \sin Q_2}{\mu_2 \gamma_2} + \frac{\sin Q_1 \cos Q_2}{\mu_1 \gamma_1} \right]$$

$$k < k_3$$

$$\begin{aligned} J_{11} - J_{21} &= \frac{\left[ \cos Q_1 \cos Q_2 - \left( \frac{\mu_1 \gamma_1}{\mu_2 \gamma_2} \right) \sin Q_1 \sin Q_2 + i \left\{ \left( \frac{\mu_2 \gamma_2}{\mu_3 \gamma_3} \right) \cos Q_1 \sin Q_2 + \left( \frac{\mu_1 \gamma_1}{\mu_3 \gamma_3} \right) \sin Q_1 \cos Q_2 \right\} \right]}{ik} \\ J_{22} - J_{12} &= \left[ \frac{-\sin Q_1 \cos Q_2}{\mu_1 \gamma_1} - \frac{\cos Q_1 \sin Q_2}{\mu_2 \gamma_2} + i \left\{ \frac{\cos Q_1 \cos Q_2}{\mu_3 \gamma_3} - \left( \frac{\mu_2 \gamma_2}{\mu_1 \gamma_1 \mu_3 \gamma_3} \right) \sin Q_1 \sin Q_2 \right\} \right] \end{aligned} \quad (38)$$

$$(a_2 a_1)_{11} = \cos Q_1 \cos Q_2 - \left( \frac{\mu_1 \gamma_1}{\mu_2 \gamma_2} \right) \sin Q_1 \sin Q_2$$

$$(a_2 a_1)_{12} = ik \left[ \frac{\sin Q_1 \cos Q_2}{\mu_1 \gamma_1} + \frac{\cos Q_1 \sin Q_2}{\mu_2 \gamma_2} \right]$$

#### 4. 積分の計算

(34) を (5) に入れば, 基盤中の変位  $\bar{v}_s(r, z)$  の積分表示が得られる。

$$\bar{v}_s(r, z) = i \int_0^\infty \frac{\dot{v}_s(z)}{ck} \frac{dJ_0(kr)}{d(kr)} dk = -i \int_0^\infty \frac{\dot{v}_s(z)}{ck} J_1(kr) dk \equiv \int_0^\infty F(k, \gamma_s) J_1(kr) dk \dots (39)$$

この  $F(k, \gamma_s)$  は  $k$  について偶函数であり,  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  の3つの根号をもつが,  $\gamma_1, \gamma_2$  の2つの表層に関す

る根号については偶函数であるため、 $k_1, k_2$  はリーマン面上の分岐点とはならない。 $k_3$  のみ分岐点となり、 $k_3$  からのみ分枝の切目を入れればよい。したがってリーマン面は2葉である。

ベッセル函数  $J_1(kr)$  を第1種および第2種のハンケル函数で表わすと、(39) は

$$\bar{v}_3(r, z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty F(k, \gamma_3) H_1^{(1)}(kr) dk + \frac{1}{2} \int_0^\infty F(k, \gamma_3) H_1^{(2)}(kr) dk \dots\dots\dots (40)$$

ここでリーマン面上に新しい積分路をとり、2つの実軸上の積分を複素積分に変換する。すなわち  $F(k, \gamma_3)$  の分岐点は  $k_3$  のみであるから、分岐点からの切目は Fig. 2 のように入れられる。また  $F(k, \gamma_3)$  の分母  $J_{11} - J_{21}$  の零点において、 $F(k, \gamma_3)$  は極をもつ。 $J_{11} - J_{21} = 0$  の実根はリーマン面上葉の上葉の  $k_3$  と  $k_1$  の間にあるが、複素根は上葉に存在しないことが示される<sup>2)</sup>。また分岐点  $k_3$  極は Fig. 2 の実軸の第4象限側に存在する。

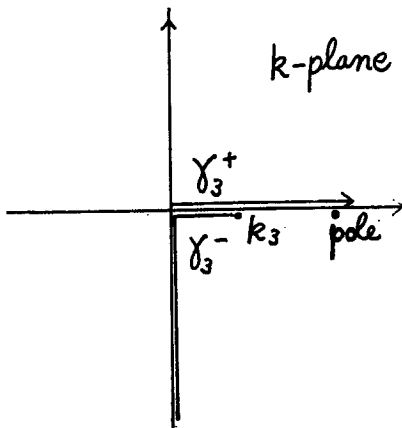


Fig. 2 Branch line and residues in  $k$ -plane.

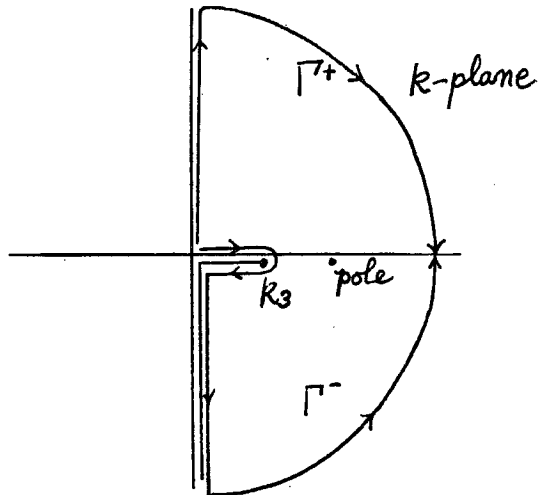


Fig. 3 Distortion of contour in  $k$ -plane.

数値積分に際して、その収束の早いような積分路に変換する。Cauchy の定理に従って実軸から、第1項の積分は Fig. 3 の  $\Gamma^+$  に、第2項の積分では  $\Gamma^-$  の積分路に移す。各々の積分において、無限大円からの寄与は零になる。また

$Re(\gamma_3) > 0$  : 第1象限 ( $\equiv \gamma_3^+$ )

$Re(\gamma_3) < 0$  : 第4象限 ( $\equiv \gamma_3^-$ )

になり、

$$H_1^{(1)}(kr) = -H_1^{(2)}(-kr)$$

なることを考慮すると、

$$\begin{aligned} \bar{v}_3(r, z) = & \frac{1}{2} \left[ \int_0^{k_3} \{F(k, \gamma_3^+) - F(k, \gamma_3^-)\} H_1^{(2)}(kr) dk \right. \\ & + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \{F(i\tau, \gamma_3^+) - F(i\tau, \gamma_3^-)\} K_1(k\tau) d\tau \\ & \left. - 2\pi i \sum \text{Res}\{F(k, \gamma_3) H_1^{(2)}(kr)\} \right] \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

$$F(k, \gamma_3^+) - F(k, \gamma_3^-) = 4\mu_1 k^2 [AC \cos Q_3 + (BC + D) \sin Q_3] \dots\dots\dots (42)$$

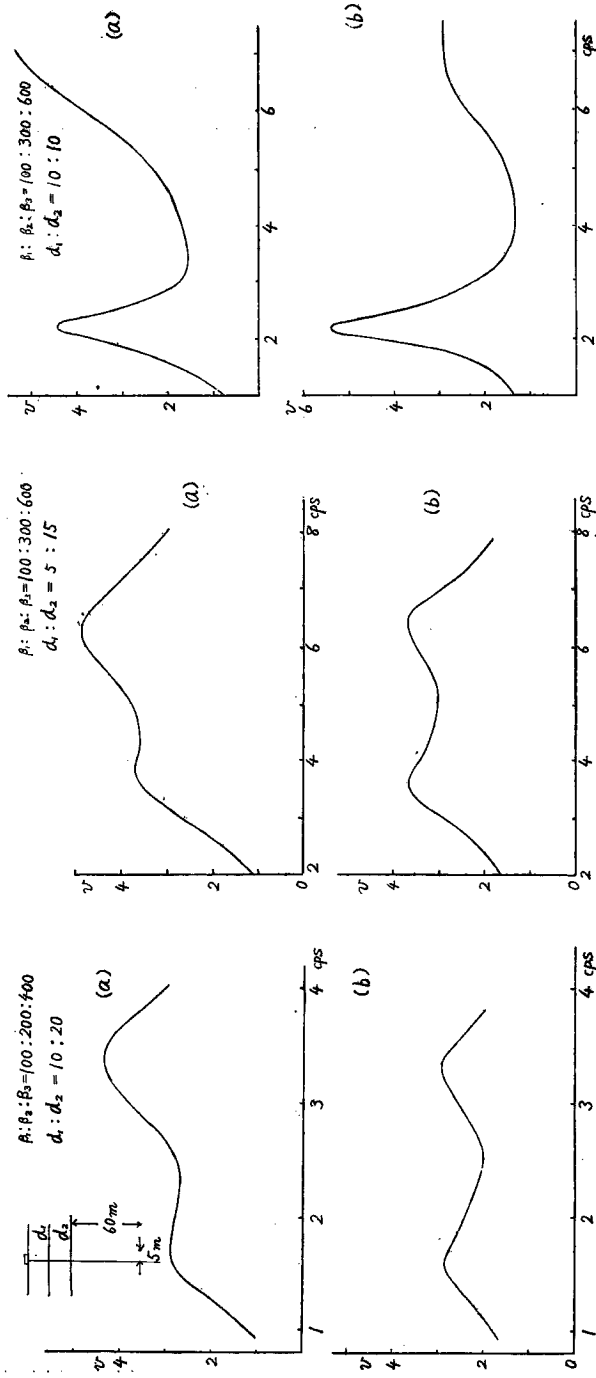


Fig. 4 Displacements versus frequency for a) point source and b) SH plane wave



$$\begin{aligned}
 A &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} & B &= \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \\
 a &= -\cos Q_1 \cos Q_2 + \left(\frac{\mu_2 \gamma_2}{\mu_1 \gamma_1}\right) \sin Q_1 \sin Q_2 \\
 b &= -\left(\frac{\mu_3 \gamma_3}{\mu_1 \gamma_1}\right) \sin Q_1 \cos Q_2 - \left(\frac{\mu_3 \gamma_3}{\mu_2 \gamma_2}\right) \cos Q_1 \sin Q_2 \\
 c &= \mu_3 \gamma_3 \left\{ \cos Q_1 \cos Q_2 - \left(\frac{\mu_1 \gamma_1}{\mu_2 \gamma_2}\right) \sin Q_1 \sin Q_2 \right\} \dots\dots\dots (43) \\
 d &= \mu_1 \gamma_1 \sin Q_1 \cos Q_2 + \mu_2 \gamma_2 \cos Q_1 \sin Q_2 \\
 C &= \cos Q_1 \cos Q_2 - \left(\frac{\mu_1 \gamma_1}{\mu_2 \gamma_2}\right) \sin Q_1 \sin Q_2 \\
 D &= \frac{\sin Q_1 \cos Q_2}{\mu_1 \gamma_1} + \frac{\cos Q_1 \sin Q_2}{\mu_2 \gamma_2} \\
 Q_3 &= \gamma_3(z-d_1-d_2)
 \end{aligned}$$

5. 数値計算の結果

詳細は第2部で報告する予定であるが、自然地震による地盤の震動特性との対応を調べるため、今回は基盤との境界から 60 m の深さにおける変位振幅の周波数特性を計算し、Fig. 4 に示した。

あわせて、SH 平面波入射の結果と対比してみた。上層の厚さの 3～4 倍程度の深さであれば、多少のずれはあるが、ほぼスペクトルの山および谷は対応している。

以上の計算に東京大学大型計算センターの HITAC 5020 を使用した。

References

- 1) Knopoff, L., and A. F. Gangi: Seismic Reciprocity, Geophysics, Vol.24, 1959, pp.681—691.
- 2) Ewing, W. M., W. S. Jardetzky, and F. Press: Elastic Waves in Layered Media, 1957, pp.124—254.
- 3) Haskell, N.A.: The Dispersion of Surface Waves on Multilayered Media, Bull. Seis. Soc. Am., Vol. 43, 1953, pp.17—34.
- 4) Harkrider, D.G.: Surface Waves in Multilayered Elastic Media I., Bull. Seis. Soc. Am., Vol. 54, 1964, pp.627—679.
- 5) Kanai, K.: Relation between the Amplitude of earthquake motions and the Nature of Surface Layer IV., Bull. Earthquake Research Institute Tokyo Univ., Vol. 34., 1956, pp.167—184.