

# 構造物の不規則振動における 最大応答の確率分布について

—一定常入力に対する過渡解—

後藤尚男・亀田弘行

## ON THE PROBABILITY DISTRIBUTION OF THE MAXIMUM STRUCTURAL RESPONSE IN RANDOM VIBRATION

—TRANSIENT RESPONSE TO STATIONARY INPUT—

By Hisao GOTO and Hiroyuki KAMEDA

### Synopsis

Transient structural response to a stationary random input is discussed. The instantaneous variances and the correlation coefficients are derived, on the basis of which the approximate probability distribution of the maximum response is obtained. Numerical results are discussed in relation to precision of the approximation procedure and to the effect of the initial conditions in the transient state.

### 1. 緒 言

構造物に作用する外力のうち地震力、風力などはきわめて不規則に変動することが多く、それらに対する構造物の応答もまた不規則に変動する。かかる現象を把握し、不規則外力に対する合理的な設計法を確立するためには、現象全体を確率過程として取り扱い、最終的には構造物の非破壊確率を知ることが重要である。本研究は最大応答の確率分布について論じたものであるが、通常の弾性設計法で行なわれているように、構造物に生ずる変形・応力などがある許容値を超えたときに破壊が発生すると考える場合には、最大応答の確率分布は非破壊確率と同義である。

最大応答の確率分布に関する研究は過去においてもなされているが<sup>1)~4)</sup>、その解析上の困難さのために、近似解法を示したものに限られており、精度や適用範囲の点からなお検討すべき問題点が少なくない。かかる観点から、著者らは最大応答の確率分布を求めるための新たな近似解法を提案し、入力・応答ともに正規定常確率過程とみなせる場合についての数値計算結果を報告した<sup>5)</sup>。この解法では各時刻間での相関の影響をできるだけ取り入れることによって精度を向上させることに努めており、また外力の非定常性、応答の初期条件も任意に選ぶことができる。本論文では、この解法を定常確率過程を入力とする線形1自由度系の過渡応答の問題に適用し、過渡領域における本解法の精度、最大応答に対する初期条件の影響などについて検討した結果を報告する。

### 2. 最大応答の確率分布

本研究で取り扱った最大応答の確率分布の近似解法については文献 5) に詳述したので、本節ではその基本的な考え方だけを述べることにする。

対象とする応答量を  $y(t)$ , その継続時間を  $\tau$ ,  $0 \leq t \leq \tau$  における  $y(t)$  の絶対最大値を  $Y$  とすると,  $Y$  の確率分布  $\Phi(Y, \tau)$  は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \Phi(Y, \tau) &= P[\max |y(t)| \leq Y; 0 \leq t \leq \tau] \\ &= a_0(Y) P_0(Y, \tau) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(1)$$

ただし,

$$\begin{aligned} a_0(Y) &= P[|y(0)| \leq Y] \\ P_0(Y, \tau) &= P[\max |y(t')| \leq Y | |y(0)| \leq Y; 0 < t' \leq \tau] \end{aligned}$$

ここに  $P[A]$  は事象  $A$  が起る確率,  $P[A|B]$  は事象  $B$  のもとで事象  $A$  が起る条件付確率を表わす。 $P_0(Y, t)$  は出生過程の基礎微分方程式の一つを満足するから, これを解いて式(1)に代入すると次式をうる。

$$\Phi(Y, \tau) = a_0(Y) \exp \left\{ - \int_0^\tau c_0(Y, t) dt \right\} \quad \dots\dots\dots(2)$$

ただし,

$$\begin{aligned} c_0(Y, t) dt &= P[|y(t+dt)| > Y | \max |y(t'')| \leq Y; 0 \leq t'' \leq t] \\ &= \frac{P[|y(t+dt)| > Y \cap \max |y(t'')| < Y; 0 \leq t'' \leq t]}{P[\max |y(t'')| \leq Y; 0 \leq t'' \leq t]} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(3)$$

式(2), (3)は最大応答の確率分布の厳密解を与えるが, 同式中の  $c_0(Y, t)$  を求めることが困難なため, その近似的な評価を試みる。式(3)は連続的なパラメーター  $t''$  について満足されねばならないが, いま

$$0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{r(t)} < t \quad \dots\dots\dots(4)$$

なる有限個の時刻についてのみ同式を満足するような  $\bar{c}_0(Y, t)$  によって  $c_0(Y, t)$  を近似すると, 式(2)の近似式として次式が得られる。

$$\Phi(Y, \tau) \cong a_0(Y) \exp \left\{ - \int_0^\tau \bar{c}_0(Y, t) dt \right\} \quad \dots\dots\dots(5)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \bar{c}_0(Y, t) dt &= \frac{P[|y(t+dt)| < Y \cap |y(t)| \leq Y \cap \{ \bigcap_{k=1}^{r(t)} |y(t_k)| \leq Y \}]}{P[|y(t)| \leq Y \cap \{ \bigcap_{k=1}^{r(t)} |y(t_k)| \leq Y \}]} \\ &= \frac{Q_1(Y, t)}{Q_2(Y, t)} dt \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(6)$$

$$\begin{aligned} Q_1(Y, t) &= P[|y(t+dt)| > Y \cap |y(t)| \leq Y \cap \{ \bigcap_{k=1}^{r(t)} |y(t_k)| \leq Y \}] / dt \\ &= \frac{\sigma_v}{\sigma_t} \int_{-Y/\sigma_1}^{Y/\sigma_1} d\xi_1 \int_{-Y/\sigma_2}^{Y/\sigma_2} d\xi_2 \dots \int_{-Y/\sigma_r}^{Y/\sigma_r} \left\{ \int_{-\infty}^0 \xi_t | \phi_{1n}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, -\frac{Y}{\sigma_t}, \xi_t) d\xi_t \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty \xi_t \phi_{1n}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, \frac{Y}{\sigma_t}, \xi_t) d\xi_t \right\} d\xi_r \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$\begin{aligned} Q_2(Y, t) &= P[|y(t)| \leq Y \cap \{ \bigcap_{k=1}^{r(t)} |y(t_k)| \leq Y \}] \\ &= \int_{-Y/\sigma_1}^{Y/\sigma_1} d\xi_1 \int_{-Y/\sigma_2}^{Y/\sigma_2} d\xi_2 \dots \int_{-Y/\sigma_r}^{Y/\sigma_r} d\xi_r \int_{-Y/\sigma_t}^{Y/\sigma_t} \phi_{2n}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, \xi_t) d\xi_t \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \{E[y^2(t_i)]\}^{1/2}; i=1, 2, \dots, r(t) \\ \sigma_t &= \{E[y^2(t)]\}^{1/2}; \sigma_v = \{E[\dot{y}^2(t)]\}^{1/2} \\ \xi_i &= y(t_i) / \sigma_i; i=1, 2, \dots, r(t) \\ \xi_t &= y(t) / \sigma_t; \dot{\xi}_t = \dot{y}(t) / \sigma_v \end{aligned}$$

$\phi_{1n}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, \xi_i, \xi_i)$  および  $\phi_{2n}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, \xi_i)$  はそれぞれの変数の同時確率密度関数を表わし、その形は任意であるが、これらが正規分布の場合には式 (7), (8) の多重積分の積分回数を 1 回減ずることができる。その結果については文献 5) を参照されたい。

### 3. 定常確率過程に対する線形 1 自由度系の過渡応答

線形 1 自由度系で表わされる構造物に地動加速度  $\ddot{z}(t)$  が作用した場合の運動方程式は

$$\ddot{y} + 2h_n\omega_n\dot{y} + \omega_n^2y = -\ddot{z}(t) \quad \dots\dots\dots(9)$$

ただし、 $y$ : 相対変位、 $\omega_n$ : 固有円振動数、 $h_n$ : 減衰定数。初期条件として  $t \leq 0$  で構造物が静止状態にあったとすると、式 (9) の解は周知のように次式で与えられる。

$$y(t) = -\frac{1}{\omega_n} \int_0^t h(t-\tau') \ddot{z}(\tau') d\tau' \quad \dots\dots\dots(10)$$

ただし、

$$h(t) = e^{-h_n\omega_n t} \sin \bar{\omega}_n t, \quad \bar{\omega}_n = \sqrt{1-h_n^2}\omega_n$$

同様に

$$\dot{y}(t) = -\frac{1}{\omega_n} \int_0^t \dot{h}(t-\tau') \ddot{z}(\tau') d\tau' \quad \dots\dots\dots(11)$$

ただし、

$$h(t) = \bar{\omega}_n e^{-h_n\omega_n t} (\cos \bar{\omega}_n t - \varepsilon_1 \sin \bar{\omega}_n t), \quad \varepsilon_1 = h_n / \sqrt{1-h_n^2}$$

次に、式 (9) の強制項  $\ddot{z}(t)$  を平均値ゼロの確率過程とすると、 $y(t)$ ,  $\dot{y}(t)$  の分散  $\sigma_y^2(t)$ ,  $\sigma_{\dot{y}}^2(t)$ 、および  $y(t)$  と  $\dot{y}(t)$ ,  $y(t_1)$  と  $y(t_2)$ ,  $y(t_1)$  と  $\dot{y}(t_2)$  の相関係数  $\rho_{yy}(t)$ ,  $\rho_{y\dot{y}}(t_1, t_2)$ ,  $\rho_{y\dot{y}}(t_1, t_2)$  はそれぞれ次式より計算される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y^2(t) &= E[y^2(t)] \\ &= \frac{1}{\omega_n^2} \int_0^t h(t-\tau') d\tau' \int_0^t h(t-\tau'') E[\ddot{z}(\tau') \ddot{z}(\tau'')] d\tau'' \\ \sigma_{\dot{y}}^2(t) &= E[\dot{y}^2(t)] \\ &= \frac{1}{\omega_n^2} \int_0^t \dot{h}(t-\tau') d\tau' \int_0^t \dot{h}(t-\tau'') E[\ddot{z}(\tau') \ddot{z}(\tau'')] d\tau'' \\ \rho_{yy}(t) &= E[y(t)\dot{y}(t)] / \{\sigma_y(t)\sigma_{\dot{y}}(t)\} \\ &= \frac{1}{\omega_n^2 \sigma_y(t)\sigma_{\dot{y}}(t)} \int_0^t h(t-\tau') d\tau' \int_0^t \dot{h}(t-\tau'') E[\ddot{z}(\tau') \ddot{z}(\tau'')] d\tau'' \\ \rho_{yy}(t_1, t_2) &= E[y(t_1)y(t_2)] / \{\sigma_y(t_1)\sigma_y(t_2)\} \\ &= \frac{1}{\omega_n^2 \sigma_y(t_1)\sigma_y(t_2)} \int_0^{t_1} h(t_1-\tau') d\tau' \int_0^{t_2} h(t_2-\tau'') E[\ddot{z}(\tau') \ddot{z}(\tau'')] d\tau'' \\ \rho_{y\dot{y}}(t_1, t_2) &= E[y(t_1)\dot{y}(t_2)] / \{\sigma_y(t_1)\sigma_{\dot{y}}(t_2)\} \\ &= \frac{1}{\omega_n^2 \sigma_y(t_1)\sigma_{\dot{y}}(t_2)} \int_0^{t_1} h(t_1-\tau') d\tau' \int_0^{t_2} \dot{h}(t_2-\tau'') E[\ddot{z}(\tau') \ddot{z}(\tau'')] d\tau'' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

ここで  $\beta$  を加速度の次元を持つ定数、 $g(t)$  を平均値ゼロ、分散 1 なる無次元定常確率過程、 $u(t)$  を unit step function として、

$$\ddot{z}(t) = \beta g(t)u(t) \quad \dots\dots\dots(13)$$

とおくと、式 (13) を式 (12) に代入した結果は  $t=0$  で定常確率過程が突然作用した場合の構造物の応答の過渡解を与える。その計算結果を、 $g(t)$  のパワースペクトル  $S_g(\omega)$  を用いて表わすと、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_y^2(t) &= \frac{\beta^2}{\omega_n^4} \int_0^\infty S_g(\omega) \frac{V_1(\omega; t, t)}{H(\omega)} d\omega \\
 \sigma_{\dot{y}}^2(t) &= \frac{\beta^2}{\omega_n^2} (1-h_n^2) \int_0^\infty S_g(\omega) \frac{V_2(\omega; t, t)}{H(\omega)} d\omega \\
 \rho_{y\dot{y}}(t) &= -\frac{\beta^2 \sqrt{1-h_n^2}}{\omega_n^3 \sigma_y(t) \sigma_{\dot{y}}(t)} \int_0^\infty S_g(\omega) \frac{V_3(\omega; t, t)}{H(\omega)} d\omega \\
 \rho_{yy}(t_1, t_2) &= \frac{\beta^2}{\omega_n^4 \sigma_y(t_1) \sigma_y(t_2)} \int_0^\infty S_g(\omega) \frac{V_1(\omega; t_1, t_2)}{H(\omega)} d\omega \\
 \rho_{y\dot{y}}(t_1, t_2) &= -\frac{\beta^2 \sqrt{1-h_n^2}}{\omega_n^3 \sigma_y(t_1) \sigma_{\dot{y}}(t_2)} \int_0^\infty S_g(\omega) \frac{V_3(\omega; t_1, t_2)}{H(\omega)} d\omega
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

ただし,

$$H(\omega) = \{1 - (\omega/\omega_n)^2\}^2 + 4h_n^2(\omega/\omega_n)^2$$

$$\begin{aligned}
 V_1(\omega; t, t) &= 1 - 2e^{-h_n \omega_n t} \left\{ (\cos \bar{\omega}_n t + \varepsilon_1 \sin \bar{\omega}_n t) \cos \omega t + \frac{\omega}{\bar{\omega}_n} \sin \bar{\omega}_n t \sin \omega t \right\} \\
 &\quad + e^{-2h_n \omega_n t} \left\{ \cos^2 \bar{\omega}_n t + \left( \varepsilon_1^2 + \frac{\omega^2}{\bar{\omega}_n^2} \right) \sin^2 \bar{\omega}_n t + \varepsilon_1 \sin 2\bar{\omega}_n t \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_2(\omega; t, t) &= \frac{\omega^2}{\bar{\omega}_n^2} - 2e^{-h_n \omega_n t} \left\{ \frac{\omega^2}{\bar{\omega}_n^2} (\cos \bar{\omega}_n t - \varepsilon_1 \sin \bar{\omega}_n t) \cos \omega t + (1 + \varepsilon_1^2) \frac{\omega}{\bar{\omega}_n} \sin \bar{\omega}_n t \sin \omega t \right\} \\
 &\quad + e^{-2h_n \omega_n t} \left\{ \frac{\omega^2}{\bar{\omega}_n^2} \cos^2 \bar{\omega}_n t + \left[ (1 + \varepsilon_1^2)^2 + \varepsilon_1^2 \frac{\omega^2}{\bar{\omega}_n^2} \right] \sin^2 \bar{\omega}_n t - \varepsilon_1 \frac{\omega^2}{\bar{\omega}_n^2} \sin^2 \bar{\omega}_n t \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_3(\omega; t, t) &= -e^{-h_n \omega_n t} \left\{ 2\varepsilon_1 \frac{\omega}{\bar{\omega}_n} \sin \bar{\omega}_n t \sin \omega t + \left( 1 + \varepsilon_1^2 - \frac{\omega^2}{\bar{\omega}_n^2} \right) \sin \bar{\omega}_n t \cos \omega t \right\} \\
 &\quad + e^{-2h_n \omega_n t} \left\{ \varepsilon_1 \left( 1 + \varepsilon_1^2 + \frac{\omega^2}{\bar{\omega}_n^2} \right) \sin^2 \bar{\omega}_n t + \left( 1 + \varepsilon_1^2 - \frac{\omega^2}{\bar{\omega}_n^2} \right) \sin \bar{\omega}_n t \cos \bar{\omega}_n t \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_1(\omega; t_1, t_2) &= \cos \omega(t_2 - t_1) - e^{-h_n \omega_n t_2} \left\{ (\cos \bar{\omega}_n t_2 + \varepsilon_1 \sin \bar{\omega}_n t_2) \cos \omega t_1 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\omega}{\bar{\omega}_n} \sin \bar{\omega}_n t_2 \sin \omega t_1 \right\} \\
 &\quad - e^{-h_n \omega_n t_1} \left\{ (\cos \bar{\omega}_n t_1 + \varepsilon_1 \sin \bar{\omega}_n t_1) \cos \omega t_2 + \frac{\omega}{\bar{\omega}_n} \sin \bar{\omega}_n t_1 \sin \omega t_2 \right\} \\
 &\quad + e^{-h_n \omega_n (t_2 + t_1)} \left\{ \cos \bar{\omega}_n t_2 \cos \bar{\omega}_n t_1 + \left( \varepsilon_1^2 + \frac{\omega^2}{\bar{\omega}_n^2} \right) \sin \bar{\omega}_n t_2 \sin \bar{\omega}_n t_1 \right. \\
 &\quad \left. + \varepsilon_1 \sin \bar{\omega}_n (t_1 + t_2) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_2(\omega; t_1, t_2) &= \frac{\omega}{\bar{\omega}_n} \sin \omega(t_2 - t_1) + e^{-h_n \omega_n t_2} \left\{ \frac{\omega}{\bar{\omega}_n} (\cos \bar{\omega}_n t_2 - \varepsilon_1 \sin \bar{\omega}_n t_2) \sin \omega t_1 \right. \\
 &\quad \left. - (1 + \varepsilon_1^2) \sin \bar{\omega}_n t_2 \cos \omega t_1 \right\} \\
 &\quad - e^{-h_n \omega_n t_1} \left\{ \frac{\omega}{\bar{\omega}_n} (\cos \bar{\omega}_n t_1 + \varepsilon_1 \sin \bar{\omega}_n t_1) \sin \omega t_2 - \frac{\omega^2}{\bar{\omega}_n^2} \sin \bar{\omega}_n t_1 \cos \omega t_2 \right\} \\
 &\quad + e^{-h_n \omega_n (t_2 + t_1)} \left\{ \varepsilon_1 \left( 1 + \varepsilon_1^2 + \frac{\omega^2}{\bar{\omega}_n^2} \right) \sin \bar{\omega}_n t_2 \sin \bar{\omega}_n t_1 \right. \\
 &\quad \left. + (1 + \varepsilon_1^2) \sin \bar{\omega}_n t_2 \cos \bar{\omega}_n t_1 - \frac{\omega^2}{\bar{\omega}_n^2} \cos \bar{\omega}_n t_2 \sin \bar{\omega}_n t_1 \right\}
 \end{aligned}$$

減衰定数  $h_n$  が小さいときには式 (14) 右辺の  $1/H(\omega)$  は  $\omega = \omega_n$  付近に鋭いピークを有するが、これに比較して  $S_g(\omega)$  が  $\omega = \omega_n$  付近で滑かであれば、T.K. Caughey, H.J. Stumpf 両氏<sup>6)</sup>の方法により、式 (14) は近似的に次式のように簡略化される。

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_y^2(t) &\cong \frac{\pi\beta^2 S_g(\omega_n)}{4h_n\omega_n^3} \{1 - e^{-2h_n\omega_n t} (1 + \varepsilon_1 \sin 2\bar{\omega}_n t + 2\varepsilon_1^2 \sin^2 \bar{\omega}_n t)\} \\
 \sigma_{\dot{y}}^2(t) &\cong \frac{\pi\beta^2 S_g(\omega_n)}{4h_n\omega_n} \{1 - e^{-2h_n\omega_n t} (1 - \varepsilon_1 \sin 2\bar{\omega}_n t - 2\varepsilon_1^2 \sin^2 \bar{\omega}_n t)\} \\
 \rho_{yy}(t) &\cong \frac{\pi\beta^2 S_g(\omega_n)}{2\bar{\omega}_n^2 \sigma_y(t)\sigma_{\dot{y}}(t)\sigma_{\ddot{y}}(t)} e^{-2h_n\omega_n t} \sin^2 \bar{\omega}_n t \\
 \rho_{yy}(t_1, t_2) &\cong \frac{\pi\beta^2 S_g(\omega_n)}{4h_n\omega_n^3 \sigma_y(t_1)\sigma_y(t_2)} [e^{-h_n\omega_n(t_2-t_1)} \{\cos \bar{\omega}_n(t_2-t_1) + \varepsilon_1 \sin \bar{\omega}_n |t_2-t_1|\} \\
 &\quad - e^{-h_n\omega_n(t_2+t_1)} \{\cos \bar{\omega}_n(t_2-t_1) + \varepsilon_1 \sin \bar{\omega}_n(t_2+t_1) + 2\varepsilon_1^2 \sin \bar{\omega}_n t_2 \sin \bar{\omega}_n t_1\}] \\
 \rho_{y\dot{y}}(t_1, t_2) &\cong -\frac{\pi\beta^2 S_g(\omega_n)}{4h_n\bar{\omega}_n\omega_n\sigma_y(t_1)\sigma_{\dot{y}}(t_2)} [e^{-h_n\omega_n(t_2-t_1)} \sin \bar{\omega}_n(t_2-t_1) \\
 &\quad - e^{-h_n\omega_n(t_2+t_1)} \{\sin \bar{\omega}_n(t_2-t_1) + 2\varepsilon_1 \sin \bar{\omega}_n t_2 \sin \bar{\omega}_n t_1\}]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

さらに、 $h_n=0$  のときは式 (15) は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_y^2(t) &\cong \frac{\pi\beta^2}{4\omega_n^3} S_g(\omega_n) (2\omega_n t - \sin 2\omega_n t) \\
 \sigma_{\dot{y}}^2(t) &\cong \frac{\pi\beta^2}{4\omega_n} S_g(\omega_n) (2\omega_n t + \sin 2\omega_n t) \\
 \rho_{yy}(t) &\cong \sin^2 \omega_n t / \{\omega_n t \sqrt{1 - (\sin 2\omega_n t / 2\omega_n t)^2}\} \\
 \rho_{yy}(t_1, t_2) &\cong \{\omega_n(t_2+t_1) \cos \omega_n(t_2-t_1) - \sin \omega_n(t_2+t_1) \\
 &\quad - \omega_n |t_2-t_1| \cos \omega_n(t_2-t_1) + \sin \omega_n |t_2-t_1|\} / \sqrt{(2\omega_n t_1 - \sin 2\omega_n t_1)(2\omega_n t_2 - \sin 2\omega_n t_2)} \\
 \rho_{y\dot{y}}(t_1, t_2) &\cong -\{\omega_n(t_2+t_1) \sin \omega_n(t_2-t_1) - 2 \sin \omega_n t_2 \sin \omega_n t_1 \\
 &\quad - \omega_n |t_2-t_1| \sin \omega_n(t_2-t_1)\} / \sqrt{(2\omega_n t_1 - \sin 2\omega_n t_1)(2\omega_n t_2 + \sin 2\omega_n t_2)}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

式 (14)~(16) のうちそれぞれの第1式は、Caughey, Stumpf 両氏の結果<sup>6)</sup>と一致するものである。

#### 4. 数値計算結果とその考察

前節 3. の式 (14), (15) または (16) から必要な確率量を算出した結果を用いて  $\phi_{1n}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, \xi_t, \dot{\xi}_t)$  および  $\phi_{2n}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, \xi_t)$  を構成し、それらを式 (7), (8) に用いれば、式 (5) から定常入力に対する最大過渡応答の確率分布  $\Phi(Y, \tau)$  を求めることができる。ここでは入力  $z(t)$  が (したがって応答  $y(t)$  も) 正規分布をなす場合について数値計算を行なった。

式 (15), (16) から応答量の分散、相関係数を算出した結果を Fig. 1, 2 に示した。Fig. 1 から、構造物の減衰が大きいほど応答が速かに定常状態に達し、初期条件の影響が消滅する様子がうかがえる。Fig. 2 についても同様のことが言えるが、 $h_n$  が小さく Fig. 1 の  $\sigma_y^2(t)$ ,  $\sigma_{\dot{y}}^2(t)$  が容易に一定値に近づかない場合でも、Fig. 2 の相関係数は応答開始後  $2T_n$  程度の時間で急速に一定値に近づき傾向が見られる。また、Fig. 1 の  $\sigma_{\dot{y}}^2(t)$  と  $\sigma_y^2(t)$  とでは位相のずれがあり、それが Fig. 2 の  $\rho_{yy}(0)$  の値、 $\rho_{yy}(t, t+T_n/2)$  の初期こう配に影響を及ぼしている。

かくして応答の分散、相関係数が求まったので、それらを式 (7), (8) で  $\phi_{1n}$ ,  $\phi_{2n}$  を正規分布とした場合<sup>5)</sup> に適用して、その結果から式 (5) によって過渡領域における最大応答の確率分布  $\Phi(Y, \tau)$  を算出

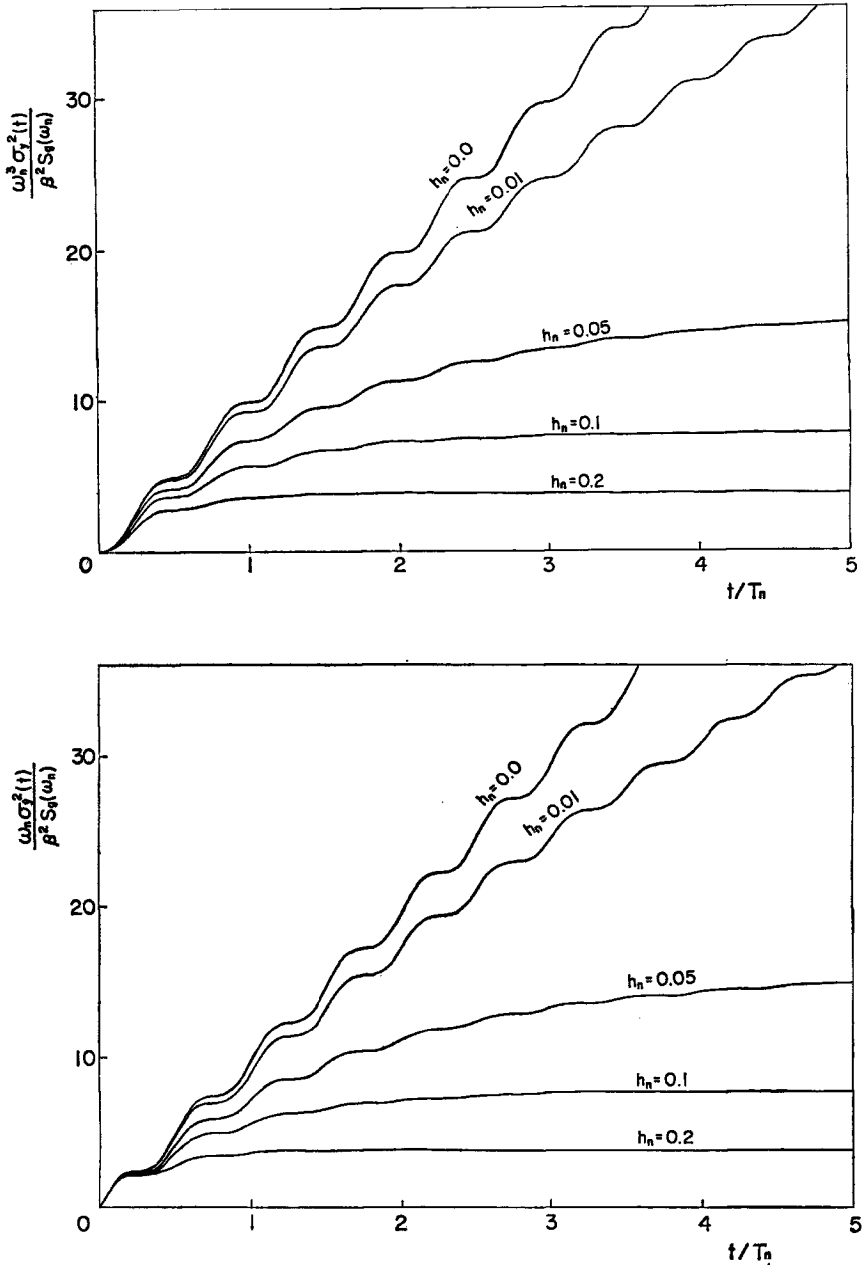


Fig. 1 Variances of the Response

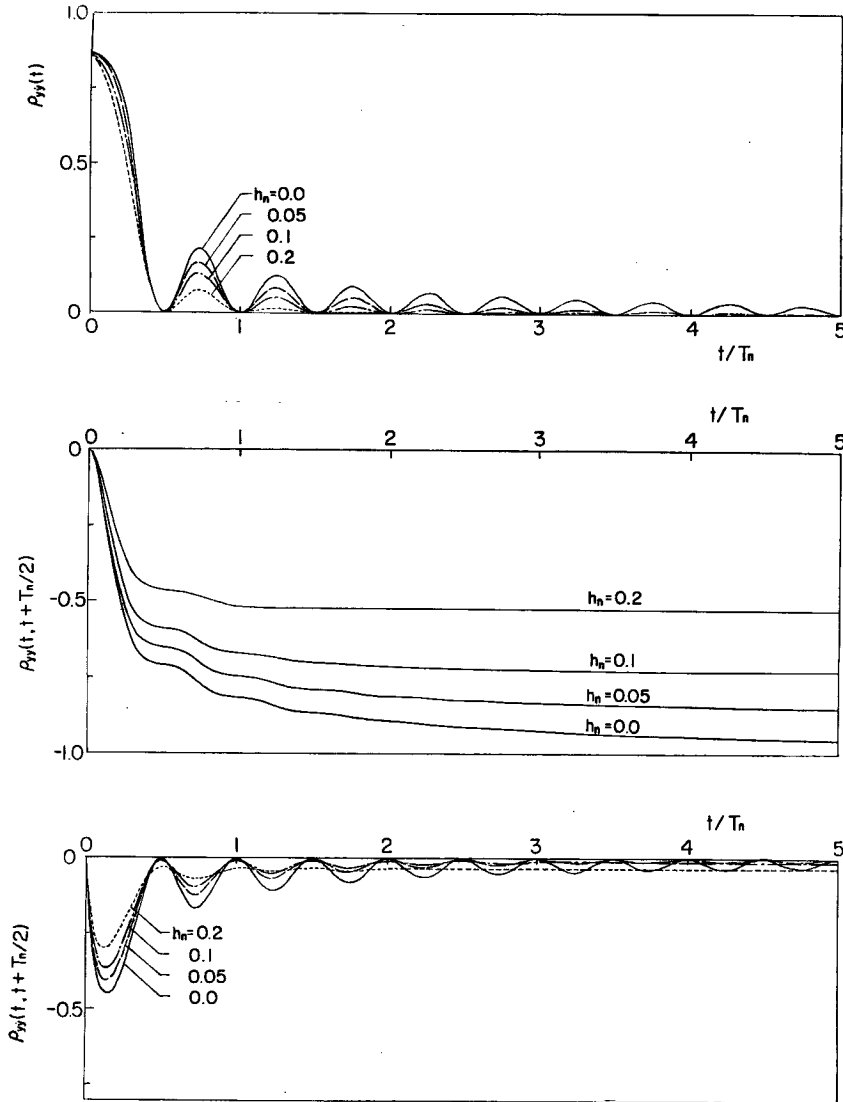


Fig. 2 Correlation Coefficients of the Response

した。式(4)の  $t_r$  としては、 $r=0, 1$  の場合を対象とした。 $r=0$  は  $t=t$  における応答特性が過去の応答経歴に影響されないと仮定することに相当し、これを第1次近似とする。同様に  $r=1$  は第2次近似と言えるが、 $t_1$  としては、比較的精度の良い<sup>5)</sup>  $t_1 = t - T_n/2$  を採用した。計算結果を Fig. 3 に示した。同図で、減衰定数が  $h_n = 0.01 \sim 0.02$  程度の場合には  $r=0$  と  $r=1$  に対する計算結果がかなり異なっているが、 $h_n$  の増加とともに両者の差異は小さくなる。すなわち、 $h_n$  が大きいほど応答の周期特性が広帯域となる結果、相異なる時刻間の応答の相関が小さくなり、 $r=0$  の1次近似でも精度が良くなるものと考えられる。同図から、 $\tau > 10T_n$ 、 $h_n > 0.15$  程度であれば  $r=0$  でもかなり良い近似が得られるが、その他の場合、特に  $h_n$  が小さい場合には  $r \geq 1$  として計算し、できるだけ精度を向上させるよう努めることが望ましい。

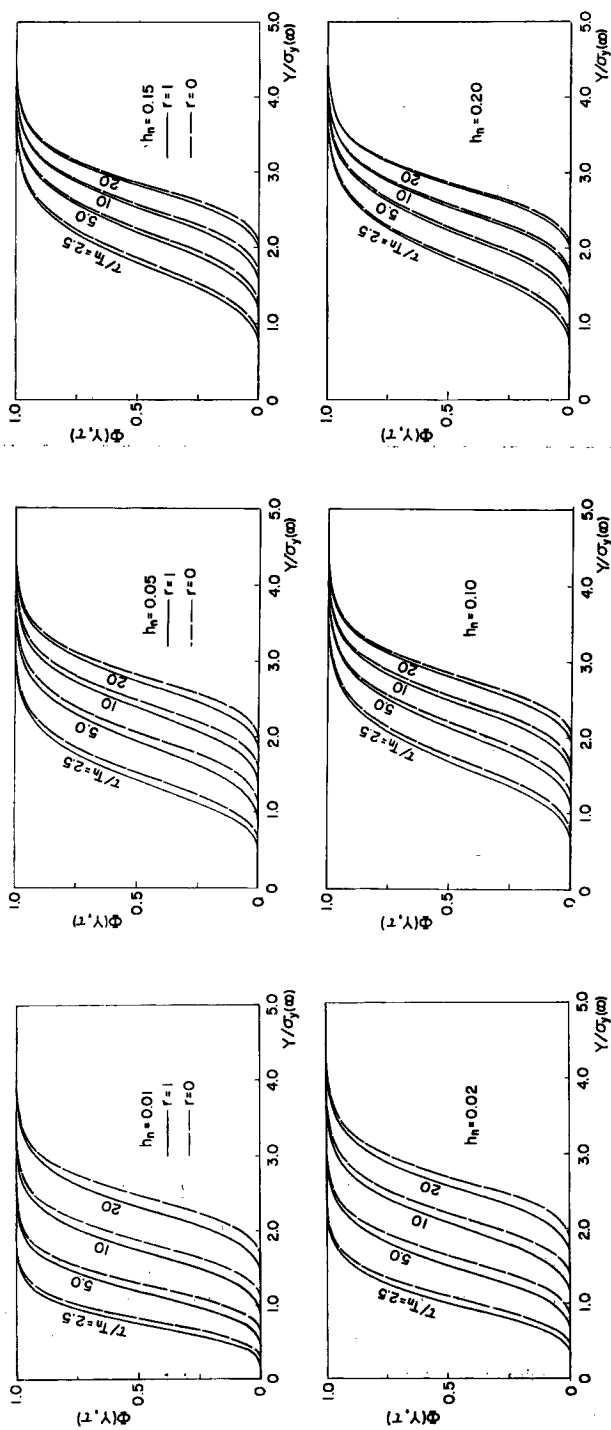


Fig. 3 Probability Distribution of the Maximum Transient Response



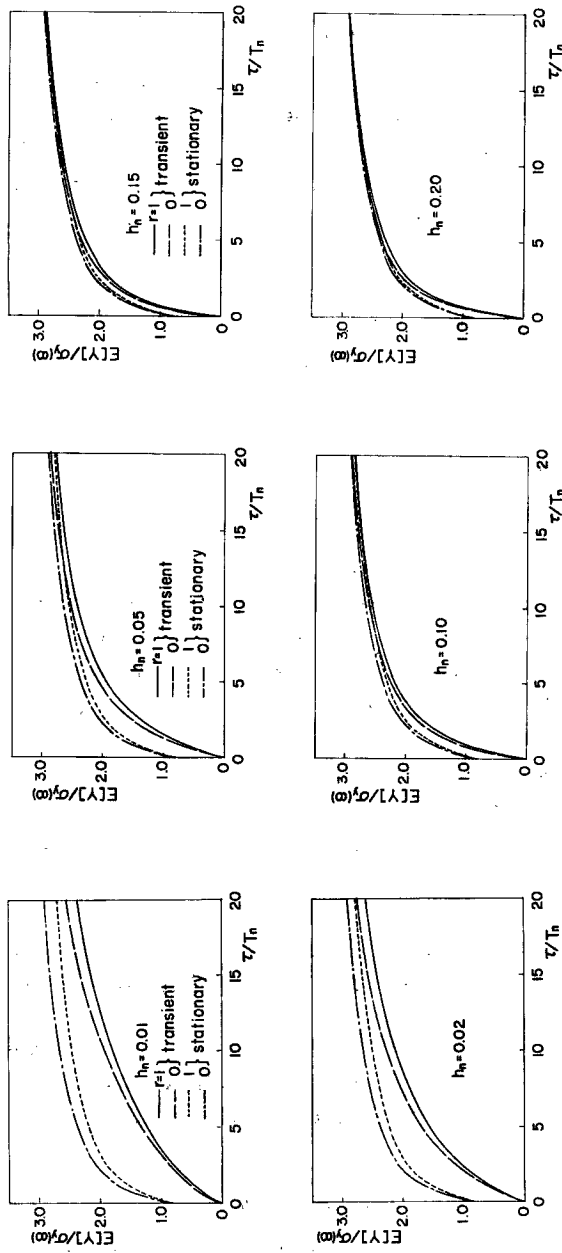


Fig. 4 Expected Value of the Maximum Response

次に、最大応答の期待値  $E[Y]$  を

$$E[Y] = \int_0^{\infty} \{1 - \Phi(Y, \tau)\} dY \quad \dots\dots\dots(17)$$

より算出し、その結果を Fig. 4 に示した。同図には、定常応答に対する  $E[Y]$  もあわせて示したが、これは式 (15), (16) で  $t = \infty$  とした場合、すなわち応答を定常過程とみなせる場合についての  $\Phi(Y, \tau)$  を式 (5) から算出し、その結果を式 (17) に代入して求めたものである。同図で、 $h_n$  が小さいほど  $r=0$  と  $r=1$  に対する計算値の差異が大きくなり、 $h_n$  が大きくなると両者が接近してくる傾向は Fig. 3 と同様であるが、ここではさらに、過渡応答と定常応答とを比較することによって、最大応答に及ぼす初期条件の影響を検討する。

Fig. 2 で  $h_n$  が大きいほど応答  $y(t)$ ,  $\dot{y}(t)$  が速かに定常状態に達することから、 $E[Y]$  についても、 $h_n$  が大きいほど、初期条件の影響から解放されるのに必要な応答継続時間は短くなるのが当然である。実際に Fig. 4 からわかるように、 $h_n = 0.01 \sim 0.02$  では  $\tau = 20T_n$  でも過渡応答と定常応答の間にはかなり差があるのに対し、 $h_n = 0.15 \sim 0.2$  の場合には、両者は  $\tau > 5T_n$  でよく接近しており、初期条件の影響がほとんど及んでいない。ただし、Fig. 1 と Fig. 4 の比較から、最大応答  $Y$  の確率統計的性質が初期条件の影響から脱出するのに必要な応答継続時間は、 $y(t)$  に対する値の 4 倍程度となる。

## 5. 結 言

本研究の成果を要約すれば、次のように結論することができよう。

- (1) 定常確率過程を入力とする線形 1 自由度系の過渡応答  $y(t)$  を解析した結果、減衰定数  $h_n$  が大なるほど定常状態に達するまでの応答時間が短いという従来知られていた結果に加えて、 $y(t)$ ,  $\dot{y}(t)$  の分散が容易に一定値に近づかないような場合でも、 $y(t)$  と  $\dot{y}(t)$  および相異なる時刻  $t_1$ ,  $t_2$  での  $y(t_1)$  と  $y(t_2)$ ,  $\dot{y}(t_1)$  と  $\dot{y}(t_2)$  の相関係数は、応答開始後短時間で一定値に近づき、この傾向は  $h_n$  の大小によってあまり変わらないことが確かめられた。
- (2) 過渡領域での最大応答の確率分布  $\Phi(Y, \tau)$  を本研究で取り扱った近似解法で求めた結果によれば、 $h_n$  が大きいほど近似度が良くなり、 $h_n > 0.15$  では  $r=0$  の 1 次近似でもかなり良い精度が得られるが、 $h_n = 0.01 \sim 0.02$  程度では 1 次近似と  $r=1$  の 2 次近似では結果に無視できない程度の差があるから、ここで取り扱った応答継続時間の範囲内では、できるだけ近似次数を上げて精度の向上に努めることが望ましい。
- (3) 過渡応答の最大値  $Y$  に及ぼす初期条件の影響は、 $h_n$  が大きいほど少なくなるが、それに要する応答継続時間は、応答開始後  $y(t)$  が定常状態に達するまでに要する時間のほぼ 4 倍程度である。

以上、定常確率過程に対する線形 1 自由度系の過渡応答の分散および種々の相関係数、ならびに最大過渡応答の確率分布について論じてきた。現在非定常入力に対する過渡解の解析を進めており、その結果は次の機会に報告したい。終りに、本研究における数値計算は、京都大学計算センターの KDC-II によったことを付記する。

## 参 考 文 献

- 1) Rosenblueth, E. and Bustamante, J.I.: Distribution of Structural Response to Earthquakes, Proc. ASCE, Vol. 88, EM3, June 1962, pp. 75-106.
- 2) Freudenthal, A.M. and Shinozuka, M.: Probability of Structural Failure under Earthquake Acceleration, Trans. JSCE, No. 118, June 1965, pp. 9-15.
- 3) Davenport, A.G.: The Application of Statistical Concepts to the Wind Loading of Structures, Proc. ICE, Vol. 19, 1961, pp. 449-472.

- 4) 小松定夫：長大吊橋の耐風設計法と安全性について，土木学会論文集，142号，昭.42.6，pp. 10～19.
- 5) 後藤尚男・亀田弘行：構造物の不規則振動における最大応答の確率分布について，京都大学防災研究所年報，第11号A，昭.43.3，pp. 239-253.
- 6) Caughey, T.K. and Stumpf, H.J.: Transient Response of a Dynamic System under Random Excitation, Jour. App. Mech., Ser. E, No. 4, Dec. 1961, pp. 563-566.