

建築構造物の地震応答の適正化の一方法 (続)

小堀 鐸二・南井良一郎・河野 允宏

ON THE STATISTICAL ASEISMIC DESIGN DETERMINING THE OPTIMUM DYNAMIC CHARACTERISTICS OF STRUCTURE (CONTINUED)

By *Takuji KOBORI, Ryoichiro MINAI and Masahiro KAWANO*

Synopsis

In the previous paper, the possibility of statistical design of a structural system assigning optimum characteristics for aseismic safety was discussed.

The necessary conditions for optimum design are to limit non-dimensional displacements or ductility factors within the allowable values and to minimize the performance index which describes the degree of spatial uniformity of aseismic safety.

This paper re-defines the optimum design concept for a structural system by the Lagrangian function. As the Lagrangian function of the above problem is given by the statistical quantities of high dimension, the problem can be referred to the non-linear programming problem. Moreover, in this paper, the design method presented in the previous paper is applied to a three-degree-of-freedom, non-linear, shear type system in connection with the re-defined optimum design concept. As a result, it is found that the optimum condition of an elastic structure almost coincides with that of an elasto-plastic structure.

1. ま え が き

構造物系の動的耐震設計は構造物系の地震応答特性から構造物の破壊状態を規定する耐震安全性の尺度の評価に関する研究の蓄積を背景として行なわれて来た。特に、地震外乱の非予測性、不規則性から地震外乱を確率過程と見做したとき構造物の応答特性を確率統計の立場から把握して応答の最大値の確率分布、構造物の破壊確率及び *reliability*²⁾ 等に関する研究が行なわれ構造物の耐震安全性の能力を評価する尺度及び同時に構造物系の設計に対する設計理念に関する資料が提供されて来た。従って、構造物系の適正設計はこの設計理念に基づいて耐震安全性を保証した上で出来るだけ経済的に行なうという事になる。この問題については既に航空機の骨組の設計や構造要素としての梁やトラス等^{4), 5), 6)} の簡単な対象物の設計に応用されている。この場合、設計対象によっては設計条件が全部線形の表現となって所謂 *linear programming problem* として簡単に解けるが殆んどの問題は非線形表現となり *non-linear programming problem* として取扱わねばならない。*non-linear programming problem* は *dynamic programming*⁷⁾ 等の有効な方法によって解けるが問題によっては余り効果がない方法で *non-linear programming problem* の解法については現在、流動状態であると言える。前報の論文¹⁾ では不連続構造物系の適正設計についてその定義を述べ例題として3質点系線形構造物に適用した場合について検討を行なった。この論文では、前報で述べられている適正設計の定義を動力学特性に関する *non-linear programming problem* の形として再定義し、この問題の解法についての有効な方法を示すと共に前論文に提案されている適正設計法を3質点系非線形構造物に適用した場合につき検討を行なった。

2. 不連続構造物系の適正設計の定義とその方法

構造物の適正設計とは一般的に最小の構造材料を使ってしかも設定された構造物の破壊状態を規定する耐震安全性の尺度が可能な限り最大限に耐震能力を発揮するような設計を言う。即ち、力学的安全性の最大効果の保証が得られ更に出来るだけ最小のコストで設計する事である。最近、一連に発表されて来た最小重量設計^{4), 5), 6)}の研究は実際の簡単な構造物及び構造要素の設計に応用されている。ここでは地震外乱及びそれに対する構造物の動的応答が非予測性及び不規則性を示すことから確率過程と見做したときの動的耐震設計に対して上記の意味での適正設計を不連続構造物に適用する問題について論じる。動的耐震設計の適正度判定の問題については構造物の耐震安全性の立場から確定地震入力及び不規則地震外乱に対する構造物の動的解析によって検討が行なわれて来た。その結果から耐震設計に対する経済性の尺度としてベース・シャーもしくはベース・シャー係数等を間接的表現であるけれども採用し耐震安全性については構造物の破壊確率、例えば地震時における低サイクル疲労を考慮した構造物の *reliability*³⁾等の研究から求められる応答レベルの設定によって保証している。従って、問題はこのような適正条件を満足する構造の設計を行なう *structural synthesis* 問題に帰着する。これは地震入力及び構造物の出力応答を確率過程として扱うと構造物の出力応答が解析的に表現出来るので *synthesis* の立場から適正条件に最も適合する構造物の設計を行なう問題を *non-linear programming problem* として扱う事が出来る。

2.1 適正設計の定義

構造物の適正設計を行なう為にはその適正条件を構造物の応答及び構造物の設計対象となる動力学パラメーターによって関数形で表現しなければならない。ここでは構造物の出力に関して適正化の表現となるような目的関数を設定しこの目的関数を動力学パラメーターに関して最大もしくは最小にするような構造物の動力学的特性を求める方法について述べる。上の議論を一般的に表現すると以下ようになる。構造物の耐震設計に於ける耐震安全性と経済性を表現する適正耐震度判定を次のような関数形で表現する。

$$I = \langle J[q = (q_1, q_2, \dots, q_n)] \rangle_P = J[q = (q_1, q_2, \dots, q_n), p = (p_1, p_2, \dots, p_l)] \leq \epsilon \dots \dots (2.1)$$

上式に於いて $J[q]$ は構造物の動力学特性を示すベクトル $q = \{q_j\}$ を含み構造物の耐震安全性を示す出力応答を規定する評価関数 (*performance index*) で $\langle \rangle_P$ は不規則な地震外乱について確率統計的に予測される性質についての耐震解析領域 $p = \{p_s\}$ に於ける平均を示す。 $J[q, p]$ は $\langle \rangle_P$ を関数 J の中に含んだ形に書き直したもので $p = \{p_s\}$ は不規則外乱の特性を規定する種々のパラメーターとする。(2.1)式の意味することは評価関数 $J[q, p]$ を構造物の設計に関する安全性の制約のもとに出来る限りある許容値内で小さくするという事が適正条件に適合する構造物の動力学特性であると考えることが出来る。今、構造物の動力学特性を示すパラメーターを $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ とすると、不連続構造物系の場合、構造物の設計の経済性を示す関数として $f = f(q_1, q_2, \dots, q_n)$ 及び構造物の耐震安全性と変数に関する拘束関数を $g_i = g_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$ で表現すれば適正設計は次のような *non-linear programming problem* になる。拘束値を $b = (h_1, h_2, \dots, h_m)$ として次のような表現となる。

$$\begin{cases} g_i(q_1, q_2, \dots, q_n) - h_i \leq 0, & i = 1, 2, \dots, m \\ \min_{q_j} f(q_1, q_2, \dots, q_n) \end{cases} \dots \dots \dots (2.2)$$

(2.2) 式は耐震安全性および変数に関する拘束条件付の最小値問題に帰着する。(2.2) 式を (2.1) 式のような形^{7), 9)} で表現するのに次式を用いる。

$$J[q, \lambda] = f(q) + \sum_{k=1}^{m'} \lambda_k [g_k(q) - h_k], \quad q = (q_1, \dots, q_n), \quad n' \leq n, \quad m' \leq m \dots \dots \dots (2.3)$$

(2.3) 式は *Lagrangian function* で λ_k は *Lagrangian multipliers* である。(2.2)の問題の解は $(n+m)$ 個の変数 (q_1, q_2, \dots, q_n) とパラメーター $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ について有効な変数および拘束条件のみを選び出した上で J の偏微分を零とおくことによって得られる次式を満足する必要がある。

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial q_l} = \frac{\partial f}{\partial q_l} + \sum_{k=1}^{m'} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial q_l} = 0, & l=1,2,\dots,n' \\ \frac{\partial J}{\partial \lambda_k} = g_k(q) - h_k = 0, & k=1,2,\dots,m' \end{cases} \dots\dots\dots (2.4)$$

(2.4) 式 の 非 線 形 方 程 式 を 満 足 す る パ ラ メ ー タ ー $q^*=(q_1^*, q_2^*, \dots, q_{n'}^*)$ は 一 般 的 に f が *global function* で あ れ ば *absolute minimum* と *relative minimum* を 与 え る 。 従 っ て , $g_i(q)=h_i$ を 満 す q^* の n' 次 元 空 間 $E^{n'}$ に 属 す る *closed set* に 於 け る 全 て の q に 対 し て $f(q^*) \leq f(q)$ が 成 立 す れ ば *absolute minimum* で あ る の で こ の パ ラ メ ー タ ー q^* を J の 目 的 関 数 を 最 小 に す る 値 と す る 。 f が *convex function* で あ れ ば 最 小 値 が 唯 一 つ 決 ま る 。 こ こ で , (2.3) 式 の $f(q)$ と $g(q)$ は 次 の よ う な 形 の 関 数 形 と な る 。 即 ち $f(q)$ は 設 計 の 経 済 性 の 尺 度 の 期 待 値 と 考 え て 構 造 物 系 の 出 力 応 答 に 関 す る *random* 変 数 を 地 震 入 力 を 規 定 す る *random* 変 数 と 共 に $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ で 表 現 す る と 一 般 的 に 定 常 確 率 過 程 の 場 合 に 次 式 の よ う な 表 現 と な る 。

$$f(q) = \iiint \dots \int F(X, q) p(X, q) dx_1 \dots dx_n \dots\dots\dots (2.5)$$

こ こ で $F(X, q)$ は 構 造 物 設 計 の 経 済 性 を 示 す 関 数 で 応 答 特 性 と 入 力 条 件 に 従 属 す る 。 $p(X, q)$ は 応 答 特 性 と 入 力 に 関 す る *random* 変 数 の 同 時 確 率 密 度 関 数 で あ る の で (2.5) 式 の $f(q)$ は 経 済 性 の 尺 度 の 期 待 値 と 考 え る こ と が 出 来 る 。 耐 震 安 全 性 に つ い て は 概 念 的 に 次 の よ う な 2 つ の *safety factor*¹²⁾ が 典 型 的 に 考 え ら れ る 。

$$k = \frac{R(x_1, x_2, \dots, x_r, q)}{S(x_{r+1}, \dots, x_n)} = k(x_1, x_2, \dots, x_n, q) \dots\dots\dots (2.6)$$

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_n, q) = R(x_1, x_2, \dots, x_r, q) - S(x_{r+1}, \dots, x_n) \dots\dots\dots (2.7)$$

こ こ で S は 地 震 外 乱 に よ っ て 構 造 物 系 各 部 に 外 く 外 力 , R は 構 造 物 各 部 の も っ て い る 耐 震 能 力 を 評 価 す る 関 数 , (x_1, \dots, x_r) は 構 造 物 の 耐 震 能 力 関 数 を 定 め る *random* 変 数 , (x_{r+1}, \dots, x_n) は 外 力 の 関 数 を 定 め る *random* 変 数 。 こ こ で , (2.6) の k に つ い て $x_1 = u(k, x_2, \dots, x_n, q)$ な る 変 換 を 行 な い (k, x_2, \dots, x_n) の 変 数 の 同 時 確 率 密 度 関 数 に つ い て (x_2, \dots, x_n) に 関 し て 周 辺 積 分 を 行 な え ば k に つ い て 次 の よ う な 確 率 密 度 関 数 が 定 ま り , こ れ か ら , 容 易 に k の 平 均 値 , 分 散 が 求 め ら れ る 。

$$p(k, q) = \int \dots \int p[u(k, x_2, \dots, x_n, q), x_2, \dots, x_n, q] \left| \frac{\partial u(k, x_2, \dots, x_n, q)}{\partial k} \right| dx_2 \dots dx_n \dots (2.8)$$

ま た (2.6) 式 の *safety factor* に 対 す る 平 均 値 , 分 散 は 直 接 次 式 の よ う に も 表 わ さ れ る 。

$$\begin{cases} M(k, q) = \int \dots \int k(x_1, x_2, \dots, x_n, q) p(x_1, x_2, \dots, x_n, q) dx_1 \dots dx_n \\ V(k, q) = \int \dots \int [k(x_1, \dots, x_n, q) - M(k)]^2 p(x_1, x_2, \dots, x_n, q) dx_1 \dots dx_n \end{cases} \dots\dots\dots (2.9)$$

又 , 構 造 物 の 破 壊 確 率 p_{cr} は (2.8) 式 よ り 次 式 の よ う に 定 義 出 来 る 。

$$p_{cr} = p(k < 1) = \int_0^1 p(k, q) dk \dots\dots\dots (2.10)$$

又 , (2.7) 式 の *safety factor* Ψ に つ い て も (2.6) 式 に 行 な っ た よ う な 操 作 を 行 な え ば $p(\Psi, q)$ が 次 式 の よ う に (2.8) 式 に 対 応 し て 定 ま る 。

$$p(\Psi, q) = \int \dots \int p[u(\Psi, x_2, \dots, x_n, q), x_2, \dots, x_n, q] \left| \frac{\partial u(\Psi, x_2, \dots, x_n, q)}{\partial \Psi} \right| dx_2 \dots dx_n \dots\dots\dots (2.11)$$

(2.11) 式 を 使 う と (2.10) 式 に 対 応 し て 構 造 物 が 終 局 状 態 に 達 す る 確 率 が 次 式 の よ う に 定 ま る 。

$$p_{cr} = p(\Psi < 0) = \int_{-\infty}^0 p(\Psi, q) d\Psi \dots\dots\dots (2.12)$$

従 っ て , (2.3) 式 の $g_k(q)$ の 制 約 条 件 は (2.8), (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) 式 の よ う な 確 率 量 を 対 象 と し て い る 。 こ の 制 約 条 件 は 構 造 物 の 種 類 , 機 能 及 び 規 模 等 に よ っ て 変 化 す る も の と 思 わ れ る 。

2.2 適正設計問題の解法

(2.2) 式 で 設 定 さ れ た 不 等 拘 束 の 問 題 は 普 通 , 煩 雑 な 手 順 を 経 て (2.4) 式 に 転 化 出 来 る 。 (2.2) 式 で $f(q)$

と $g_k(q)$ の両方が線形の表現であれば所謂 *linear programming problem* となり簡単に解ける。しかし、 $f(q)$, $g_i(q)$ が (2.5), (2.8), (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) 等の確率量を対象としたとき殆んどが *dimension* の高い *non-linear* な表現となる。目的関数と拘束条件の中 1 つが線形の表現ならば *dynamic programming*⁷⁾ 等の方法によって有効に解くことが出来るが $f(q)$ と $g_i(q)$ の両方が *non-linear* な表現を持つときは解くのが困難な *non-linear programming problem* となる。この複雑な *non-linear programming problem* を解くには目的関数か拘束条件を近似的に線形表現に置き換える^{8), 7)} か *multiplex method* や *gradient method* の概念を基礎にした方法によって解くことは出来る。しかし、*non-linear programming problem* は $f(q)$ を最も早く減少させる方向が一方でないので拘束条件を満たす任意の点 q に於ける $\nabla f(q)$ を計算し q の変化に応じて修正しながら $-\nabla f(q)$ の方向に動かす方法を取りしかも常に拘束条件を考えて計算していかなくてはならない。そこでこの拘束条件を考慮しなくて *non-linear programming problem* を解く方法、いわゆる *unconstrained optimization technique* が最近急速に研究^{8), 13), 14)} されて来た。その中で最も将来性と問題を解く有効性があると思われる *Carroll* の提案した方法¹³⁾ について述べる。ここでは *minimization* の問題につき限定して考える。この方法は目的関数を出来るだけ早く最小にすると同時に拘束条件に近づく変数に対して非常に厳しい条件を与えるという 2 つの考えから成立していて最小値問題を次式のように変換する。即ち、(2.2) 式に述べられている問題で (2.2) 式の拘束条件の符号を書き直して次のように変形する。

$$\begin{cases} g_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \geq 0, & i=1, 2, \dots, m \\ \min_{q_j} f(q_1, q_2, \dots, q_n) \end{cases} \dots\dots\dots (2.13)$$

(2.13) 式の問題は、(2.3) 式の *Lagrangian function* の表現に似た次に定義する関数を最小にする事によって、不等号拘束条件付の最小値問題から拘束条件のない最小値問題に帰着される。

$$\text{minimize } T(q, r_k) = f(q) + r_k F_c(g_i(q)) \dots\dots\dots (2.14)$$

ここで $F_c(g)$ は次のような性質を持っているとする。

- (i) $F_c(g)$ が全ての $g_i(q) > 0$ に対して *bounded below* であること。
- (ii) $g_i(q)$ が零に収束すると $F_c(g)$ が無限大に発散する。

又、(2.14) 式の *perturbation parameter* r_k は k について単調減少で次式のように定義する。

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0, \quad r_k > 0 \dots\dots\dots (2.15)$$

$F_c(g)$ に対する (ii) の条件は q が拘束条件に近づくとき F_c が発散するような厳しい条件として与えてある。ここで、 $F_c(g)$ は次式のような関数として与えても一般性を失わない。

$$F_c(g) = \sum_{i=1}^m g_i^{-1}(q) \quad \text{又は} \quad F_c(g) = -\sum_{i=1}^m \log(g_i(q)) \dots\dots\dots (2.16)$$

ここでは (2.16) 式の第 1 式を採用している。更に、 q については次のような定義を与える。

$$\begin{cases} R = \{q \mid g_i(q) \geq 0, i=1, 2, \dots, m\} \\ R^0 = \{q \mid g_i(q) > 0, i=1, 2, \dots, m\} \end{cases} \dots\dots\dots (2.17)$$

(2.17) の第 1 式は *feasible point*, 第 2 式は *interior feasible point* と言う。(2.14) 式を最小にする方法は以下のようにして行なう。最初に何らかの方法で *interior feasible point* $q^{(0)}$ を選び *perturbation parameter* r_1 を適当にえらんで次式を最小にする $q(r_1) \in R^0$ を求める。

$$T(q, r_1) = f(q) + r_1 \sum_{i=1}^m g_i^{-1}(q) \dots\dots\dots (2.18)$$

次に同様な操作を $0 < \dots < r_{k+1} < r_k, (k=1, 2, \dots)$ について行なう。この時 $q(r_{k+1})$ を求めるには $T(q, r_k)$ を最小にする $q(r_k)$ を出発値としている。ここで $g_i(q) > 0$ を考慮し更に r_k は (2.15) 式のように操作し $F_c(g)$ に対する条件から一度 *interior feasible region* に入るとそれ以後は q は拘束条件内に留まる事を考えるなら (2.14) 式から $T(q, r_k)$ は確実に n 次元の曲面を最小値へと近づくことは明らかである。従ってこの曲線に沿って $T(q, r_k)$ を最小にする $q(r_k) \in R^0$ を見つけることは可能である。又、 r_k の *parameter* に対する各段階で $T(q, r_k)$ を最小にする $q(r_k)$ を求めるという事は $q(r_k)$ が拘束条件に近づくとき $T(q, r_k)$ が無限大になる事から考えて *optimization* の進行中は拘束条件は侵されない事になる。上の議論から結局次のよう

な結論に達する。 r_k の各段階での $T(q, r_k)$ の最小値を $f(q(r_k))$ とすれば

$$f(q(r_k)) = \min_q T(q, r_k) \quad \dots\dots\dots (2.19)$$

従って r_k について k を無限大にすると次式が成立する。

$$\lim_{r_k \rightarrow 0} f(q(r_k)) = \min_{q \in R} f(q) \quad \dots\dots\dots (2.20)$$

よって、(2.20) 式から拘束条件を侵さないで $f(q)$ を最小にする q を求める事が出来る。

3. 非線形不連続構造物系の適正設計

ここでは2節で述べられている適正設計の条件として次の条件を満足するような非線形不連続構造物系の設計を行なう。

- (1) 構造物の空間方向に対する応答分布性状の適正条件と最大応答値に対する力学的安全性を保証する。
- (2) 構造物設計の経済性を示す尺度としてベース・シャーを採用し、このベース・シャーを設計する動力学パラメーターの範囲で最小にする。

ここで、構造物の動力学的特性の条件として構造物の変位の靱性率応答を空間方向に対して一様にする事と変位応答の最大靱性率がある許容値を越えないことの2つを考えている。以上のように定義した適正設計を行なう場合の非線形不連続構造物系の応答の適正化の方法について述べる。非線形不連続構造物の基礎運動方程式及び確率量は以下のようにして求められる。

3.1 不連続非線形構造物系の基礎運動方程式

一般に剪断形不連続構造物系の変位に関する基礎運動方程式は無次元表示で運動座標系について示せば次式のようになる。

$$[a] \frac{d^2}{d\tau^2} \{\eta\} + [b] \frac{d}{d\tau} \{\eta\} + [k] \{\varphi\} = \{f\} \quad \dots\dots\dots (3.1)$$

ここに、 $[a]$ ；無次元慣性分布， $[k]$ ；無次元剛性分布， $[b]$ ；無次元減衰係数分布， $\{\eta\}$ ；無次元運動変位， $\{\varphi\}$ ；無次元履歴形復元力特性， $\{f\}$ ；無次元地震外乱， τ ；無次元時間で次式のように示される。

$$[a] = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \dots\dots\dots 0 \\ & m_2 & & & \\ & & m_3 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & m_n \end{pmatrix}, \quad [b] = \begin{pmatrix} d_1+d_2 & -d_2 & 0 & \dots\dots\dots 0 \\ -d_2 & d_2+d_3 & -d_3 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -d_n & -d_n \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (3.2)$$

$$[k] = \begin{pmatrix} k_1 & -k_2 & \dots\dots\dots 0 \\ 0 & k_2 & -k_3 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -k_n & \\ & & & & k_n \end{pmatrix}, \quad \{\eta\} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}, \quad \{\varphi\} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}, \quad \{f\} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (3.3)$$

ここで、復元力特性 φ_i は *bi-linear hysteresis* 形を採用し次式のように表現する。

$$\begin{cases} \varphi_i = \varphi_i(\xi_i, \dot{\xi}_i; r_i, \delta_i) = \Phi_i(Y_i - Y_{i-1}, \dot{Y}_i - \dot{Y}_{i-1}; K_i, A_i, r_i) / \bar{d} K_{1i} \\ \xi_i = \eta_i - \eta_{i-1}, \quad \dot{\xi}_i = \dot{\eta}_i - \dot{\eta}_{i-1} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (3.4)$$

r_i ；第2第1分枝剛性比， δ_i ；無次元弾性限変位， φ_i ； i 層無次元弾塑性履歴特性。又、入力地震波 $f_i(\tau)$ は α_Y を無次元加速度振幅 $a(t)$ を加速度波形として次式のように表現される。

$$f_i(\tau) = -m_i \alpha_Y a_Y(\tau) = -m_i \alpha_Y a_Y(\tau/\bar{\lambda}) \quad \dots\dots\dots (3.5)$$

(3.1)，(3.2)，(3.3)，(3.4)，(3.5) の無次元変数，無次元動力学パラメーターと有次元変数，有次元動力学パラメーターとの間には次のような関係がある。

$$\begin{cases} m_i = \frac{M_i}{\bar{M}}, \quad d_i = \frac{D_i}{\sqrt{\bar{M}\bar{K}}}, \quad k_i = \frac{K_{1i}}{\bar{K}}, \quad r_i = \frac{K_{2i}}{K_{1i}} \\ \delta_i = \frac{A_i}{\bar{L}}, \quad \alpha_Y = \frac{\bar{M} A_Y}{\bar{K} \bar{L}}, \quad A_Y = \left| \frac{d^2 \bar{Y}}{d\bar{t}^2} \right|_{\max} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (3.6)$$

又、無次元変位及び無次元時間については次式のような関係がある。

$$\left\{ \begin{aligned} \tau &= \sqrt{\frac{K}{M}} t = \bar{\lambda} t, \quad \eta_i = \frac{Y_i - \bar{Y}}{L}, \quad \alpha_Y(\tau) = a_Y(\tau/\bar{\lambda}) \\ | \alpha_Y(\tau) |_{\max} &= 1, \quad {}_1\tau = \bar{\lambda}_1 T, \quad {}_1\Omega = \bar{\lambda}_1 \omega \end{aligned} \right. \quad \dots\dots\dots (3.7)$$

ここに、 $\bar{M}, \bar{K}, \bar{L}$ はそれぞれ慣性、剛性、長さの規準量である。 Y_i ; 静止座標、 \bar{Y} ; 並進地震変位、 t ; 有次元時間、 M_i ; 質量、 D_i ; 内部減衰係数、 K_1, K_2 ; *bi-linear hysteretic characteristics* の第 1, 第 2 分枝剛性、 A_i ; 弾性限変位、 ${}_1T$; 構造物の基本固有周期、 ${}_1\Omega$; 構造物の基本固有振動数、 ω ; 無次元基本固有振動数、(3.1) 式の弾塑性質点系モデルの任意線形分枝に於いて次式の表現となる。

$$\left([a] \frac{d^2}{d\tau^2} + [b] \frac{d}{d\tau} + [c] \right) \{ \eta \} = \{ f \} \quad \dots\dots\dots (3.8)$$

ここに、 $[c]$ については $[k]$ が相対変位について示されているのに対して線形の場合は $\{ \eta \}$ が運動座標であると次式のようになる。

$$[c] = \begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & & & \\ \vdots & & \ddots & & -k_n \\ 0 & & -k_n & k_n & \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (3.9)$$

無次元動力学特性 $[a], [b], [c]$ は一般に *real square symmetric matrix* である。

3.2 Bi-linear 形履歴特性の等価線形化

(3.1) 式で対象としている非線形復元力特性は *bi-linear hysteresis* 形である。この *type* の非線形特性はそのままの形では解析的表現は出来ないのここでは *Klylov-Bogolubov* 系統の等価線形化の拡張された方法¹⁰⁾ によって *bi-linear* 形の非線形特性を等価的に線形のパネと履歴消費エネルギーによる減衰力に等価的な減衰係数との和として表現する。ここで、履歴特性は安定な *bi-linear* 形履歴特性と考えるから非線形の度合は余り強くない範囲で扱うものとする。従って、第 2 第 1 分枝剛性比は充分大きい *bi-linear* 形履歴特性を対象とする。これは地震入力の *random simulation* によって等価線形化の有効性を調べた結果¹¹⁾ からその有効性の範囲を保証するのに必要な前提である。そこで無次元化した安定な履歴特性関数の中心を座標原点に置き (3.4) 式の履歴特性関数を多質点系の場合に表現すると次式のようになる。

$$\varphi_{0i}(\xi_i, \dot{\xi}_i) = \kappa_{0i} \xi_i + d_{0i} \dot{\xi}_i, \quad i=1, 2, \dots, n \quad \dots\dots\dots (3.10)$$

次に、もとの履歴特性関数との差で示される次式のような誤差関数 $I_i(\kappa_{0i}, d_{0i})$ を最小ならしめるように κ_{0i}, d_{0i} を定める。

$$\begin{aligned} I_i(\kappa_{0i}, d_{0i}) &= \int_{\tau}^{\tau+\tau_i} (\varphi(\xi_i, \dot{\xi}_i) - \varphi_{0i}(\xi_i, \dot{\xi}_i))^2 d\tau \\ &= \int_{\tau}^{\tau+\tau_i} (\varphi_i(\xi_i, \dot{\xi}_i) - \kappa_{0i} \xi_i - d_{0i} \dot{\xi}_i)^2 d\tau, \quad i=1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3.11)$$

(3.11) 式の $I_i(\kappa_{0i}, d_{0i})$ を $\partial I_i / \partial \kappa_{0i} = \partial I_i / \partial d_{0i} = 0$ として κ_{0i}, d_{0i} を評価すると次式のようになる。

$$\kappa_{0i} = \int_{\tau}^{\tau+\tau_i} \varphi_i \xi_i d\tau / \int_{\tau}^{\tau+\tau_i} \xi_i^2 d\tau, \quad d_{0i} = \int_{\tau}^{\tau+\tau_i} \varphi_i \dot{\xi}_i d\tau / \int_{\tau}^{\tau+\tau_i} \dot{\xi}_i^2 d\tau \quad \dots\dots\dots (3.12)$$

ここで (3.11) 式の τ_i は安定な履歴 1 サイクルに要する無次元時間である。次に *slowly varying* を前提として履歴入力 φ が τ 時間中一定振幅 a_i 、一定周波数 ω_i を有する *harmonic* 振動を行なうと仮定した場合 (3.12) 式の積分を評価し κ_{0i}, d_{0i} を求めると次式のようになる。

$$\left\{ \begin{aligned} \kappa_{0i} &= \frac{2(1-r_i)(2-\chi_i)\sqrt{\chi_i-1}}{\pi\chi_i^2} + \frac{1-r_i}{\pi} \cos^{-1}\left(1-\frac{2}{\chi_i}\right) + r_i \\ d_{0i} &= \frac{4(1-r_i)(\chi_i-1)}{\pi\omega_i\chi_i^2}, \quad \chi_i \geq 1, \quad \text{但し } a_i = \chi_i \delta_i \end{aligned} \right\}, \quad \left\{ \begin{aligned} \kappa_{0i} &= 1 \\ d_{0i} &= 0, \quad 0 \leq \chi_i < 1 \end{aligned} \right. \quad \dots\dots\dots (3.13)$$

(3.13) 式に示すように κ_{0i}, d_{0i} は弾塑性領域、 $\chi_i > 1$ で履歴の無次元振幅パラメーター χ_i の *quasi-linear* な関数となり d_{0i} は周波数 ω_i を含んでいる。従って平均周波数 ω_i と極値振幅密度関数 $p(\chi_i)$ を用いて履

歴振巾 χ_i の空間に対する 2 乗平均誤差を最小ならしめるように履歴特性関数の等価線形化関数の係数 κ_{ei} , d_{ei} を定める。履歴特性関数 $\varphi_i(\xi_i, \dot{\xi}_i)$ の等価線形化関数を次式のように定める。

$$\varphi_{ei}(\xi_i, \dot{\xi}_i) = \kappa_{ei}\xi_i + d_{ei}\dot{\xi}_i \dots \dots \dots (3.14)$$

係数 κ_{ei} と d_{ei} は次式の 2 乗平均誤差を κ_{ei} , d_{ei} について最小にする事により次のように定まる。

$$J_i(\kappa_{ei}, d_{ei}) = \int_0^\infty (\varphi_{0i}(\xi_i, \dot{\xi}_i) - \varphi_{ei}(\xi_i, \dot{\xi}_i))^2 p(\chi_i) d\chi_i, \quad i=1, 2, \dots, n \dots \dots \dots (3.15)$$

$$\begin{cases} \kappa_{ei} = \int_0^\infty \kappa_{0i}(\chi_i) p(\chi_i) d\chi_i \\ d_{ei} = \int_1^\infty d_{0i}(\chi_i) p(\chi_i) d\chi_i \end{cases} \dots \dots \dots (3.16)$$

但し、 $p(\chi_i)$ 及び $\bar{\omega}_i$ は次式のように示される。

$$p(\chi_i) = \frac{\chi_i \bar{\omega}_i^2}{R_{\xi_i \dot{\xi}_i}} \exp\left[-\frac{\chi_i^2 \bar{\omega}_i^2}{2R_{\xi_i \dot{\xi}_i}}\right], \quad \bar{\omega}_i = \sqrt{\frac{R_{\xi_i \dot{\xi}_i}}{R_{\xi_i \dot{\xi}_i}}} \dots \dots \dots (3.17)$$

(3.17) 式の第 1 式は振巾についてのレーリー分布である。ここで、 $R_{\xi_i \dot{\xi}_i}$, $R_{\dot{\xi}_i \xi_i}$ は (3.4) 式の ξ_i とその 1 階導関数 $\dot{\xi}_i$ の分散を示す。よって (3.16) 式のように表現された κ_{ei} と d_{ei} を (3.14) 式に代入し (3.14) 式を (3.1) 式に代入すれば (3.1) 式は次式のようになる。

$$\left([a] \frac{d^2}{d\tau^2} + ([b] + [d_e]) \frac{d}{d\tau} + [k_e]\right) \{\eta\} = \{f\} \dots \dots \dots (3.18)$$

ここで (3.18) 式の減衰項マトリックスと剛性マトリックスを次式のように置き換える。

$$[\zeta] = [b] + [d_e], \quad [k] = [k_e] \dots \dots \dots (3.19)$$

ここに $[d_e]$ 及び $[k_e]$ は次式のようになる。

$$[d_e] = \begin{pmatrix} k_1 d_{e1} + k_2 d_{e2} & -k_2 d_{e2} & \dots & 0 \\ -k_2 d_{e2} & k_2 d_{e2} + k_3 d_{e3} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & k_n d_{en} \end{pmatrix}, \quad [k_e] = \begin{pmatrix} k_1 \kappa_{e1} + k_2 \kappa_{e2} & -k_2 \kappa_{e2} & \dots & 0 \\ -k_2 \kappa_{e2} & k_2 \kappa_{e2} + k_3 \kappa_{e3} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & k_n \kappa_{en} \end{pmatrix} \dots (3.20)$$

よって (3.18) 式は次式のように表現出来る。

$$\left([a] \frac{d^2}{d\tau^2} + [\zeta] \frac{d}{d\tau} + [k]\right) \{\eta\} = \{f\} \dots \dots \dots (3.21)$$

そうすると (3.1) 式は (3.8) 式と全く同じ形となり *bi-linear* 形履歴特性の等価線形化によって多質点系の非線形応答を線形応答として扱うことが出来る。

3.3 不連続構造物系の適正動力学特性分布

多質点の不連続構造物の適正設計の為の条件は線形の場合と非線形の場合と全く同じであるが非線形の場合は線形の初期剛性パラメーターの他に *bi-linear* 形の非線形バネ特性を持つので第 2 第 1 分枝剛性比、弾性限変位パラメーター、または、弾性限強度パラメーターが直接的に設計の対象となるパラメーターと考えられる。構造物の設計の安全性の条件に関する適正度は構造物の動的状態での *reliability* が確保出来れば充分であるが構造物の安全性の尺度の評価の段階に於いて構造物の終局状態での破壊を規定する尺度が明確ではない現状では、構造物の靱性率応答を採用し、その最大値の確率分布、応答レベル超過期待回数などを論じ、また半経験的に靱性率の許容応答値を定めている。ここでは、前論文¹⁾と同じように構造物の耐震安全性が少なくとも空間方向に対して一様であることが設計の経済性と構造物の局所的破壊が全体の破壊へと発展しない条件であるとの考えに基づいて不連続系構造物の靱性率の標準偏差が空間方向に対して一様化するよう定めることと靱性率応答の最大値をある許容値内に収めることを力学的な意味での適正条件とした。靱性率応答の最大値を許容値内に収めるのは構造物の適正動力学特性規準量の問題として論議されるので、ここでは空間方向に対し靱性率応答を一様化するような構造物の適正動力学特性分布を求める。構造物の靱性率応答を空間方向に対して一様化する動力学特性分布は次式で定義される評価関数を最小にすることによって求められる。

$$J([a], [\zeta], [\kappa]; {}_r S(\omega)) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(\sigma_i^i - \bar{\sigma})^2}{\bar{\sigma}^2} \\ = \frac{\sum_{i=1}^N \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} {}_r S(\omega) \left| \sum_{j=1}^N G_{\epsilon_j^i}(j\omega) m_j \right|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\int_{-\infty}^{\infty} {}_r S(\omega) \left| \sum_{j=1}^N G_{\epsilon_j^i}(j\omega) m_j \right|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2}{N \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\int_{-\infty}^{\infty} {}_r S(\omega) \left| \sum_{j=1}^N G_{\epsilon_j^i}(j\omega) m_j \right|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2} \quad \dots\dots\dots (3.22)$$

ここに,

$$\{\sigma_i^{i^2}\} = \{ {}_0 R_i^i(0) \} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ {}_0 S_i^i(\omega) \} d\omega, \quad \bar{\sigma} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i^i \quad \dots\dots\dots (3.23)$$

[a], [\zeta], [\kappa] は (3.2), (3.19) で定義されている慣性マトリックス及び非線形特性を等価的に線形化した場合の減衰項を含む減衰マトリックス及び対応する剛性マトリックス。 σ_i^i は構造物各層の靱性率応答に関する標準偏差, $\{ {}_0 S_i^i(\omega) \}$, $\{ {}_0 R_i^i(\tau) \}$ は各層靱性率応答に関する出力のスペクトル密度と対応する相関関数。 $G_{\epsilon_j^i}(\omega)$ は靱性率応答に関する伝達関数マトリックス $[G(j\omega)]_i$ の (i, j) 要素で ${}_r S(\omega)$ は入力加速度のスペクトル密度を示す。(3.22) を計算するには (3.23) の標準偏差を求めなければならない。(3.21) 式の両辺をラプラス変換することによって求まる変位, 入力関数を $\tilde{\eta}(s)$, $\tilde{f}(s)$ 運動座標系に関する伝達マトリックスを $[G(j\omega)]_q$ とすると運動座標系の変位のスペクトル密度が次式のように定まる。

$$[{}_0 S(\omega)]_q = E \{ \tilde{\eta}(s) \} \{ \tilde{\eta}(s) \}^* = [G(j\omega)]_q [{}_r S(\omega)] [G(j\omega)]_q^* \quad \dots\dots\dots (3.24)$$

$$[G(j\omega)]_q = ([A]s^2 + [\zeta]s + [\kappa])^{-1}, \{ \tilde{\eta}(s) \} \subset \{ \eta \}, \{ \tilde{f}(s) \} \subset \{ f \}, \text{ 但し, } s = j\omega \quad \dots\dots\dots (3.25)$$

ここで s: ラプラス変換複素パラメーター, [A]* は [A] の *transposed conjugate matrix* を示し, [A]⁻¹ は [A] の逆マトリックスを示している。又, [{}_r S(\omega)] は入力スペクトル密度マトリックス。(3.22) に示されている $J([a], [\zeta], [\kappa]; {}_r S(\omega))$ の中の標準偏差 σ_i^i は相対変位に関する靱性率で定義されるので ξ を相対変位, η を運動変位とすれば ξ と η と間には次式が成立する。

$$\{ \xi \} = [J] \{ \eta \}, \quad [J] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (3.26)$$

(3.26) 式の関係を使えば (3.24) 式の運動変位のスペクトル密度マトリックスは次式のように相対変位のスペクトル密度マトリックスに変換される。

$$[{}_0 S(\omega)]_i = \{ \xi(s) \} \{ \xi(s) \}^* = [J] [{}_0 S(\omega)]_q [J]^T \quad \dots\dots\dots (3.27)$$

よって, 相対変位の標準偏差が次式のように求まる。

$$\{ \sigma_i^{i^2} \}_i = \{ R_i^i(0) \}_i = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ {}_0 S_i^i(\omega) \}_i d\omega \quad \dots\dots\dots (3.28)$$

(3.28) の積分の評価は複素積分となり以下の方法で比較的簡単に機械的に評価出来る。(3.28) 式は次式のような表現の積分評価と考えることが出来る。

$$\{ \sigma^2 \}_i = \{ I \} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \{ |p(s)|^2 \} ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left\{ \frac{\beta(s) \cdot \beta(-s)}{\alpha(s) \cdot \alpha(-s)} \right\} ds \quad \dots\dots\dots (3.29)$$

ここで, 不連続構造物の性質より $\alpha(s)$, $\beta(s)$ は次のように s の power について展開出来る。

$$\alpha(s) = \sum_{i=0}^n \alpha_i s^i, \quad \beta(s) = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i s^i \quad \dots\dots\dots (3.30)$$

(3.29) 式の被積分関数は次式のように分解出来る。

$$|p(s)|^2 = \frac{\beta(s) \cdot \beta(-s)}{\alpha(s) \cdot \alpha(-s)} = \frac{a(s)}{\alpha(s)} + \frac{a(-s)}{\alpha(-s)} \quad \dots\dots\dots (3.31)$$

(3.31) 式の a(s) も又 (3.30) と同様 s について次のような表現が出来る。

$$a(s) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i \quad \dots\dots\dots (3.32)$$

ここで $|p(s)|^2$ は偶関数であるから (3.29) 式の積分は (3.31) を考慮すると次式のように評価出来る。

$$\{I\} = \frac{1}{\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left\{ \frac{a(s)}{\alpha(s)} \right\} ds \dots\dots\dots (3.33)$$

(3.33) の要素を取り出して積分値を評価する。I の値は *initial value theorem* によって次式のように与えられる。

$$I = 2\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{a(s)}{\alpha(s)} \right]_{s=0} = 2 \lim_{s \rightarrow 0} s \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{a(s)}{\alpha(s)} \right] = 2 \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{sa(s)}{\alpha(s)} = \frac{2a_{n-1}}{\alpha_n} \dots\dots\dots (3.34)$$

よって積分 I を評価しようとすれば a_{n-1} の係数のみを評価すればよい。 a_{n-1} の値を評価するには (3.31) の両辺の分母を払った式から求められる。(3.31) 式より

$$a(s)\alpha(-s) + a(-s)\alpha(s) = \beta(s)\beta(-s) \dots\dots\dots (3.35)$$

(3.35) 式の左辺に (3.30), (3.32) を代入してまとめると

$$a(s)\alpha(-s) = \sum_{m=0}^{2n-1} A_m s^m, \quad a(-s)\alpha(s) = \sum_{m=0}^{2n-1} (-1)^m A_m s^m \dots\dots\dots (3.36)$$

但し, A_m については次式のようになる。

$$\begin{aligned} A_m &= \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} a_i \alpha_{m-i}, \quad 0 \leq m \leq n-1 \dots\dots\dots (3.37) \\ &= \sum_{i=m-n}^{n-1} (-1)^{m-i} a_i \alpha_{m-i}, \quad n \leq m \leq 2n-1 \end{aligned}$$

(3.35) 式の右辺は (3.30) の第 2 式を代入してまとめると

$$\beta(s)\beta(-s) = \sum_{i,k=0}^{n-1} (-1)^k \beta_i \beta_k s^{i+k} = \sum_{m=0}^{2n-2} 2B_m s^m \dots\dots\dots (3.38)$$

但し, B_m については次式のようになる。

$$\begin{aligned} 2B_m &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k \beta_{m-k}, \quad 0 \leq m \leq n-1 \dots\dots\dots (3.39) \\ &= \sum_{k=m-n+1}^{n-1} (-1)^k \beta_k \beta_{m-k}, \quad n \leq m \leq 2(n-1) \end{aligned}$$

(3.35) に (3.36) と (3.39) 式を夫々代入し両辺についてまとめると次式の等式が成立する。

$$\sum_{m=0}^{2n-1} \frac{1+(-1)^m}{2} A_m s^m = \sum_{m=0}^{2n-2} B_m s^m \dots\dots\dots (3.40)$$

上式は m が偶数のときのみ意味があるので n 個の関係が次のように求まる。

$$A_m = B_m, \quad (m=0, 2, 4, \dots, 2(n-1)) \dots\dots\dots (3.41)$$

(3.41) 式に (3.37), (3.39) を代入すると次式が成立する。

$$\begin{aligned} B_m &= \sum_{i=0}^m (-1)^i a_i \alpha_{m-i}, \quad 0 \leq m \leq n-1 \dots\dots\dots (3.42) \\ &= \sum_{i=m-n}^{n-1} (-1)^i a_i \alpha_{m-i}, \quad n \leq m \leq 2n-1 \end{aligned}$$

(3.42) 式は結局次の形の *matrix* の形で表現出来る。

$$[\alpha]\{a\} = \{B\}, \quad \{a\} = [\alpha]^{-1}\{B\} \dots\dots\dots (3.43)$$

ここに $\{B\}$, $\{a\}$ は次式のように表現される。

$$\{B\} = [B_0, B_2, \dots, B_{2(n-1)}]^T, \quad \{a\} = [a_0, -a_1, \dots, (-1)^{n-1}a_{n-1}]^T \dots\dots\dots (3.44)$$

よって (3.43) 式を使えば (3.34) 式の係数 a_{n-1} が評価出来るので計算機によって任意の次数の積分が評価出来る。上記の方法によって求められた (3.28) 式の標準偏差 σ_i^i を (3.22) 式に代入し $J[a, [\zeta], [\kappa]; {}_iS(\omega)]$ の最小値がある動力学パラメータの範囲で求める。J の最小値に対応して空間方向に対して靱性率応答が最も一様になる適正初期剛性分布 $\{k\}$ が定まり、これはの無次元量で表わすことが出来る。即ち、次式が成立する。

$$[J[a^*, [\zeta^*], [\kappa^*]; {}_iS(\omega)]]_{\text{optimum}} = \min_{\{k\}} J[a, [\zeta], [\kappa]; {}_iS(\omega)] \dots\dots\dots (3.45)$$

ここで、J の関数は前論文¹⁾により典型的な *convex* 形であるから (3.45) 式を満たす動力学パラメータは、例えば

剪断型の場合, $[a], [\zeta], {}_i S(\omega)$ を既知として, これらに対する適正な剛性分布 $q^* = \{k^*\}$ が次式から定まる。

$$\left[\frac{\partial J[q; {}_i S(\omega)]}{\partial q_l} \right]_{l=q^*} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 J[q; {}_i S(\omega)]}{\partial q_l^2} \right]_{l=q^*} > 0 \quad l=1, 2, \dots, n \quad (3.46)$$

最も理想的な適正動力学特性分布は (3.46) 式の外に

$$J([a^*], [\zeta^*], [k^*]; {}_i S(\omega)) = 0 \quad (3.47)$$

を満足する動力学ベクトル q^* であるが (3.22) 式の J を最小にする際に種々の拘束条件がある場合は必ずしも (3.46) 式を満足する q^* が適正動力学特性分布であるとは言えない。

3.4 不連続構造物系の適正動力学特性規準量

構造物の設計は力学的安全性を保証した上で最も経済的となるような設計が望ましい。3.3 節で述べた適正動力学特性分布は両者の要求を満すことによって求められたが, これは, 分布で表現されるので構造物の設計に於ける絶対量を規制はしない。従って, 構造物の設計値の絶対値を決定するのは (3.6) 式の無次元の動力学パラメータを定める為に用いられた規準量である。ここでは強度の規準量としてベース・シャーを採用している。ベース・シャーを求める際に靱性率応答の最大値がある許容値に収まるようにする。ベース・シャーを求める手順は前論文¹⁾に述べてある。これは耐震安全性の尺度の終局値の不確定性を考慮した応答安全率 ν_i を導入し構造物系の基本周期を半経験的に予測し構造物の平均最大靱性率を許容応答量以下にすることによって求める。前論文¹⁾によれば構造物の各層の平均最大靱性率 $\{\gamma_{ai}\}$ を次式のように定義する。

$$\{\gamma_{ai}\} = \gamma_{a1} \left\{ \frac{\gamma_{di}}{\gamma_{d1}} \right\} = \{\psi_{0i} \sigma_i\} = \psi_{0i} \sigma_1 \left\{ \frac{0i \sigma_i}{0i \sigma_1} \right\}, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3.48)$$

この最大靱性率を許容値内に収める為に次式が成立しなければならない。

$$\{\gamma_{ai}\} = \psi_{0i} \sigma_1 \left\{ \frac{0i \sigma_i}{0i \sigma_1} \right\} \leq \{\gamma_{allow}\} = \gamma_a \{\nu_i\}, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3.49)$$

ここで ψ は最大靱性率推定の為の定数。(3.49)の応答安全率 $\{\nu_i\}$ を左辺に入れて書き直し空間方向の最大値を許容値内に収めるよう操作し, このように正規化された靱性率が空間方向に対して一様であるような動力学特性分布に対応させて (3.49) を次のような形に書きなおす。

$$\psi \cdot \psi'_{0i} \sigma_1 = \gamma_a, \quad \psi' = \max_i \left\{ \frac{0i \sigma_i}{0i \sigma_1} \right\} \quad (3.50)$$

(3.50) 式の第 2 式の最大靱性率に対する係数は空間方向に対する標準偏差の定数倍であるが平均値に加わると仮定して, (3.50) 式を次のように書く。

$$\gamma_a = \psi \cdot \sigma \left(1 + \mu \sqrt{J([a^*], [\zeta^*], [k^*]; {}_i S(\omega))} \right) \quad (3.51)$$

但し, μ は空間方向に対する最大値推定の為の定数。又,

$$\sigma = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \psi_{0i} \sigma_i \quad (3.52)$$

ここで σ は入力レベル S_0 のときの正規化靱性率の標準偏差の平均とする。(3.51) 式によるこのときの最大靱性率応答を γ_a とすれば, 許容応答量 γ_a に対する適正な強度規準量すなわちベース・シャーは次式で定まる。

$$\bar{B}_{opt.}(\gamma_a) = \bar{M} \sqrt{\lambda} \sqrt{\frac{S}{S_0}} = \bar{M} \sqrt{\frac{1}{T}} \sqrt{\frac{S}{S_0}} \quad (3.53)$$

ここで $\mu=3.0$ として γ_s を次式で定義する。

$$\gamma_s = \sqrt{2\pi} \sigma \left(1 + 3 \sqrt{J([a^*], [\zeta^*], [k^*]; {}_i S(\omega))} \right) / \sqrt{1/T} \quad (3.54)$$

この場合 \bar{M} は既知量であるから, T を設計量として与えれば \bar{K} も必然的に求まる。又, S は地震外乱の有次元スペクトル密度を示す。(3.53) に対応して他の規準量 $\bar{K}_{opt.}, \bar{J}_{opt.} = \bar{B}_{opt.} / \bar{K}_{opt.}$ も定まり 3.3 節で求めた適正動力学特性分布とこの規準量との積をとれば適正動力学特性が定まる。従って種々の無次元スペクト

ル密度レベル S_0 に対して適正動力学特性分布と対応する許容靱性率 r_a を計算しておけば地震外乱強度が与えられるとき適正動力学特性が定まることになる。

4. 数値計算例

3 節で述べた確率統計的方法による不連続非線形構造物系の設計の妥当性と設計される構造物の応答特性を検討する為に以下のような構造物の動力学モデルを採用した。対象とした地震入力とは定常確率過程と考えて *white noise* を採用した。構造物系の自由度は 3 とした。

- (1) 質量分布 $[a]$ は一様であり次のように与える。

$$\{m_i\} = \{1, 1, 1\} \dots\dots\dots (4.1)$$

- (2) 剛性分布 $\{k_i\}$ は各層の第 1 分枝の初期剛性として次式の分布関数形を使用した。

$$\{k_i\} = \left\{ 1 - \lambda \left(\frac{i-1}{3-1} \right)^\nu \right\}, \quad i=1, 2, 3 \dots\dots\dots (4.2)$$

ここで、 (λ, ν) は剛性分布に対する構造指数で λ は最上層と最下層の剛性比に関する量で ν は分布の変動を示す量で以下の場合について検討を行なった。

$$\begin{cases} \lambda = [0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7] \\ \nu = [0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0] \end{cases} \dots\dots\dots (4.3)$$

なお、弾性限界変位分布 δ_i はすべて 1 とする。

- (3) 減衰係数 $[b]$ は剛性分布 $[k]$ に比例するように設定した。

$$\{b_i\} = \alpha \{k_i\} = \frac{2_i h}{1 \omega} \{k_i\} \dots\dots\dots (4.4)$$

ここに、 α は比例定数、 1ω は構造物系の無減衰時の 1 次固有振動数で、 $1 h$ は対応する臨界減衰比である。ここでは $h=0.01$ の場合の検討を行なった。

- (4) *bi-linear* 形の履歴特性の第 2 第 1 分枝剛性比 r_i は等価線形化の有効性を保つため次のような値とした。

$$r_i = R = 0.5, 0.7, 0.9, \quad i=1, 2, 3 \dots\dots\dots (4.5)$$

- (5) 地震入力レベル S_0 は次のような値とした。

$$S_0 = 0.1, 0.5, 1.0 \dots\dots\dots (4.6)$$

以上のように構造物系の動力学パラメーターを設定し、剛性分布及び強度規準量を未知量と考え、(3.22) 式で定義された空間方向の靱性率の一様性を示す関数を最小にする指数 (λ, ν) をパラメトリック・サーチによって求める。この問題は構造物の設計に際し *design philosophy* に沿って構造物の *synthesis* を行なう訳であるが、また設計された構造物の特性を中心に動力学特性を変化させた場合の動的応答特性の変動の性状の *analysis* にも適用出来る。

5. 解析結果および考察

4 節で設定した動力学モデルを使い地震入力を定常確率過程として *white noise* を使った場合の 3 質点剪断形不連続構造物の適正設計および構造物の応答特性について *synthesis* と *analysis* の立場から考察を行なう。

Fig. 1 は剛性指数 $\nu=1.5, \lambda=0.4, 0.5, 0.6$ について構造物の非線形振動領域での剛性の低下の状態を入力レベル S_0 を横軸に示し、 $R=0.5$ の場合について示したものである。横軸に平行な各線が線形の剛性である。この図から 1 層、2 層、3 層ともに剛性の低下はほぼ同様である。 λ の違いについては大体どれも一様な低下の仕方をしている。これはこの程度の剛性指数が適正であることに対応している。

Fig. 2 は剛性指数 $\lambda=0.5, \nu=1.5$ のとき剛性の低下を R をパラメーターにし横軸に S_0 をとり示した図である。 $R=0.9$ では $S_0=0.1$ 位で落ち込んでからは S_0 の増加に対して比較的平坦である。 $R=0.5$ になると

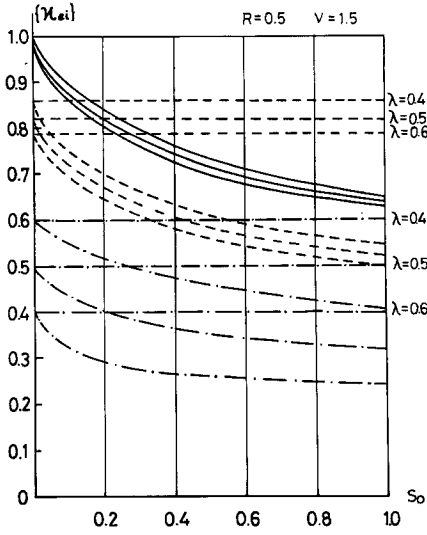


Fig. 1 Equivalent stiffness distribution.

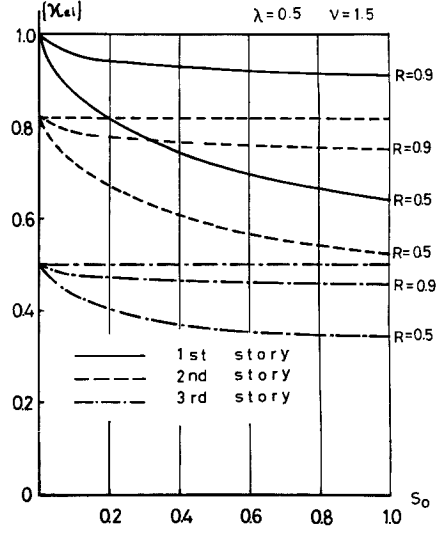


Fig. 2 Equivalent stiffness distribution.

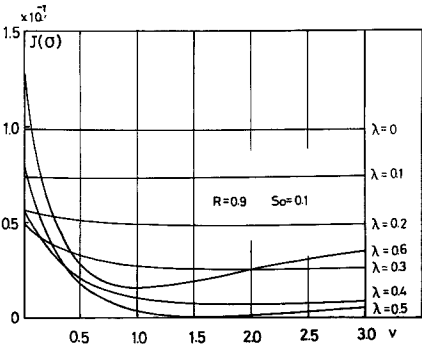


Fig. 3 Performance index value.

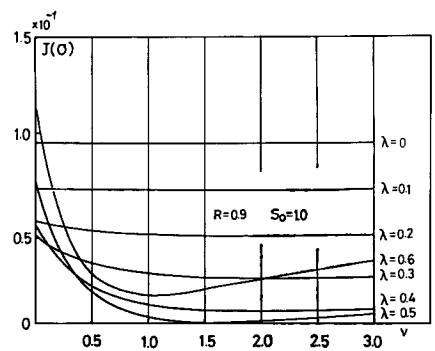


Fig. 4 Performance index value.

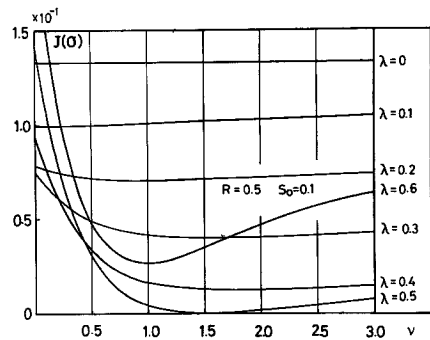


Fig. 5 Performance index value.

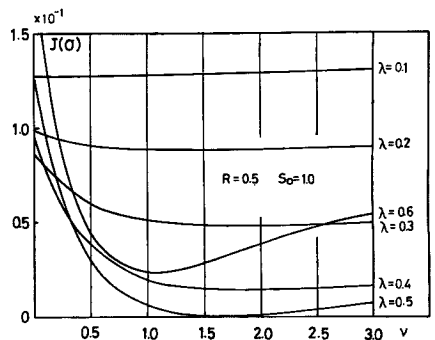


Fig. 6 Performance index value.

一般に剛性の低下は大きい方が3層では $S_0=0.5$ 位までは落ち込みが激しいがそれ以後は平坦になっている。

Figs. 1, 2 から入力レベル S_0 が大きくなるにつれて剛性の低下が大きくなるがある値に収束するような低下の仕方をしていて S_0 のある値までは大きく落ち込むがそれ以上のに対しては比較的 S_0 の増加に対して平坦である。これは剛性依存が第1分枝から第2分枝へと移行する為と考えられる。また、剛性の低下は剛性指数 (λ, ν) や入力レベル S_0 の影響よりも第2第1分枝剛性比 R の影響を大きく受けている。

Figs. 3, 4, 5, 6 に (3.22) 式で定義した靱性率応答一様化の度合を示す関数を $R=0.5, 0.9, S_0=0.1, 1.0$ の場合について示してある。これ等4つの図から線形の場合¹⁾と傾向がよく似ていていずれも $\lambda=0.5, \nu=1.5$ の所で J の最小値をとることが分る。又、 $\lambda > 0.5$ では ν に対する変動は線形よりも大きな値をとる。又、 $\lambda < 0.5$ では比較的 ν に対して $\nu > 1.0$ の領域で平坦であると言える。これより最小値を取る (λ, ν) については靱性率応答が線形の場合と同じく空間方向に対し殆んど一樣になるが $\lambda=0.5$ を離れると線形の場合より応答のパラツキが大きいたることが分る。これは構造物が非線形振動を行なうとき線形領域から非線形領域に移る際に線形で応答が一樣であれば各層での非線形領域への移行も同じ応答レベルで行なわれるので線形時の応答特性が保たれるものと思われる。一方、線形振動のとき既に各層について応答がバラツキを示しているときは非線形振動領域に移行すると線形時のバラツキがそのまま拡大されて行くという事実を説明していると思われる。上の議論から評価関数 J を最小にする (λ, ν) は非線形応答の場合も次のように書くことが出来る。

$$[J(\alpha), [\zeta], [\varepsilon]; {}_r S(\omega)]_{\min} = [J(\lambda, \nu)]_{\min} = J(0.5, 1.5) \dots\dots\dots (5.1)$$

但し、(5.1) の (λ, ν) は線形領域の初期剛性指数であり非線形領域に入るとこの (λ, ν) とは違った値となるが、線形時の剛性指数 $\lambda=0.5, \nu=1.5$ から出発すれば非線形応答に於いても空間方向に対して一樣であることが保証される事になる。又、4つの図より第2第1分枝剛性比 R が同じのときは入力レベル S_0 が大きい方がむしろ応答のパラツキが小さくなっている。これは入力レベルが大きくなることによって履歴消費エネルギーによる減衰力が大きくなって応答抑制効果となる事を示していると考えられる。非線形では入力レベルが大きくなるにつれて変位応答が大きくなりある入力レベルに達すると上記の意味での減衰が働いて応答が抑制されてあまり発達しなくなり、さらにあるその入力レベルを超えると応答の増大が促進されるような入力レベルが存在するが、**3.2** で示された等価線形化の方法によって得られた等価剛性及び等価減衰の関数形の性質により、ここで扱っている応答についてはそのような傾向は示されず一方的に入力レベルが大きくなると応答抑制効果が増加して行く。**Figs. 7, 8, 9, 10**は上記の4つの評価関数 J に対応する変位応答 $\frac{\sigma_i^4}{\delta} \left(\frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^3 \sigma_i^4 = 3 \right)$ を各層について $R=0.5, 0.9, S_0=0.1, 1.0$ の場合について示してある。全体的傾向は評価関数で述べられた如く線形応答と類似している。これ等の4つの図より線形時と同じように1層が λ について単調減少、2層は大体平坦となり第3層は λ について単調増加している。そして、 $\lambda=0.5, \nu=1.5$ の所で1, 2, 3層が交わる。 $R=0.9$ については殆んど線形応答特性と変わらないが、 $R=0.5$ については $\lambda=0.5, \nu=1.5$ 附近の応答特性は余り変化を受けないがその点を離れると変位応答のパラツキが大きくなっている。 $(\lambda, \nu)=(0.5, 1.5)$ の点に於ける評価関数の値を $R=0.5, 0.9, S_0=0.1, 1.0$ の場合について比較すると次のようになる。

$$\left\{ \begin{array}{ll} [J(0.5, 1.5)]_{R=0.9, S_0=0.1} = 1.1452 \times 10^{-4}, & [J(0.5, 1.5)]_{R=0.9, S_0=1.0} = 1.0889 \times 10^{-4} \\ [J(0.5, 1.5)]_{R=0.5, S_0=0.1} = 1.0659 \times 10^{-4}, & [J(0.5, 1.5)]_{R=0.5, S_0=1.0} = 3.5068 \times 10^{-5} \\ [J(0.5, 1.5)]_{R=0.9, S_0=0.1} = 1.0517, & [J(0.5, 1.5)]_{R=0.5, S_0=0.1} = 3.0968 \dots (5.2) \\ [J(0.5, 1.5)]_{R=0.9, S_0=1.0} & [J(0.5, 1.5)]_{R=0.5, S_0=1.0} \\ [J(0.5, 1.5)]_{R=0.9, S_0=0.1} = 1.0545, & [J(0.5, 1.5)]_{R=0.9, S_0=1.0} = 3.1051 \\ [J(0.5, 1.5)]_{R=0.5, S_0=0.1} & [J(0.5, 1.5)]_{R=0.5, S_0=1.0} \end{array} \right.$$

これより入力レベル S_0 が大きくなればなる程又 R が小さくなればなる程応答のパラツキが小さいことが分る。又、(5.2) から S_0 のレベルが10倍に上ったときの J の減少度と R が0.9から0.5になったとき

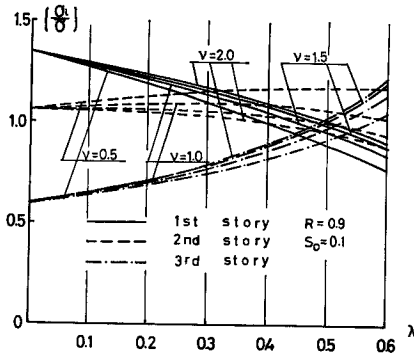


Fig. 7 Standard deviation of non-dimensional displacement of non-linear system.

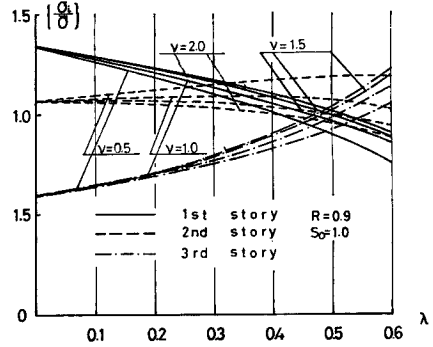


Fig. 8 Standard deviation of non-dimensional displacement of non-linear system.

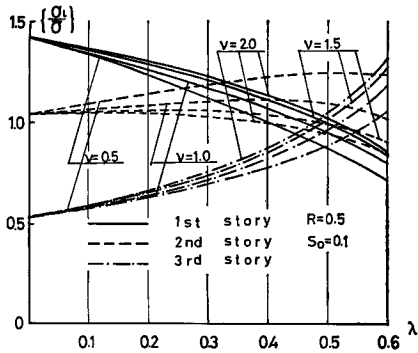


Fig. 9 Standard deviation of non-dimensional displacement of non-linear system.

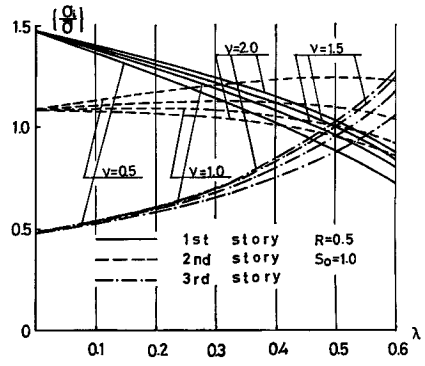


Fig. 10 Standard deviation of non-dimensional displacement of non-linear system.

の J の減少度が大体同じ位となる事が分る。(5.2) に対応する各層の標準偏差を示すと次のようになる。

$$\begin{cases}
 \{\sigma_i^{\xi}\}_{R=0.9, S_0=0.1} = 1.853 \{0.99, 1.00, 1.01\} \\
 \{\sigma_i^{\xi}\}_{R=0.9, S_0=1.0} = 6.550 \{0.99, 0.99, 1.01\} \dots\dots\dots (5.3) \\
 \{\sigma_i^{\xi}\}_{R=0.5, S_0=0.1} = 1.161 \{0.99, 0.99, 1.01\} \\
 \{\sigma_i^{\xi}\}_{R=0.5, S_0=1.0} = 3.581 \{0.99, 1.00, 1.01\}
 \end{cases}$$

(5.3) から分るように (5.2) での倍率の差は殆んど標準偏差の分布には現われない。

Fig. 11 は非線形変位応答の空間方向の平均である。この図も全体的に線形応答と類似しているが $R=0.9$ と $R=0.5$ を見ると明らかに非線形領域に入る為の応答抑制効果が示されている。又、線形及び非線形応答に於いても σ は (λ, ν) についてそれ程差がなくある値の範囲に入っている。一方、各層は互に $\lambda=0.5$, $\nu=1.5$ 以外は離れている。又、この図より $\nu > 1.0$ となる所では ν に関して σ が殆んど一定であるという事はすなわち凸な剛性分布の平均変位応答は直線形の剛性分布の場合の平均変位応答と変わらないという事になる。

Fig. 12 は各層の剪断力応答を $R=0.5, 0.9$ について (λ, ν) に関して示したものである。非線形領域で正の一樣な第 2 分枝剛性比を採用しているので、剪断力応答は弾性領域におけると同様、 (λ, ν) について平坦に近い応答になる。勿論、 $R=0.5$ のときの方が $R=0.9$ のときよりも平坦となる。又、 λ が大きくなると弾性限変位は各層について一定としているので相対的に 2 層, 3 層の弾性限強度が低下するがその為一層の剪断力も低下して最大剪断力応答の分布は近づくが、その程度は応答の非線形性にあまり影響されない。

Figs. 13, 14 はベース・シャーに対する剪断力応答係数分布 $\left\{ \frac{s_i}{s_1} \right\}$ をパラメーターに ν をとり横軸に λ

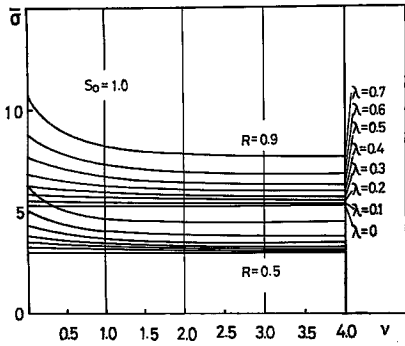


Fig.11 Spatial average of standard deviation of non-dimensional displacement of non-linear system.

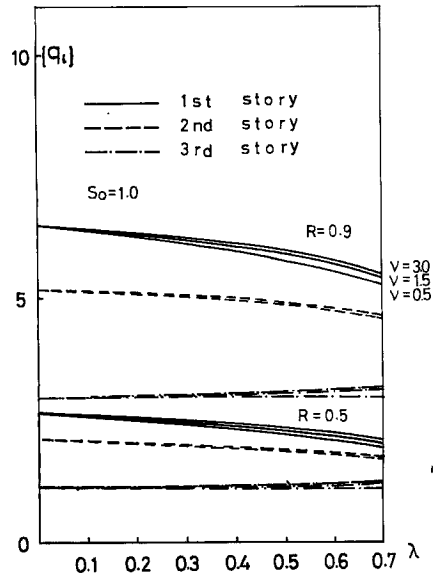


Fig. 12 Non-dimensional shearing force.

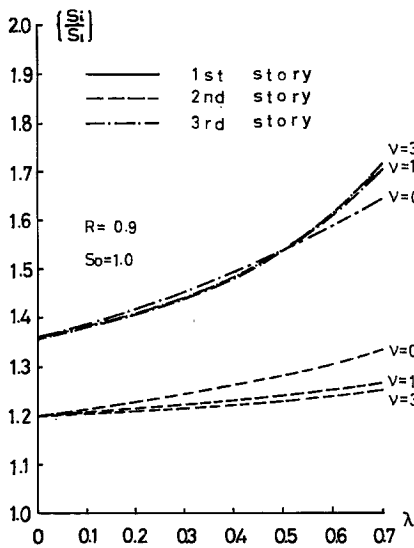


Fig. 13 Distribution of shearing force coefficient.

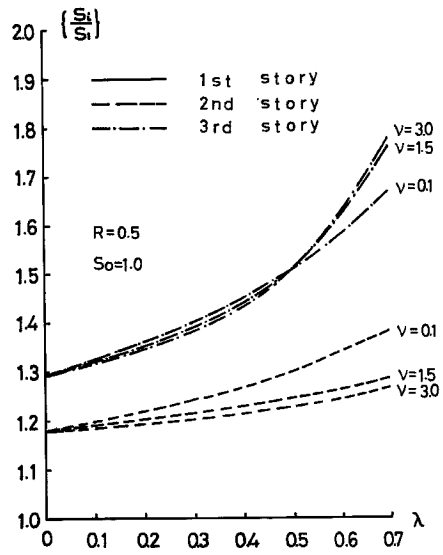


Fig. 14 Distribution of shearing force coefficient.

をとり $R=0.5, 0.9$ について示してある。このとき入力レベルは $S_0=1.0$ とおいている。この2つの図より、 R が小さくなって行くと λ が大きくなると立上り気味になる。

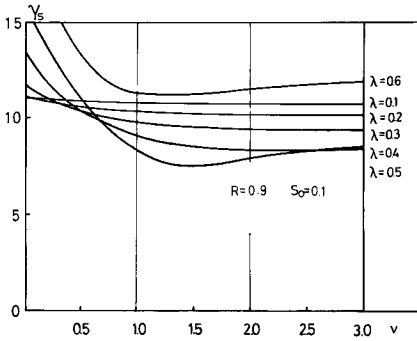


Fig. 15 Spatial maximum non-dimensional displacement of non-linear system.

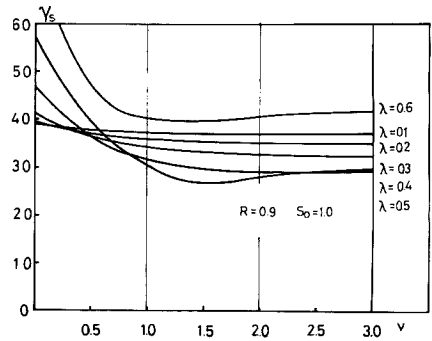


Fig. 16 Spatial maximum non-dimensional displacement of non-linear system.

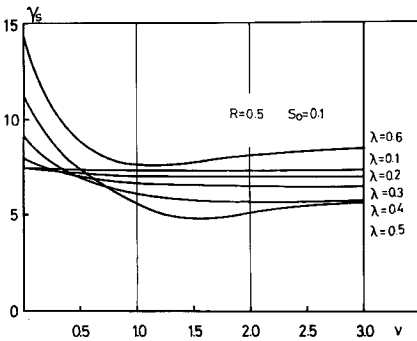


Fig. 17 Spatial maximum non-dimensional displacement of non-linear system.

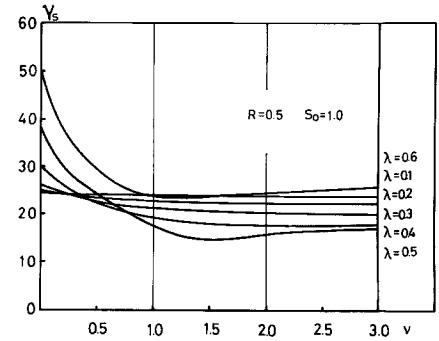


Fig. 18 Spatial maximum non-dimensional displacement of non-linear system.

Figs. 15, 16, 17, 18 は (3.54) で示された γ_s と ν を横軸にとり λ をパラメーターにし $R=0.5, 0.9$, $S_0=0.1, 1.0$ の 4 つの場合について図示したものである。 γ_s は (3.53) 式に示された構造物強度の規準量であるベース・シャー \bar{B} を決定する量である。これ等 4 つの図からベース・シャー \bar{B} を量小にする剛性指数が $\lambda=0.5$, $\nu=1.5$ であることが分る。即ち、線形応答の場合と同じく非線形応答でも靱性率応答の空間方向に対する一様性の度合を示す関数 J を最小にするような剛性指数がベース・シャー \bar{B} も最小にする事が分る。この事から空間方向に対する靱性率応答を一様にするという適正判定規範と構造物の設計に関する経済性とが非線形領域に於いても一致する可能性の一端を示していると思われる。又、 $S_0=0.1, 1.0$, $R=0.5, 0.9$ のときの最小の γ_s を示すと次のようになる。

$$\begin{cases}
 \gamma_{sR=0.9, S_0=0.1} = 7.5138, & \gamma_{sR=0.9, S_0=1.0} = 26.5305 \\
 \gamma_{sR=0.5, S_0=0.1} = 4.7043, & \gamma_{sR=0.5, S_0=1.0} = 14.3174 \\
 \gamma_{sR=0.9, S_0=1.0} = 3.5309, & \gamma_{sR=0.5, S_0=1.0} = 3.0434 \dots\dots\dots (5.4) \\
 \gamma_{sR=0.9, S_0=0.1} & \gamma_{sR=0.5, S_0=0.1} \\
 \gamma_{sR=0.9, S_0=0.1} = 1.5972, & \gamma_{sR=0.9, S_0=1.0} = 1.8530 \\
 \gamma_{sR=0.5, S_0=0.1} & \gamma_{sR=0.5, S_0=1.0}
 \end{cases}$$

(5.4) によると $R=0.9$ の方が $R=0.5$ よりも入力の増加に伴う γ_s の増大の効果は大きい。又、入力レベルが同じときは $R=0.5$ の方が $R=0.9$ のときよりも γ_s の増大が相当小さくなるので構造物設計に対して第 2 分枝の立上りを小さくする事は有利になる。

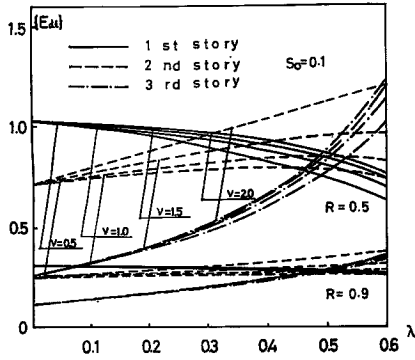


Fig. 19 Non-dimensional dissipated energy of non-linear system.

Fig. 19 は $R=0.5, 0.9, S_0=0.1$ の場合の履歴消費エネルギーを示している。この図から Figs. 7, 8, 9, 10 に示されている変位応答特性にきわめて類似している事が指適出来る。しかも、空間方向に対する変位応答が一様化する剛性指数 (λ, ν) の所で履歴消費エネルギーも又空間方向に対して一様になっている。この事実から変位応答とエネルギー消費の応答の間には極めて密接な関係があると考えられる。従って変位応答からだけでも構造物のエネルギー状態を充分推察出来ると考えられ。又、変位応答の制御は同時にエネルギー応答の制御も意味することになる。

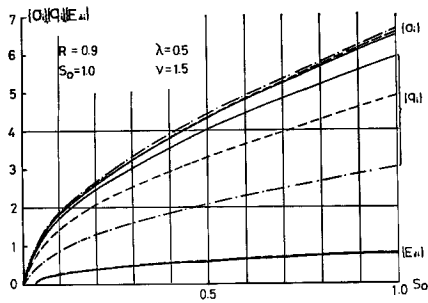


Fig. 20 Standard deviations of non-dimensional displacement, shearing force and dissipated energy.

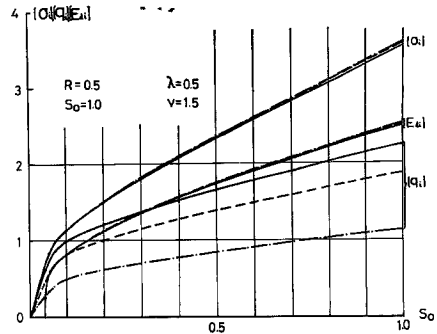


Fig. 21 Standard deviations of non-dimensional displacement, shearing force and dissipated energy.

Figs. 20, 21 は変位、剪断力、履歴消費エネルギーを無次元表示とし、最大靱性率応答一様化の剛性指数 $\lambda=0.5, \nu=1.5$ の場合について同時に示したものである。この2つの図より Fig. 19 で示された変位と履歴消費エネルギーの応答特性が類似している事が分る。又、当然であるが $R=0.9$ は殆んど線形に近いので変位応答の伸びと剪断力応答の伸びが同じ傾向をもつと見做してよいが $R=0.5$ の場合は変位応答の伸びに比較して剪断力応答の伸びはない。又、 $R=0.9$ のときと $R=0.5$ のときとが剪断力応答の空間方向に対するバラツキは同様な程度となる。なお、変位応答は履歴消費エネルギーの増加に伴ない抑制されることが分る。又、この図より R が零に近づくにつれて変位応答と履歴消費エネルギー応答がより一致する方向に収束すると考えられる。

6. む す び

本研究は確率統計的方法による構造物系の動的耐震設計法を行なう場合の適正設計の問題について述べると共に簡単な例題について検討を行なった。適正設計の一般的定義については経済性の尺度と力学的安全性の尺度を確率統計的手法で表現し *non-linear programming problem* に帰着することを示し、更にこの *non-linear programming problem* を有効に解く Caroll の提案した *un-constrained optimization method* について述べた。又、例題については前論文に引続き空間方向に対する靱性率応答を一様にする力学的、経済的要求を満足し更に間接的な経済性の尺度としてベース・シャーを最小にする適正設計の問題について3質点不連続構造物が非

線形応答を行なう場合について検討を行なった。その結果を要約すると次のようになる。

1. 適正動力学特性分布の決定の問題については空間方向に対して靱性率応答が一様になるのは初期剛性分布の剛性指数 $(\lambda, \nu) = (0.5, 1.5)$ の時であり全く線形構造物の場合と同じであった。この剛性分布のとき各層の靱性率応答は殆んど一致したが、この剛性分布を離れた場合には、線形応答時の応答特性のパラツキが拡大されたような結果となった。従って、非線形振動に於いても線形振動時の応答特性が持ち込まれ、そのままその応答特性が拡大されると考えられる。

2. 適正規準量を決定する問題では、構造物の靱性率応答の一様性を示す評価関数の形状と靱性率応答の空間方向の平均性状が線形応答の場合と殆んど類似している所から1で求められた適正動力学特性分布に対応する初期剛性指数 $(\lambda, \nu) = (0.5, 1.5)$ のときベース・シャーが最小となった。

3. ここに対象とした非線形構造物の応答特性については非線形振動の履歴消費エネルギーが応答抑制効果として相当働くことと、これがベース・シャーを減少する方向に役立つことが分った。又、変位応答と履歴消費エネルギー応答の性状が類似していることから変位応答から履歴消費エネルギー応答の推察が可能と思われる。又、非線形応答特性が線形応答特性の拡大されたような結果を示すことから構造物の設計に際して線形の応答特性を十分に把握する必要があると思われる。

参 考 文 献

- 1) 小堀鐸二・南井良一郎・河野允宏：建築構造物の地震応答の適正化の一方法，京都大学防災研究所年報，第13号A，昭45. 3，pp. 303-321.
- 2) 南井良一郎：建築構造物の耐震安全性について，京都大学防災研究所年報，第13号A，昭45. 3，pp. 5-22.
- 3) Moses, F.: Optimum Structural Design Using Linear Programming, Proc. A.S.C.E., ST6, 1964, pp. 89-104.
- 4) Schmit JR, L.A. and R.L. Fox: An Integrated Approach to Structural Synthesis and Analysis, A.I. A.A. Journal., Vol. 3, No. 6, 1965, pp. 1104-1112.
- 5) Blake, R.E.: Predicting Structural Reliability for Design Decisions, Journal of Spacecraft, Vol. 4, No. 3, 1967, pp. 392-398.
- 6) Moses, F. and D.E. Kinser: Optimum Structural Design with Failure Probability Constraints, A.I. A.A. Journal, Vol. 5, No. 6, 1967, pp. 1152-1158.
- 7) Hadley, G.: Nonlinear and Dynamic Programming, Addison-Wesley Publishing Co, Inc..
- 8) Kowalik, J. and M.R. Osborne: Methods for Unconstrained Optimization Problems, American Elsevier Publishing Co, Inc., 1968.
- 9) Newton JR, G.C., L.A. Gould and J.F. Kaiser: Analytical Design of Linear Feedback Controls, John Wiley and Sons, Inc..
- 10) 小堀鐸二・南井良一郎：非常ランダム応答の等価線形化解法，京都大学防災研究所年報，第10号A，昭42. 3，pp. 235-260.
- 11) 浅野幸一郎・郡谷晴一郎：弾塑性構造物モデル化によるランダム応答に関する研究，日本建築学会近畿支部研究報告集，昭45. 5，pp. 9-11.
- 12) Bolotin, V.V.: Statistical Methods in Structural Mechanics, Holden-Day, Inc..
- 13) Carroll, C.W.: The Created Response Surface Technique for Optimizing Nonlinear Restrained Systems, Operations Research, Vol. 9, 1961, pp. 169-184.
- 14) Fiacco, A.V. and G.P. McCormick: Extensions of SUMT for Nonlinear Programming, Management Sci., Vol. 12, 1966, pp. 816-828.