

振源近傍における粘弾性多層構造地盤の 振動特性について

島 通 保

CHARACTERISTICS OF VIBRATIONS OF A LAYERED VISCOELASTIC GROUND NEAR A SOURCE

By *Michiyasu SHIMA*

Synopsis

The characteristics of vibrations of layered viscoelastic ground are investigated theoretically in the case of the harmonic vibration of the surface of that ground. The sources considered are as follows: (1) a vertical point force, (2) a horizontal point force.

Integral expressions for the displacement fields are derived by using a technique applied first by N. A. Haskell to seismological problems. The integrals are calculated along the real axis.

The numerical results are plotted for the frequency characteristics of the amplitudes of displacement and for the variations of the amplitudes with the increase of the distance from the source. When the layered medium is composed of alluvial soils, the peak of the second mode in the curves of the frequency characteristics at the points remote more than one wave length from the source are negligibly lower than that of the fundamental mode. In the latter case, the amplitudes decrease with the increase of the distance in the similar manner as the surface waves, when the points are more than one wave length from the source. And the displacement may be expressed in the product as (34), in that range.

1. ま え が き

振動源近傍における地盤振動の特性は、種々の人工的な振動源による振動障害の問題に於いて中心的な課題となっている。交通機関の運動や工場におけるコンプレッサーのような機械が、振動障害の振動源になっていることが多いが、これらはある範囲に収まる周波数の継続的な振動とみなされるものである。地盤振動の動特性はこのような振動源の特性の他に、地盤の構造によるものであることはよく知られた事実である。このような問題は理論的には半無限多層構造媒質における弾性波動の問題であり、以前から、主に完全弾性体における表面波の伝播・分散現象を調べるため、多くの人々によって研究されているが、これらは表面波の完全な形成および卓越が振源から遠い所であるため、振源から隔った点では、色々調べられているが^{1), 2)}、最近のリーキングモードの研究以外、振源近傍の波動特性について、まだほとんど明らかにされていないようである³⁾。

ところで、実際の土質の地盤では地震探査・試料試験によって知られているように、弾性エネルギーの逸散による波動の減衰(吸収)はかなり著しい。したがって、この効果は土質地盤における振動の振幅の距離による変化において重要になってくると思われる。

振幅の周波数特性における基本モードと2次モードの振幅比への吸収係数のきき方の大きいことは土質地盤においてよく見られるところである。例えば、表層が明瞭な単一層と見なされるような単純な地盤構造において、常時微動の卓越周期がほとんど基本モードのみ現われる場合が知られているが⁴⁾、これは媒質を完全弾性体として取扱った理論では説明されないものである。また土質の地盤で得られる吸収係数 α が数十

サイクルにおいて 0.01~0.2 /m の程度であることから、距離の増大による振幅の減衰において、吸収効果が radiation (空間の拡がり) による減衰と同程度、あるいはそれ以上の場合も見られることから、この問題において定量的な議論をするためには、当然、吸収係数を考慮に入れるべきであると思われる。

そこで今回は、振動源としては、表面において調和振動的に、垂直方向および水平方向に作用する 2 種類のを、また媒質は半無限多層構造の粘弾性をもつものを取りあげ、地表の振源近傍において、その変位振幅の周波数特性を調べた。さらに、距離の増大による振幅の変化について、2, 3 の Q 値について求めた。なお地中の各点の振幅の周波数特性については別のところで報告してあるので、ここでは省略した⁶⁾。

媒質中の各点の変位に対する積分表示の形式解を導く手続きは、Haskell に従うマトリックス定式化によった。これらの積分表示式の数値計算の方法は、粘弾性媒質においては、積分路を変更せず、実軸に沿う無限積分の方法によった。

記号

- $\bar{q}_j, \bar{v}_j, \bar{w}_j$: j 番目の層の変位の r, θ, z 成分 (円柱座標系)
 ρ : 密度
 ω : 角振動数
 α_j, β_j : P 波および S 波の速度
 λ_j, μ_j : ラメの常数
 d_j : 層の厚さ
 a_p, a_s : P 波および S 波の減衰係数 (吸収係数)
 δ_j : $2(\beta_j/c)^2$
 c : ω/k
 D : 体積変化率
 $\gamma_{\alpha_j}, \gamma_{\beta_j}$: $\sqrt{(k_{\alpha_j}^2 - k^2)}, \sqrt{(k_{\beta_j}^2 - k^2)}$

2. 粘弾性媒質に対する波動方程式とマトリックスによる定式化

一般に土質や岩石において、高周波になる程弾性エネルギーの逸散による波動の減衰の著しいことが知られており、そのため振源から隔たるにつれて高周波成分が少くなり、波動の見かけの波長も伸びてくる。その程度を表わす減衰係数 (吸収係数) a_p, a_s は、一般に周波数の関数であるが、実験によると、かなりの範囲にわたって周波数に比例する場合が多い。弾性エネルギーの逸散を説明するため、内部摩擦の名の下に総称されるメカニズムがいくつか提案されているが、いずれも逸散の現象を完全に説明するものは出されていないようである⁵⁾。その中岩石・土質などの減衰についての実験データを比較的よく説明する簡単なモデルとして Voigt のモデルがあり、粘性を λ', μ' とすると応力-歪関係は

$$\left. \begin{aligned} p_{zz} &= \left(\lambda + \lambda' \frac{\partial}{\partial t} \right) D + 2 \left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial w}{\partial z} \\ p_{rz} &= \left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ p_{\theta z} &= \left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

である。 λ', μ' を常数とすると、減衰係数 a_p, a_s は ω^2 に比例することになる。 a が ω に比例するという多くの実験データに合致させるためには、モデルとして Voigt 型のもを採用することになると、粘性 λ', μ' が ω に逆比例するとすればよい。この場合、 $\omega \mu' / \mu$ が小さいと、

$$\left. \begin{aligned} a_p &= \omega^2 (\lambda' + 2\mu') / 2\alpha (\lambda + 2\mu) \equiv \omega / 2\alpha Q_p \\ a_s &= \omega^2 \mu' / 2\beta \mu \equiv \omega / 2\beta Q_s \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

となる。そこで、ここでは a_n, a_s が ω に比例するような上記のモデルを粘弾性媒質のモデルとして採用する。

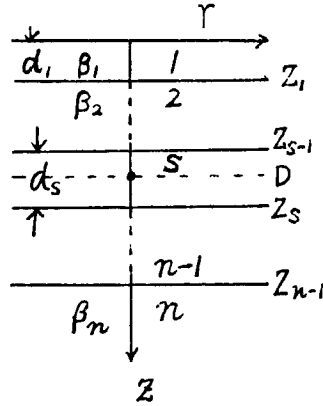


Fig. 1 Structure of ground.

そうすると、Fig. 1 に示されているような、いくつかの平行層からなる半無限媒質中にある、調和振動的な振源によって発生した波動の各層中の変位の空間部分をポテンシャル $\varphi_j, \psi_j, \chi_j$ によって、次のように表わしたとき、

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}_j(r, \theta, z) &= \frac{\partial \bar{\varphi}_j}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}_j}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\chi}_j}{\partial \theta} \\ \bar{v}_j(r, \theta, z) &= \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\varphi}_j}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_j}{\partial z \partial \theta} - \frac{\partial \bar{\chi}_j}{\partial r} \\ \bar{w}_j(r, \theta, z) &= \frac{\partial \bar{\varphi}_j}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{\psi}_j}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_j}{\partial \theta^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

正弦波に対する波動方程式は、

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \bar{\varphi}_j &= -k_{\alpha_j}^2 \bar{\varphi}_j \\ \nabla^2 \bar{\psi}_j &= -k_{\beta_j}^2 \bar{\psi}_j \\ \nabla^2 \bar{\chi}_j &= -k_{\beta_j}^2 \bar{\chi}_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

であり、波数 $k_{\alpha_j}, k_{\beta_j}$ は

$$\left. \begin{aligned} k_{\alpha_j}^2 &= \omega^2 / \alpha_j^2 \{1 + i\omega(\lambda_j' + 2\mu_j') / (\lambda_j + 2\mu_j)\} \\ k_{\beta_j}^2 &= \omega^2 / \beta_j^2 \{1 + i\omega\mu_j' / \mu_j\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

のように粘弾性媒質の場合、複素数となる。

ここで $\bar{\varphi}_j, \bar{\psi}_j, \bar{\chi}_j$ が次のように積分表示されるものとする、

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}_j(r, \theta, z) &= \int_0^\infty \varphi_j(z) J_0(rk) \cos l\theta dk \\ \bar{\psi}_j(r, \theta, z) &= \int_0^\infty \psi_j(z) J_1(rk) \cos l\theta dk \\ \bar{\chi}_j(r, \theta, z) &= \int_0^\infty \chi_j(z) J_1(rk) \sin l\theta dk \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

また変位、応力も同様に積分表示される。

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}_j(r, \theta, z) &= \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{k} \frac{\dot{u}_{Rj}}{c} \frac{dJ_1(rk)}{d(rk)} - \frac{il}{k} \frac{\dot{v}_{Lj}}{c} \frac{J_1(rk)}{rk} \right\} \cos l\theta dk \\ \bar{v}_j(r, \theta, z) &= \int_0^\infty \left\{ -\frac{l}{k} \frac{\dot{u}_{Rj}}{c} \frac{J_1(rk)}{rk} + \frac{i}{k} \frac{\dot{v}_{Lj}}{c} \frac{dJ_1(rk)}{d(rk)} \right\} \sin l\theta dk \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{w}_j(r, \theta, z) &= \int_0^\infty \left\{ -\frac{i}{k} \frac{\dot{w}_{Rj}}{c} J_1(rk) \right\} \cos l\theta dk \\
 \bar{P}_{zzj}(r, \theta, z) &= \int_0^\infty \sigma_{Rj} J_1(rk) \cos l\theta dk \\
 \bar{P}_{\theta zj}(r, \theta, z) &= \int_0^\infty \left\{ -i\tau_{Rj} l \frac{J_1(rk)}{rk} - \tau_{Lj} \frac{dJ_1(rk)}{d(rk)} \right\} \sin l\theta dk \\
 \bar{P}_{rzj}(r, \theta, z) &= \int_0^\infty \left\{ i\tau_{Rj} \frac{dJ_1(rk)}{d(rk)} + \tau_{Lj} l \frac{J_1(rk)}{rk} \right\} \cos l\theta dk
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\dot{w}_{Rj}}{c} &\equiv k^2 \left\{ \varphi_j(z) + \frac{d\psi_j(z)}{dz} \right\} \\
 \frac{\dot{w}_{Rj}}{c} &\equiv -\frac{k}{i} \left\{ \frac{d\varphi_j(z)}{dz} + \frac{d^2\psi_j(z)}{dz^2} + k_{\beta j}^2 \psi_j(z) \right\} \\
 \frac{\dot{v}_{Lj}}{c} &\equiv -\frac{k^2}{i} \chi_j(z) \\
 \sigma_{Rj} &\equiv 2\mu_j \left\{ \frac{d^2\varphi_j(z)}{dz^2} + \frac{d^2\psi_j(z)}{dz^2} + k_{\beta j}^2 \frac{d\psi_j(z)}{dz} \right\} - \lambda_j k_{\alpha j}^2 \varphi_j(z) \\
 \tau_{Rj} &\equiv -ik\mu_j \left\{ 2\frac{d\psi_j(z)}{dz} + 2\frac{d^2\varphi_j(z)}{dz^2} + k_{\beta j}^2 \psi_j(z) \right\} \\
 \tau_{Lj} &\equiv k\mu_j \frac{d\chi_j(z)}{dz}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

なお、 $\varphi_j(z)$, $\psi_j(z)$, $\chi_j(z)$ は次の方程式を満足する。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d^2\varphi_j(z)}{dz^2} &= (k^2 - k_{\alpha j}^2) \varphi_j(z) \\
 \frac{d^2\psi_j(z)}{dz^2} &= (k^2 - k_{\beta j}^2) \psi_j(z) \\
 \frac{d^2\chi_j(z)}{dz^2} &= (k^2 - k_{\beta j}^2) \chi_j(z)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

(9) で定義された変位、応力は今後次のようにマトリックスの形で表わすことにする。

$$[U_{Rj}(z_j)] = \begin{pmatrix} \frac{\dot{w}_{Rj}(z_j)}{c} \\ \frac{\dot{w}_{Rj}(z_j)}{c} \\ \sigma_{Rj}(z_j) \\ \tau_{Rj}(z_j) \end{pmatrix}, \quad [V_{Lj}(z_j)] = \begin{pmatrix} \frac{\dot{v}_{Lj}(z_j)}{c} \\ \tau_{Lj}(z_j) \end{pmatrix} \dots\dots\dots (11)$$

振源を含まない層においては、ポテンシャルは (10) の一般解として

$$\left. \begin{aligned}
 \varphi_j(z) &= \frac{A_j'}{k^2} e^{-i\tau_{\alpha j}(z-z_{j-1})} + \frac{A_j''}{k^2} e^{i\tau_{\alpha j}(z-z_{j-1})} \\
 \psi_j(z) &= \frac{\omega_j'}{ik^3} e^{-i\tau_{\beta j}(z-z_{j-1})} + \frac{\omega_j''}{ik^3} e^{i\tau_{\beta j}(z-z_{j-1})} \\
 \chi_j(z) &= \frac{\epsilon_j'}{k} e^{-i\tau_{\beta j}(z-z_{j-1})} + \frac{\epsilon_j''}{k} e^{i\tau_{\beta j}(z-z_{j-1})}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

のように表わせる。そうすると次のような層の上の境界と下の境界を結ぶ Haskell のマトリックスで表わされる関係式が得られる。

$$\left. \begin{aligned}
 [U_{Rj}(z_j)] &= [a_{Rj}] [U_{Rj}(z_{j-1})] \\
 [V_{Lj}(z_j)] &= [a_{Lj}] [V_{Lj}(z_{j-1})]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

マトリックス a_{Rj}, a_{Lj} の表現は別の論文にのせてあるのでここでは省略する⁶⁾。

もし、層が振源を含んでいる場合には前の一般解 (12) にさらに振源の項が加わる。一般に点状振源の存在する点は、数学的な特異点であって、この点ではポテンシャルは不連続になる。この振源に対するポテンシャルは、例えば次のように表わせる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{s0}(z) &= S_{01}^{\pm} e^{-i\gamma_{\alpha s} |z-D|} \\ \psi_{s0}(z) &= S_{02}^{\pm} e^{-i\gamma_{\beta s} |z-D|} \\ \chi_{s0}(z) &= S_{03}^{\pm} e^{-i\gamma_{\beta s} |z-D|} \end{aligned} \right\} \pm: z \leq D \quad \dots\dots\dots (14)$$

(12) に (14) を加えたものが振源を含んでいる層に対する一般解であるが、この場合にも振源を含まない層に対するのと同様の手続きによって、振源のすぐ上の点と上の境界との関係、および振源のすぐ下の点と下の境界との関係が次のように表わせる。

$$\left. \begin{aligned} [U_{Rs1}(D)] &= [a_{Rs1}] [U_{Rs1}(z_{s-1})] \\ [U_{Rs2}(z_s)] &= [a_{Rs2}] [U_{Rs2}(D)] \\ [V_{Ls1}(D)] &= [a_{Ls1}] [V_{Ls1}(z_{s-1})] \\ [V_{Ls2}(z_s)] &= [a_{Ls2}] [V_{Ls2}(D)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

また振源の上の点と下の点の間には (9) と (14) によって

$$\left. \begin{aligned} [U_{Rs2}(D)] &= [U_{Rs1}(D)] + \begin{pmatrix} \delta \left(\frac{\dot{u}_{Rs}}{c} \right) \\ \delta \left(\frac{\dot{w}_{Rs}}{c} \right) \\ \delta \sigma_{Rs} \\ \delta \tau_{Rs} \end{pmatrix} \\ [V_{Ls2}(D)] &= [V_{Ls1}(D)] + \begin{pmatrix} \delta \left(\frac{\dot{v}_{Ls}}{c} \right) \\ \delta \tau_{Ls} \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \delta \left(\frac{\dot{u}_{Rs}}{c} \right) &= k^2 \{ (S_{01}^+ - S_{01}^-) - i\gamma_{\beta s} (S_{02}^+ + S_{02}^-) \} \\ \delta \left(\frac{\dot{w}_{Rs}}{c} \right) &= ik \{ -i\gamma_{\alpha s} (S_{01}^+ + S_{01}^-) + k^2 (S_{02}^+ - S_{02}^-) \} \\ \delta \sigma_{Rs} &= k^2 c^2 \rho_s \{ (\delta_s - 1) (S_{01}^+ - S_{01}^-) - i\gamma_{\beta s} \delta_s (S_{02}^+ + S_{02}^-) \} \\ \delta \tau_{Rs} &= k^2 c^2 \rho_s \{ -\delta_s \gamma_{\alpha s} (S_{01}^+ + S_{01}^-) / k - ik (\delta_s - 1) (S_{02}^+ - S_{02}^-) \} \\ \delta \left(\frac{\dot{v}_{Ls}}{c} \right) &= ik^2 (S_{03}^+ - S_{03}^-) \\ \delta \tau_{Ls} &= -ik \mu_s \gamma_{\beta s} (S_{03}^+ + S_{03}^-) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

3. 点状垂直力振源に対する解

点状の垂直方向に振動する振源に対するポテンシャルの積分表示は

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}_0(r, \theta, z) &= \int_0^{\infty} S_{01}^{\pm} e^{-i\gamma_{\alpha s} |z-D|} J_0(rk) dk \\ \bar{\psi}_0(r, \theta, z) &= \int_0^{\infty} S_{02}^{\pm} e^{-i\gamma_{\beta s} |z-D|} J_0(rk) dk \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

$$\left. \begin{aligned} S_{01}^+ &= -S_{01}^- = Lk/4\pi\rho_s\omega^2 \\ S_{02}^+ &= S_{02}^- = -iLk/4\pi\rho_s\omega^2\gamma_{\beta s} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

したがって、

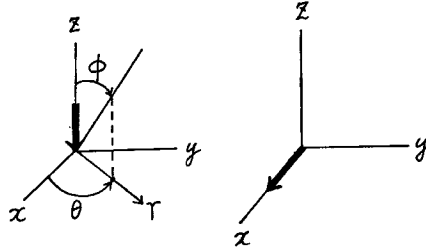


Fig. 2 Vertical point source and horizontal point source.

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{u}_{R_s} = \delta \dot{w}_{R_s} = \delta \tau_{R_s} = \delta \dot{v}_{L_s} = \delta \tau_{L_s} = 0 \\ \delta \sigma_{R_s} = -Lk/2\pi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

振源は地表にあるから、(15)の $[a_{R_{s1}}], [a_{R_{s1}}]$ は単位マトリックスとなり、 $\sigma_{R_{s1}}(D) = \tau_{R_{s1}}(D) = \tau_{L_{s1}}(D) = 0$ となる。

次に基盤層より上にある層の U_{R_j}, V_{L_j} に対する表示を求める。いまの場合、振源は基盤層より上にあるから、波は下から入射してはならないし ($c > \beta_n$)、また無限の下方では変位は有限でなければならない ($c < \beta_n$)。この条件をみたすためには、基盤層の Δ_n'', ω_n'' は零であることが必要である。したがって基盤層に対して

$$\begin{pmatrix} \Delta_n'' \\ \Delta_n'' \\ \omega_n'' \\ \omega_n'' \end{pmatrix} = [E_{R_n}^{-1}] \cdot [a_{R_{n-1}}] \dots [a_{R_1}] \cdot \begin{pmatrix} \dot{u}_{R_1}(0) \\ \dot{w}_{R_1}(0) \\ 0 \\ \delta \tau_{R_1} \end{pmatrix} \equiv [J_R] \cdot \begin{pmatrix} \dot{u}_{R_1}(0) \\ \dot{w}_{R_1}(0) \\ 0 \\ \delta \tau_{R_1} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (21)$$

ここで $[E_{R_n}^{-1}]$ の表現は別論文に示してあるので省略する⁶⁾。

(21) に於いて Δ_n'', ω_n'' を消去すると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\dot{u}_{R_1}(0)}{c} = \frac{GM - HK}{NK - LM} \delta \sigma_{R_1} \\ \frac{\dot{w}_{R_1}(0)}{c} = -\frac{GN - LH}{NK - LM} \delta \sigma_{R_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

層の境界における連続の条件と (13) を使うと

$$\left. \begin{aligned} \frac{\dot{u}_{R_j}(z)}{c} = \left[\frac{(GM - HK)[B_{R_j}]_{11} - (GN - LH)[B_{R_j}]_{12}}{NK - LM} + [B_{R_j}]_{13} \right] \delta \sigma_{R_1} \\ \frac{\dot{w}_{R_j}(z)}{c} = \left[\frac{(GM - HK)[B_{R_j}]_{21} - (GN - LH)[B_{R_j}]_{22}}{NK - LM} + [B_{R_j}]_{23} \right] \delta \sigma_{R_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

$$B_{R_1} = a_{R_1}, \quad B_{R_j} = a_{R_j} \dots a_{R_1}$$

$$\left. \begin{aligned} L = [J_R]_{11} - [J_R]_{21}, \quad K = [J_R]_{12} - [J_R]_{22}, \\ G = [J_R]_{13} - [J_R]_{23}, \quad R = [J_R]_{14} - [J_R]_{24}, \\ N = [J_R]_{31} - [J_R]_{41}, \quad M = [J_R]_{32} - [J_R]_{42}, \\ H = [J_R]_{33} - [J_R]_{43}, \quad S = [J_R]_{34} - [J_R]_{44} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

また基盤層の変位に対しては (12) の $j = n$ に対して、 $\Delta_n'' = \omega_n'' = 0$ とおき、 $z = z, z = z_{n-1}$ に対して $\dot{u}_{R_n}/c, \dot{w}_{R_n}/c, \sigma_{R_n}, \tau_{R_n}$ を求め、 Δ_n'', ω_n'' を消去すれば、

$$\frac{\dot{u}_{R_n}(z)}{c} = (1 + \gamma_{\alpha n} \gamma_{\beta n} / k^2)^{-1} \left[\{ e^{-iP_n} + \gamma_{\alpha n} \gamma_{\beta n} e^{-iQ_n} / k^2 \} \frac{\dot{u}_{R_n}(z_{n-1})}{c} \right]$$

$$\left. \begin{aligned} & + \gamma_{\beta n} \{ e^{-iP_n} - e^{-iQ_n} \} \frac{\dot{w}_{Rn-1}(z_{n-1})}{ck} \Big] \\ \frac{\dot{w}_{Rn}(z)}{c} &= (1 + \gamma_{\alpha n} \gamma_{\beta n} / k^2)^{-1} \left[\gamma_{\alpha n} \{ e^{-iP_n} - e^{-iQ_n} \} \frac{\dot{u}_{Rn-1}(z_{n-1})}{ck} \right. \\ & \left. + \{ \gamma_{\alpha n} \gamma_{\beta n} e^{-iP_n} / k^2 + e^{-iQ_n} \} \frac{\dot{w}_{Rn-1}(z_{n-1})}{c} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

4. 点状水平力振源に対する解

点状の水平方向に振動する振源に対するポテンシャルの積分表示は

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}_0(r, \theta, z) &= \int_0^\infty S_{01}^+ e^{-i\tau_{\alpha s}|z-D^1|} J_1(rk) \cos \theta dk \\ \bar{\psi}_0(r, \theta, z) &= \int_0^\infty S_{02}^+ e^{-i\tau_{\beta s}|z-D^1|} J_1(rk) \cos \theta dk \\ \bar{\chi}_0(r, \theta, z) &= \int_0^\infty S_{03}^+ e^{-i\tau_{\beta s}|z-D^1|} J_1(rk) \sin \theta dk \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

$$\left. \begin{aligned} S_{01}^+ &= S_{01}^- = -iLk^2 / 4\pi\omega^2 \rho_s \gamma_{\alpha s} \\ S_{02}^+ &= -S_{02}^- = L / 4\pi\omega^2 \rho_s \\ S_{03}^+ &= S_{03}^- = -iLk_{\beta s} / 4\pi\omega^2 \rho_s \gamma_{\beta s} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

したがって、

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{u}_{Rs} &= \delta \dot{w}_{Rs} = \delta \dot{v}_{Ls} = \delta \sigma_{Rs} = 0 \\ \delta \tau_{Rs} &= ikL / 2\pi, \quad \delta \tau_{Ls} = -kL / 2\pi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

垂直力振源の場合と同様の方法に従うと、地表の点に対して、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\dot{u}_{R1}(0)}{c} &= \frac{RM-SK}{NK-LM} \delta \tau_{R1} \\ \frac{\dot{w}_{R1}(0)}{c} &= -\frac{RN-SL}{NK-LM} \delta \tau_{R1} \\ \frac{\dot{v}_{L1}(0)}{c} &= \frac{[J_L]_{22} - [J_L]_{12}}{[J_L]_{11} - [J_L]_{21}} \delta \tau_{L1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

層の点に対しては、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\dot{u}_{Rj}(z)}{c} &= \left[\frac{(RM-SK)[B_{Rj}]_{11} - (GM-HK)[B_{Rj}]_{12}}{NK-LM} + [B_{Rj}]_{14} \right] \delta \tau_{R1} \\ \frac{\dot{w}_{Rj}(z)}{c} &= \left[\frac{(RM-SK)[B_{Rj}]_{21} - (RN-LS)[B_{Rj}]_{22}}{NK-LM} + [B_{Rj}]_{24} \right] \delta \tau_{R1} \\ \frac{\dot{v}_{Lj}(z)}{c} &= \left[\frac{[J_L]_{22} - [J_L]_{12}}{[J_L]_{11} - [J_L]_{21}} [B_{Lj}]_{11} + [B_{Lj}]_{12} \right] \delta \tau_{L1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

また基盤層の変位に対しては

$$\left. \begin{aligned} \frac{\dot{u}_{Rn}(z)}{c} &= (1 + \gamma_{\alpha n} \gamma_{\beta n} / k^2)^{-1} \left[\{ e^{-iP_n} + \gamma_{\beta n} \gamma_{\alpha n} e^{-iQ_n} / k^2 \} \left[\frac{\dot{u}_{Rn-1}(z_{n-1})}{c} \right. \right. \\ & \left. \left. + \gamma_{\beta n} \{ e^{-iP_n} - e^{-iQ_n} \} \frac{\dot{u}_{Rn-1}(z_{n-1})}{ck} \right] \right. \\ \frac{\dot{w}_{Rn}(z)}{c} &= (1 + \gamma_{\alpha n} \gamma_{\beta n} / k^2)^{-1} \left[\gamma_{\alpha n} \{ e^{-iP_n} - e^{-iQ_n} \} \frac{\dot{u}_{Rn-1}(z_{n-1})}{ck} \right. \\ & \left. + \{ \gamma_{\alpha n} \gamma_{\beta n} e^{-iP_n} / k^2 + e^{-iQ_n} \} \frac{\dot{w}_{Rn-1}(z_{n-1})}{c} \right] \\ \frac{\dot{v}_{Ln}(z)}{c} &= \{ \cos Q_n - i \sin Q_n \} \frac{\dot{v}_{Ln-1}(z_{n-1})}{c} \\ P_n &= \gamma_{\alpha n}(z - z_n), \quad Q_n = \gamma_{\beta n}(z - z_n) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

5. 積分の数値計算の方法

2 層の層構造の場合について

a) 表面における $\theta=0$ の方向の水平力振源に対し, $\theta=\frac{\pi}{2}$ の方位角の表面の transverse 成分 $v_1(r, \frac{\pi}{2}, 0)$ の振幅と

b) 表面における垂直力振源に対する, 表面の longitudinal 成分 $q_1(e_r + w_1 e_z)$ の振幅を数値的に求めた。その積分表示式は (22), (29) を (7) に入れると求まるが, 例えば, a) の場合には,

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_j\left(r, \frac{\pi}{2}, 0\right) &= \bar{v}_{Rj}\left(r, \frac{\pi}{2}, 0\right) + \bar{v}_{Lj}\left(r, \frac{\pi}{2}, 0\right) \\ \bar{v}_{Rj}\left(r, \frac{\pi}{2}, 0\right) &= -\frac{\delta\tau_{R1}}{k} \int_0^\infty \frac{1}{\delta\tau_{R1}} \frac{\dot{u}_{Rj}(z)}{crk} J_1(rk) dk \equiv -\frac{\delta\tau_{R1}}{k} \int_0^\infty F_{Rj}(k) J_1(rk) dk \\ \bar{v}_{Lj}\left(r, \frac{\pi}{2}, 0\right) &= \frac{i\delta\tau_{L1}}{k} \int_0^\infty \frac{1}{\delta\tau_{L1}} \frac{\dot{v}_{Lj}(z)}{c} \frac{dJ_1(rk)}{d(rk)} dk \\ &\equiv \frac{i\delta\tau_{L1}}{k} \int_0^\infty F_{Lj}(k) \{J_1(rk) - rkJ_0(rk)\} dk \end{aligned} \right\} \dots (32)$$

であり, 減衰係数 $a=0$ の場合の計算は前論文で詳しく説明した方法に従って求められたので⁸⁾, ここでは省略する。

$a_p \neq 0, a_s \neq 0$ の弾性エネルギー逸散のある場合には, 特異点である分岐点も, 極も Fig. 3 のように実

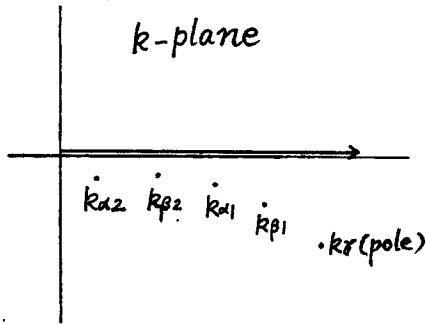


Fig. 3 Location of singularities.

軸から第 4 象限内の複素値に移る。そこでこの場合, 積分路は $a_p = a_s = 0$ のときのように別の路に移さず, 最初のまま実軸上を零から無限遠まで積分した。原点から極の位置付近までは通常の有限積分の方法で数値計算を行う。それよりかなり大きい変数に対しては, 被積分項のうち, $F_{Rj}(k), F_{Lj}(k)$ はゆっくり変化し始め, 被積分項の変化は主にベッセル関数の性質によって決まる。したがって, 通常の方法では積分の取束は極めておそい。しかしある点より大きい積分変数に対しては, ベッセル関数の 1 つの零点から次の零点までの区間積分値は交代級数的にゆっくりと減少している。そこでこの変数 k の大きい範囲については, このような交代級数和の計算に使用されるオイラーの

変換の方法を適用した⁷⁾。上記の点 (k_{er}) は $F_{Rj}(k)$ によって決定され, この関数の変化が単調になる点に相当するが, 媒質中の位置, 振源の周波数などによって決まる。したがって, 実際の数値計算にあたっては, オイラー変換適用範囲を変えても, 積分値の差がある範囲内におさまる所まで, k_{er} を大きくして得た積分値をもって数値解とした。

以上の方法は b) の場合についても同様である。

6. 計算結果とその考察

(7) を使って, 表層が一層からなる層構造に於いて, 表面の水平力振源と垂直力振源に対して, 変位の振幅の変化を表面の各点について計算した結果を以下において示す。数値計算の対象とした層構造は, 土質の地盤において見られるものに近い S 波速度および P 波速度で表層 100 m/s, 180 m/s, 基盤層 400 m/s, 1000 m/s の常数を持ち, 表層の厚さ 10 m のものである。減衰係数については, 測定値は比較的乏しく, その精度も低いものしか得られていない。岩石においては $1/Q_p$ と $1/Q_s$ は同程度であるが, 土質においては一般に $1/Q_s$ の方が大きい⁹⁾。計算には土質における $1/Q_s$ で 0.3 までの値を使った⁹⁾。

6.1 振幅の周波数特性の距離による変化

a) 水平力振源の場合，振源からの距離 5 m～200 m（層の厚さの 0.5 倍～20 倍）に対して，減衰係数零

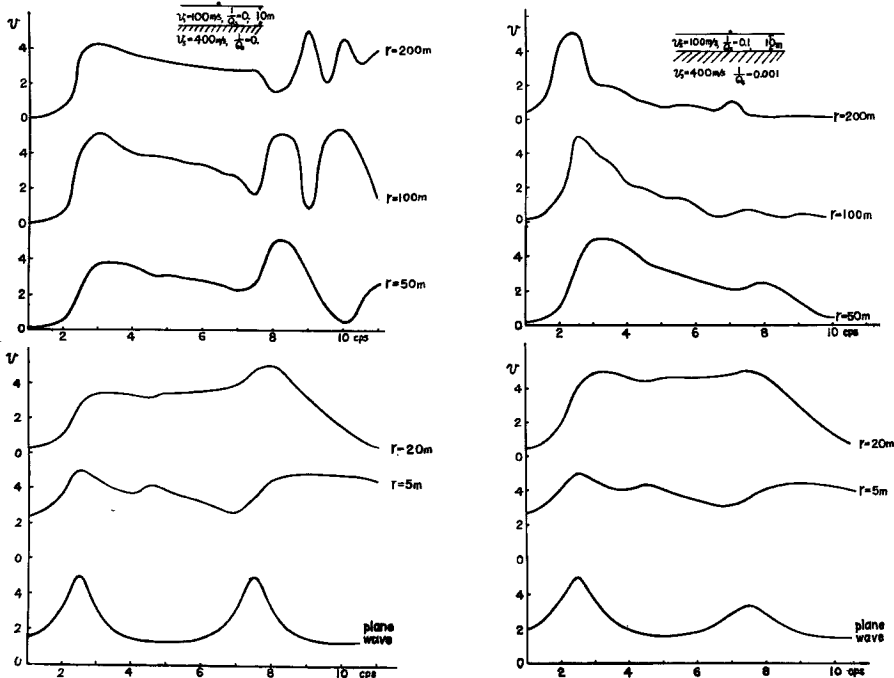


Fig. 4 Amplitudes of transversal component of displacement on surface versus frequency for horizontal point source.

と $1/Q_s=0.1$ の場合について，変位の transverse 成分の振幅を計算したものが Fig. 4 に示されている。各図とも，振幅の最大値が 5 になるように規格化されており，1 番下の曲線は平面 SH 波が鉛直下方から入射した場合の表面での振幅の周波数特性の曲線である。

媒質を完全弾性体とした場合においては，いずれの点においても SH 波入射の場合の基本モードの周波数にはほぼ一致した所に基本モードのピークが現れるが，その中振源のごく近くと，層の厚さの 10 倍以上隔った点では，かなり明瞭に現れる。しかし，2 次モードのピークは層の厚さの 2～5 倍の距離で現れているが，それ以外の点では極めて不明瞭であるか，あるいはその周波数の前後にもいくつかのピークが現れ，一般的に，あるピークを 2 次モードのものとして断定することは危険である。

ところが $1/Q_s=0.1$ の減衰をもつ媒質においては，減衰係数が周波数に比例して大きくなるから，振源から隔たるにつれて，2 次モード以上のピークは低くなって不明瞭になり，基本モードのピークのみ目立ってくる。

b) 垂直力振源の場合も一番下の曲線が，鉛直下方よりの入射 P 波に対する表面の振幅の周波数特性のものであることを除いて，水平力振源の場合と同様に描かれている。この場合の振幅は垂直成分 w と方位成分 q との合成変位の振幅である。

完全弾性体の場合においては，いずれの点においても P 波入射の基本モードの周波数に一致した所に基本モードの明瞭なピークが現れている。また 2 次モードのピークは水平力振源の場合に比して一般に低く，層の厚さの 10 倍程度の距離において明瞭に見られるのみであり，距離が大になるとその周波数のあたりに

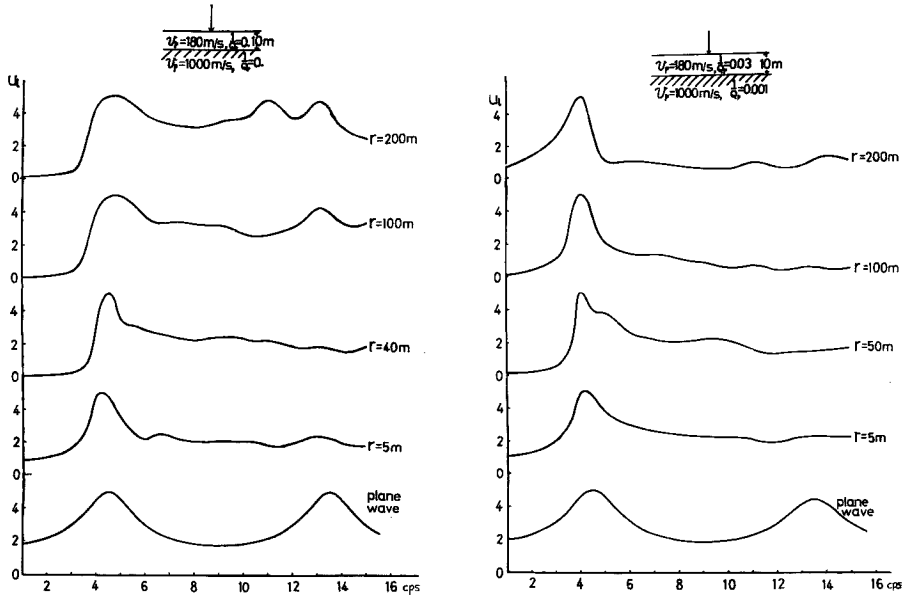


Fig. 5 Amplitudes of longitudinal component of displacement on surface versus frequency for vertical point source.

いくつものピークが現れる。しかし媒質が減衰性をもつと、水平力振源の場合と同様 2 次モード以上のピークは不明瞭になり、基本モードの明瞭なピークのみとなる。

以上のように減衰を考慮に入れば、振源の近くから隔ったところに至るまで、transverse 成分あるいはラブ波成分においては、SH 入射の共振の基本モードに相当する周波数の所に、また longitudinal 成分あるいはレイレイ波成分においては P 波入射の共振の基本モードに相当する周波数のところのみ基本モードのピークの現れることがわかった。

継続的な振源による地盤の振動の例として、常時微動のようなものがこれらで数多く報告されており、その中、明瞭な表層をもつ地盤構造における微動においては、周波数特性曲線に、明瞭なほとんど単一のピークの出現が報告されている。このような現象に対して、上記のような理論的基礎の上にて、土質地盤において通常みられる程度の Q-値を使って、周波数特性曲線の単一のピークに基本モードの周波数を対応させ、振源から隔たれば、2 次モード以上は殆んど現れないことも説明される。

6.2 振幅の距離による変化

a) 水平力振源の場合の表面の点での振幅の減衰の半無限媒質と 2 層構造の媒質についての例が Figs. 6, 7 に示されている。各図とも一番上の実線が完全弾性体の場合で、その他の 2 つが粘性をもつ場合である。図の Q 値は S 波の値のみであるが、P 波の Q_p は S 波のその 3 倍にとっている。また表層のある構造の Q 値は表層の値で示されているが、基盤層の Q は表層のその 3 倍を使って計算されている。3 本の点線はそれぞれ $r^{-1/2}$, r^{-1} , r^{-2} の減少を示す曲線であり、完全弾性体の場合の一番上の曲線の減少と、比較のために描いておいたものである。また 2 つの周波数について描いてあるが、右の低い方は基本モードの周波数のものであり、左の方は基本モードと 2 次モードの中間の周波数のものである。

いずれの場合も距離の増大に伴う振幅の減少の有様はかなり複雑である。振源のごく近くとそれより遠い所では減少の仕方がかなり違う。そこで振幅の解析的表現の得られているものと比べながらその特色を明らかにする。振幅の変化の解析的表現は半無限粘弾性媒質の場合、r の大きい点については容易に得られる。

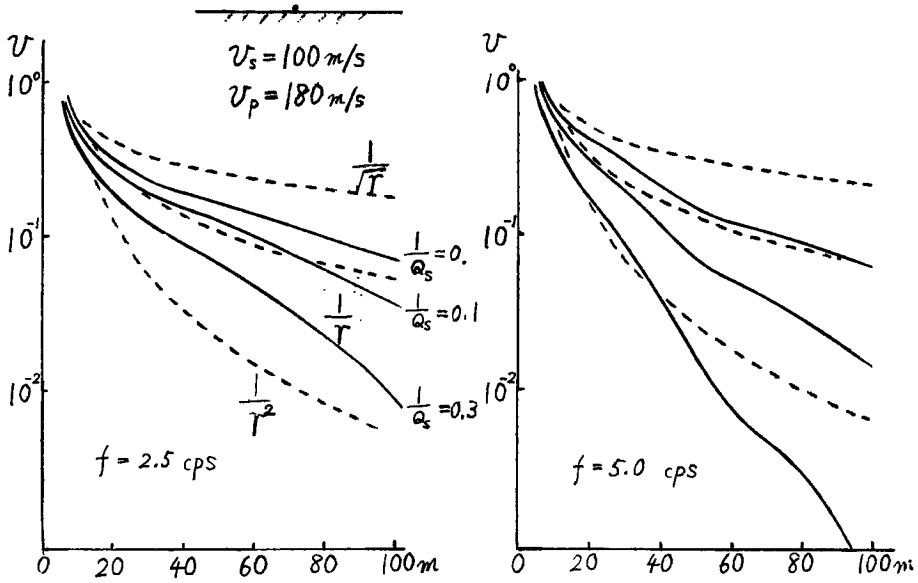


Fig. 6 Amplitudes dependent on distance for horizontal point source.

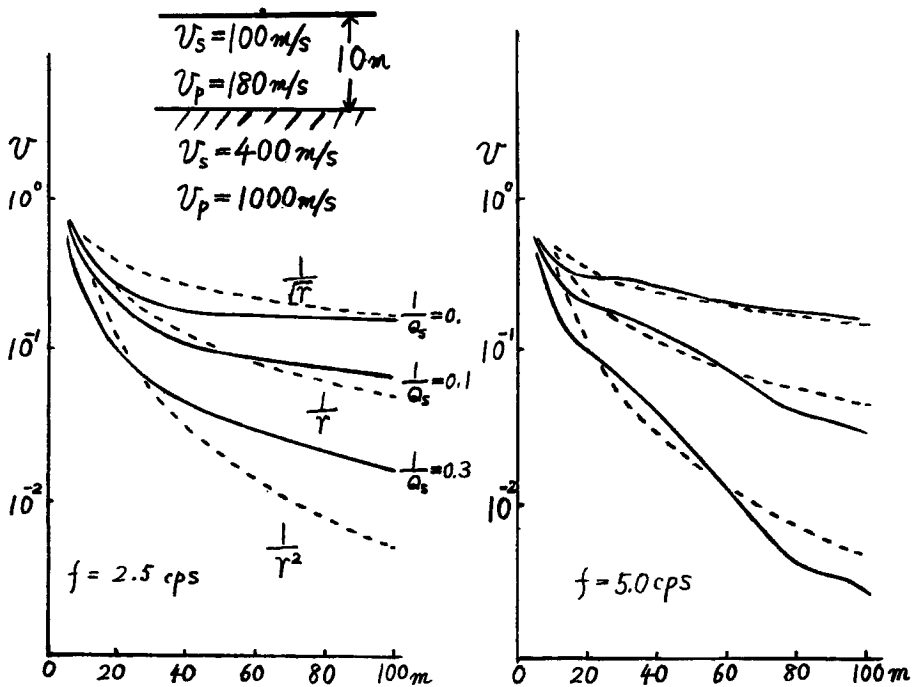


Fig. 7 Amplitudes dependent on distance for horizontal point source.

垂直力振源に対しては、Newland によって得られているが¹⁰⁾、それと同じ方法によって水平力振源の場合について求めてみると

$$v_0 \approx \frac{c}{r} \exp(i\omega t - ik_p^{(1)}r - k_p^{(2)}) \dots\dots\dots (33)$$

である。

まず完全弾性体の場合、半無限体では厳密解の曲線が振動していることを除けば、ほぼ r^{-1} の曲線に近い単純な減少を示すが、これは半無限弾性体の場合 transversal 成分に於いて、表面波のラブ波を伴わないということから、ほぼ予想されることである。また表層をもつ場合では、基本モードの波長から 2 次モードの波長の範囲において、振源から 1 波長程度の距離までは r^{-1} の曲線に近く、実体波 (SH 波) 的な減少の仕方を示すが、それより以遠では、ほぼ $r^{-1/2}$ に近いラブ波の減少曲線に近づいてくる。このように完全弾性体の場合において、radiation 効果 (空間の拡がり) による減少の仕方から変位における SH 波成分優勢の範囲とラブ波成分優勢の範囲が明らかになった。

次に粘性をもつ媒質における性質を調べるため、振幅において radiation 効果と吸収効果が次式のように分離できると近似してみることにする。すなわち

$$F(r) \cdot G\left(r, \frac{1}{Q}\right) \dots\dots\dots (34)$$

と表わせて、 $F(r)$ は radiation 効果による項で層構造によってきまり、 $G(r, 1/Q)$ は主に粘性による項であるとする。 $F(r)$ は $1/Q=0$ の場合の振幅-距離曲線から、 $G(r, 1/Q)$ は $1/Q=0$ の場合の振幅との比から求まる。このように仮定して求めた $G(r, 1/Q)$ の曲線が Figs. 8, 9 に実線で描かれている。またこの項が指数関数 e^{-ax} で表わせるとした時、 a に 2 つの Q 値を入れて描いたのが点線である。実線と点線はそれぞれの Q 値に対して全体としてかなりより一致を示すから、振源の近くにおいても、吸収による効果を (34) 式のように分離して表わしても粗い近似としては差支えないであろう。

ところでラブ波の Q 値は平沢らによって、基本モードより高い周波数では表層の SH 波の Q 値に近い値

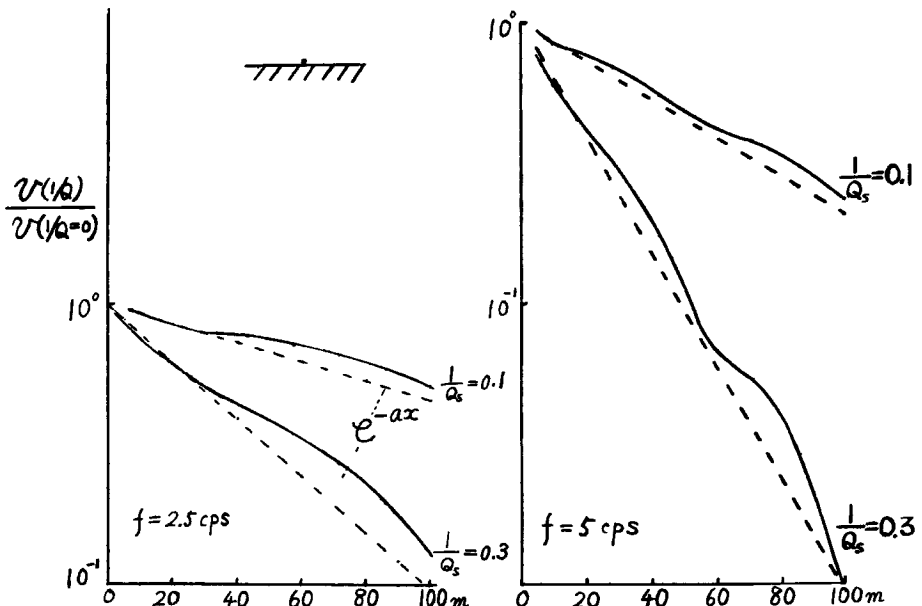


Fig. 8 Attenuation factor $G(r, 1/Q)$ dependent on distance for horizontal point source.

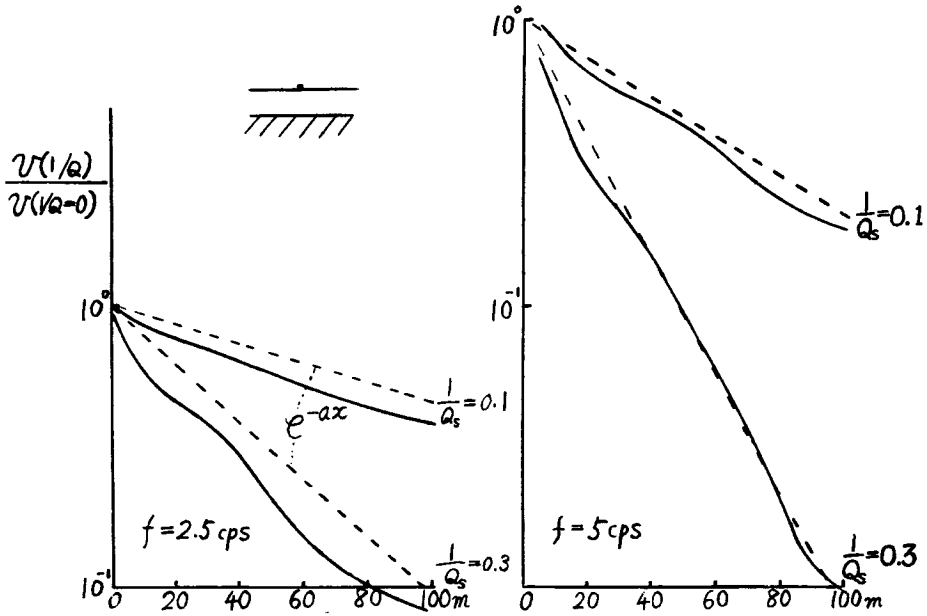


Fig. 9 Attenuation factor $G(r, 1/Q)$ dependent on distance for horizontal point source.

をとることが示されている¹¹⁾。したがって (34) のように表わした場合に得られる減衰効果の程度は、振源近くにおいても表層のラブ波のもののみならずも差支えないと思われる。

b) 垂直力振源の場合の表面の点での例が Figs. 10, 11 に示されている。実線、点線の描き方、 Q 値のとり方はいずれも上記の水平力振源の場合と同様である。

距離の増大に伴う振幅の減少の有様は、水平力振源の場合よりさらに複雑であるが、これは半無限媒質においても表面波（レイレイ波）が発生すること、表面波のモードもラブ波のものより複雑であることを考

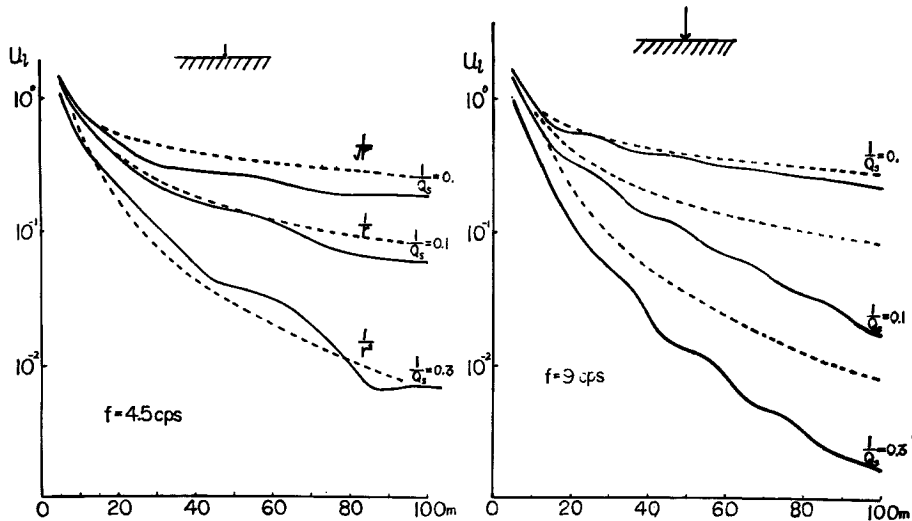


Fig. 10 Amplitudes dependent on distance for vertical point source.

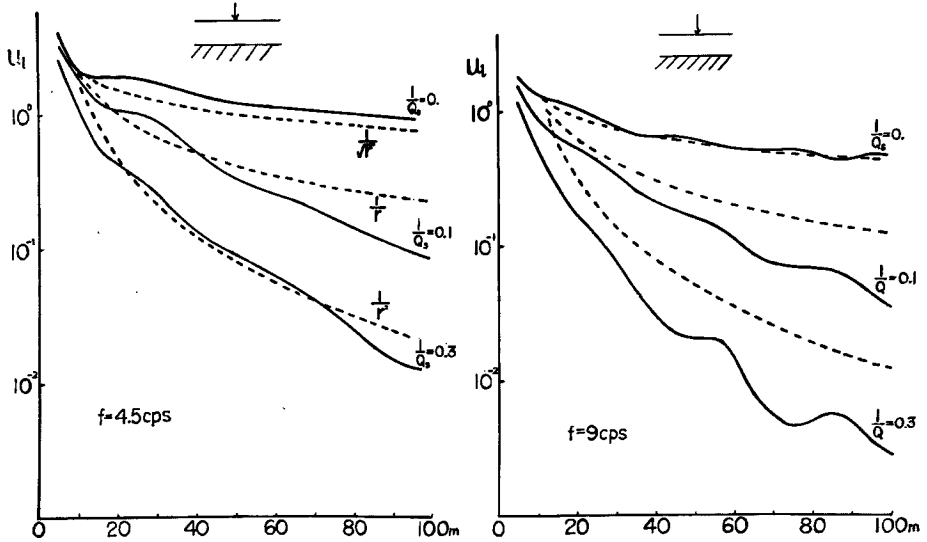


Fig. 11 Amplitudes dependent on distance for vertical point source.

えれば当然であろう。

垂直力振源の存在する半無限粘弾性体の場合の r の大きい点での振幅の解析的表現は、Newland によって次のように得られている¹⁰⁾。すなわち

$$q_0 \approx \frac{c_1}{r^{3/2}} \exp(i\omega t - ik_{\alpha}^{(1)}r - k_{\alpha}^{(2)}r) + \frac{c_2}{\sqrt{r}} \exp(i\omega t - ik_r^{(1)}r - k_r^{(2)}r) \dots (35)$$

これと比較しながら、振源近傍の振幅変化をみると、完全弾性体の場合、半無限媒質では、振源の近く(1波長程度まで)では振幅は r^{-1} 曲線に平行に減少するが、それより以遠では $r^{-1/2}$ 曲線に沿って減少する。これは半無限体においても、longitudinal 成分には、実体波の他に、1波長より遠くではレイレイ波成

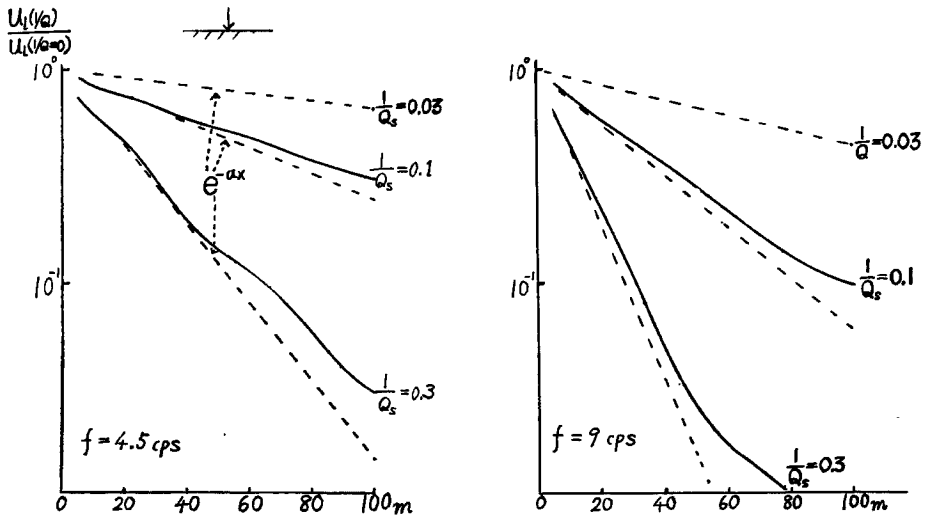


Fig. 12 Attenuation factor $G(r, 1/Q)$ dependent on distance for vertical point source.

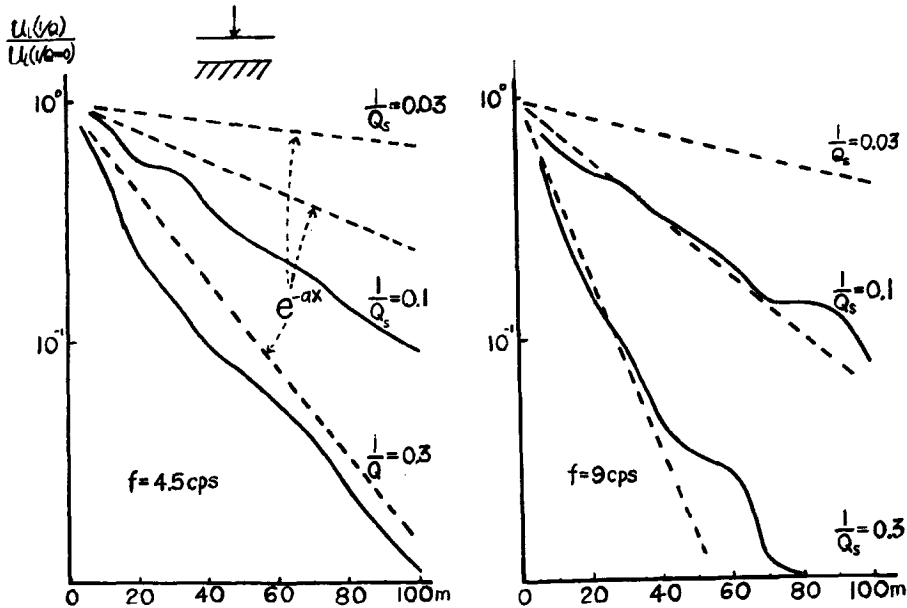


Fig. 13 Attenuation factor $G(r, 1/Q)$ dependent on distance for vertical point source.

分が卓越してくることを示すものであろう。表層をもつ場合でも、ほぼ同様の傾向を示すが、半無限体の場合に比して、実体波成分の卓越する範囲がやや狭いようである（半波長程まで）。

次に粘性の影響を調べるため、前記と同様に取扱い、グラフに描いたものが **Figs. 12, 13** に示してある。**Fig. 12** の半無限体の場合は transverse 成分と同様に、longitudinal 成分の Q 値は S 波のそれに近い値をとることがわかる。しかし、表層のある場合では、longitudinal 成分の Q 値は周波数により S 波のそれよりかなり小さい値をとる場合もあることを示している。レイレイ波についての Q 値の計算によると、基本モードの周波数の付近では実体波 (S 波) のそれよりかなり小さくなる数値例からすれば¹¹⁾、この場合でも、一応 (34) 式の近似式を用いて、振幅の減衰の推定は可能であろう。

以上振源近くにおける振幅の変化、粘性の影響について調べてみたが、結論としていえることは、

- 1) 振源から 1 波長以上離れば、振幅は表面波的に減衰するとみなしても差支えないのであろう。
- 2) その範囲では、粘性の影響は (34) のように積の形に分離して扱っても近似的にはよいであろうことが明らかになった。

数値計算には京都大学大型計算センター FACOM230-60 を用いた。

参 考 文 献

- 1) Ewing, W. M., W. S. Jardetzky and F. Press: Elastic Waves in Layered Media, 1957, pp. 124-254.
- 2) Harkrider, D. G.: Surface Waves in Multi-layered Elastic Media 1, Bull. Seis. Soc. Am., Vol. 54, 1964, pp. 627-679.
- 3) Laster, S. J., J. G. Foremann and A. F. Linville: Theoretical Investigation of Modal Seismograms for a Layer over a Half-space, Geophysics, Vol. 30, 1965, pp. 571-596.
- 4) Kanai K., T. Tanaka and K. Osada: Measurement of the Microtremors, Bull. Earthq. Res. Inst., Vol. 32, 1954, pp. 199-210.
- 5) White, J. E.: Seismic Waves, McGraw-Hill, 1965.

- 6) 島 通保：水平加振力による多層構造地盤の震動特性について，京都大学防災研究所年報，第 13号A，昭和 45，pp. 197-212.
- 7) Longman, I.M.: Note on a Method for Computing Infinite Integrals of Oscillatory Functions, Proc. Camb.Phil. Soc., Vol. 52, 1956, pp. 764-768.
- 8) Vassilev, Y.I.: Two Summaries of the Attenuation Constants of Elastic Vibrations in Rocks, Izv. Acad. Sci. USSR, Geophy. Ser. No. 5, 1962, pp. 390-394.
- 9) 吉川宗治・島通保・後藤典俊・入倉孝次郎：地盤調査における 2, 3 の問題 (続)，京都大学防災研究所年報，第10号A，昭 42，pp. 165-180.
- 10) Newlands, M.: Lamb's Problem with Internal Dissipation, Jour. Acoust. Soc. Amer., Vol. 26, 1954, pp. 434-448.
- 11) 平沢明郎・佐藤良輔：分散性表面波の減衰の定数 (Q)，地震，第 16 卷，昭 38，pp. 87-100.