

## クノイド波に関する研究 (第4報)

—hyperbolic waves について (1)—

岩 垣 雄 一

## STUDIES ON CNOIDAL WAVES (FOURTH REPORT)

—ON HYPERBOLIC WAVES (1)—

By Yuichi IWAGAKI

## Synopsis

In the previous papers, after the graphs and method for computing the wave profile, wave velocity and wave length from a given wave period, still water depth and wave height were presented based on Laitone's cnoidal wave theory, the measurements of the wave profile, wave velocity and wave length were carried out, and the comparisons of these experimental results with the computed values by the cnoidal wave, Stokes wave and small amplitude wave theories were made.

This paper proposes the formulas of various wave characteristics of new waves named as "hyperbolic waves", which are derived from the cnoidal wave theory under the condition that  $k=1$  and  $E=1$  but  $K \neq \infty$ , in which  $k$  is the modulus of the Jacobian elliptic function, and  $K$  and  $E$  the complete elliptic integrals of the first and second kinds respectively.

## 1. ま え が き

第1報<sup>1)</sup>および第2報<sup>2)</sup>では、1961年に摂動法によって求めたクノイド波に関する Laitone の理論解<sup>3)</sup>を用い、通常の波の計算に利用されるように、波の周期と水深および波高を与えて、クノイド波の波形、波速および波長を求める図表を作成した。さらに、第3報<sup>4)</sup>では、Stokes の波の理論は適用できず、クノイド波の理論を用いなければならないといわれている水深・波長比の小さい波についての実験を行ない、波形、波速、波長および波の谷から静水面までの高さを測定して、Skjelbreia<sup>5)</sup> が求めた Stokes 波の 3rd order のものや、上述の図表によって求められる Laitone のクノイド波ならびに Airy の微小振幅波のものと、どの程度の適合性があるかを検討した<sup>6)</sup>。

この論文は、第4報として、クノイド波の水理特性をあらわす各式を、Jacobi のだ円関数やその母数、あるいは第1種および第2種のだ円積分を含まない初等関数によって表現することを試みる。そのためには、当然のことながら適用限界があって制限が加えられ、かつ近似的表現となるのは止むをえない。

いま、クノイド波の水理量の無次元表示を  $\Phi$  とすれば、一般に次のようにあらわされる。

$$\Phi = f\left(\frac{ht}{H}, \frac{z}{ht}, K, \frac{E}{K}, k, \operatorname{cn}(v, k), \operatorname{sn}(v, k), \operatorname{dn}(v, k)\right), \dots\dots\dots(1)$$

ここに、

$$v = 2K(x - ct)/L \dots\dots\dots(2)$$

で,  $h_c$  は波の谷からの水深,  $H$  は波高,  $K$  および  $E$  はそれぞれ第1種および第2種の完全だ円積分,  $cn$ ,  $sn$  および  $dn$  は Jacobi のだ円関数,  $k$  はその母数,  $c$  は波速,  $L$  は波長,  $t$  は時間で,  $x$  軸は波の谷を  
通って水平方向,  $z$  軸は鉛直上方にとる。

孤立波は,  $k=1$  すなわち  $K=\infty$ ,  $E=1$ ,  $L=\infty$  の極限をとればよく, その場合,  $cn(v, k)$  および  $dn$   
( $v, k$ ) は両者とも  $\text{sech } v$  となり, また  $sn(v, k)$  は  $\tanh v$  となる。さらに  $K/L=\alpha/h_c$  ( $\alpha$  は  $h_c/H$  の  
関数) とかけるので, (1) および (2) 式に対応して, 孤立波の無次元表示した水理量  $\Phi_s$  は次のように  
あらわされる。

$$\Phi_s = f_s \left( \frac{h_c}{H}, \frac{z}{h_c}, \text{sech } v, \tanh v \right), \dots\dots\dots(3)$$

$$v = 2\alpha(x-ct)/h_c. \dots\dots\dots(4)$$

ここに, suffix  $s$  は孤立波に対する量をあらわす。(1) 式中の Jacobi のだ円関数は周期関数であるから,  
クノイド波が周期波であるのに対して, (3) 式中の双曲線関数はもはや周期関数ではないので, 孤立  
波は周期波ではない。

いま, 孤立波のように,  $k=1$  の極限ではなく,  $k \approx 1$  と近似しうる場合を考えよう。Fig. 1 は  $K$  および  
 $E$  と  $k$  との関係を示すが, この図からわかるように,  $k$  が1と近似できるほど1に近づいても,  $K$  の値は  
 $\infty$  とみなされるほど大きくなる。逆にいえば,  $K$  が3程度の値のときには,  $k^2$  の値は約0.96, すなわ  
ち  $k \approx 0.98$  であって, 近似的に1とみなしてよいことがわかる。このことから,

$$K \geq 3 \dots\dots\dots(5)$$

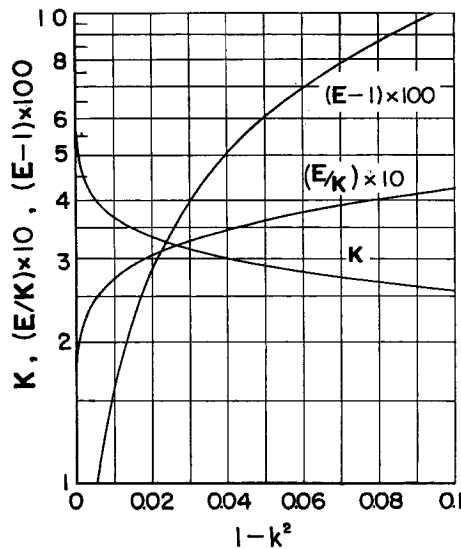


Fig. 1 Relationships between the complete elliptic integrals of the first and second kinds and the modulus of the Jacobian elliptic function.

を条件として  $k$  のみを1とおくと, (1) 式に対応する新しい波の水理量の無次元表示  $\Phi_h$  として,

$$\Phi_h = f_h \left( \frac{h_c}{H}, \frac{z}{h_c}, K, \frac{E}{K}, \text{sech } v, \tanh v \right) \dots\dots\dots(6)$$

がえられる。この波は双曲線関数であらわされるから周期波ではないが, 波長は無限大ではないので, 1波  
長ごとに谷を結合させていけば, 周期波として取扱うことが可能である。著者は, この新しい波を hyper-

abolic waves と名付けることにする。というのは、この波はもはや Jacobi のだ円関数を含んでいないので、クノイド波であるともいえないし、また孤立波と同じ双曲線関数で示されるが、波長が有限なので孤立波でもない。双曲線関数であらわされる有限の波長をもつ波という意味で、hyperbolic waves という名前を付けたわけである。

この論文は、上に定義した hyperbolic waves の水理特性を調べ、比較的長い波長をもった有限振幅波の性質を明らかにしようとした研究の最初の報告である。

2. 第1種および第2種の完全だ円積分と波の周期、波高および水深との関係

(6)式で示されるように、hyperbolic waves の水理量  $\Phi_h$  は、第1種および第2種の完全だ円積分  $K$  と  $E$  を含んでいるので、このままでは、波の周期  $T$ 、波高  $H$  および水深  $h$  (あるいは波の谷からの水深  $ht$ ) を与えて、水理量  $\Phi_h$  を求めることはできない。したがって、 $K$  および  $E/K$  と  $T, H$  および  $h$  との関係求めておく必要がある。

まず、 $E/K$  と  $K$  との関係であるが、これは Fig. 2 に示すように、 $K \geq 3$  の場合には、 $E \approx 1$  すなわ

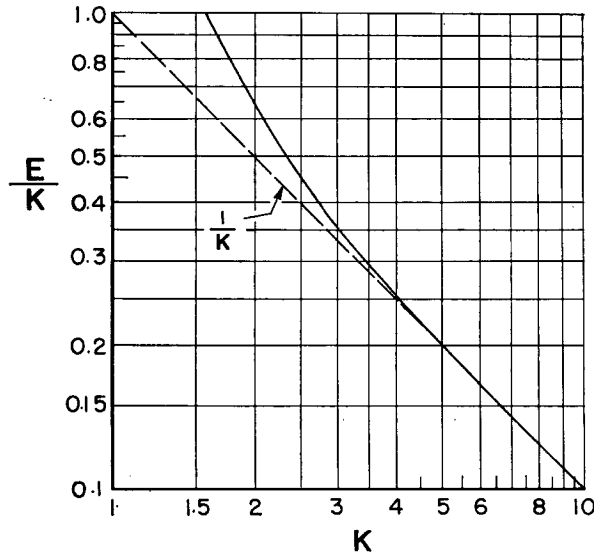


Fig. 2 Relationships between  $K/E$  and  $K$ .

ち、

$$E/K \approx 1/K \dots\dots\dots(7)$$

としてよい。この場合の誤差は、 $K=3$  のとき約 5%、 $K=3.5$  のとき約 2% であることが、Fig. 1 から求められる。したがって、(5)式に示す条件により適用範囲を制限すれば、(6)式から第2種の完全だ円積分  $E$  を消すことができる。

つぎに、 $K$  と  $T, H$  および  $h$  との関係であるが、これについては、すでに第2報において、Fig. 3 に示す  $h/H$  をパラメーターとした  $K$  と  $T\sqrt{g/h}$  の関係をあらわす図を求め発表してある。この図は第2近似によるものであるが、これを用いて、 $K$  と  $T\sqrt{g/h}$  および  $h/H$  との関係を数式で表現することを試みる。幸いにも、 $K \geq 3$  の範囲では、 $h/H$  をパラメーターとする各曲線は、ほぼ平行な直線で近似することができる。この関係は Fig. 4 の実線で示される。

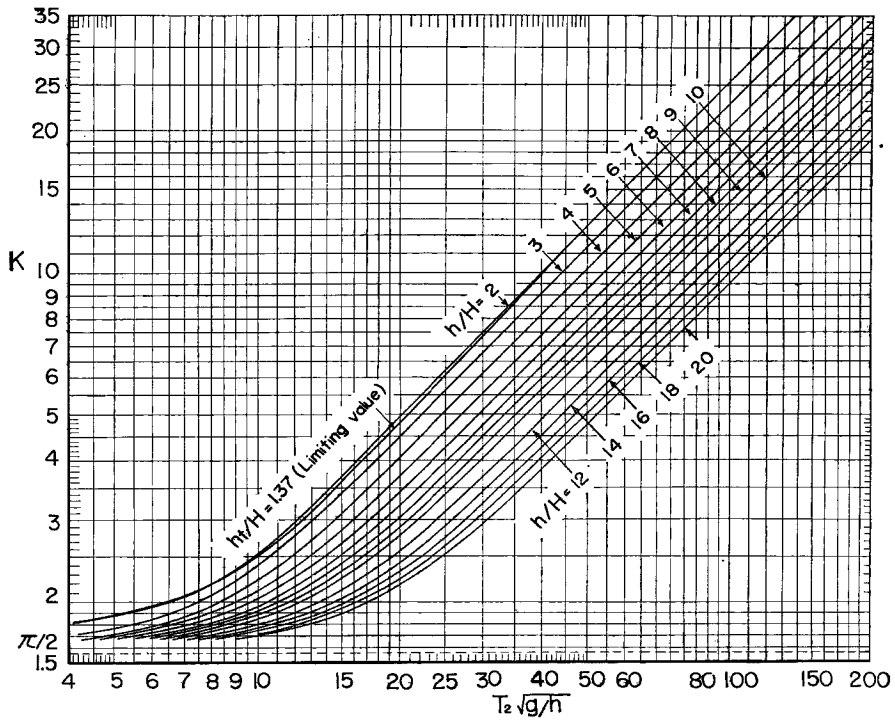


Fig. 3 Relationship between  $K$  and  $T\sqrt{g/h}$  with a parameter of  $h/H$ .

いま、 $k \approx 1$  の場合には、第1報の(30)式が成立し、さらに  $H/h$  あるいは  $H/h_0$  が小さいときには、(30)式は次式のように書きかえられる。

$$\frac{H}{L} \approx \frac{\sqrt{3}}{4K} \left(\frac{H}{h}\right)^{3/2} \dots\dots\dots(8)$$

第2報で示したように、 $H/h$  が小さくなると、波速  $c$  は  $\sqrt{gh}$  に近づくから、 $L=cT$  を考慮して、(8)式は次のように変形される。

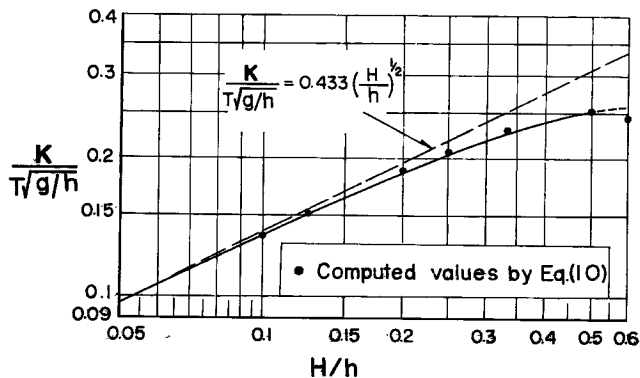


Fig. 4 Relationships between  $K/T\sqrt{g/h}$  and  $H/h$ .

$$\frac{K}{T\sqrt{g/h}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{H}{h}\right)^{1/2} \dots\dots\dots(9)$$

Fig. 4 における破線は (9) 式を示したもので、実線で示した関係は、 $H/h$  の値が小さくなれば、破線で示す直線に一致することがわかる。(9) 式を利用し、実線で示される  $K/T\sqrt{g/h}$  と  $H/h$  との関係を次式によって近似させることにする。

$$\frac{K}{T\sqrt{g/h}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{H}{h}\right)^{1/2} \left\{1 - 1.3 \left(\frac{H}{h}\right)^2\right\}^{1/2} \dots\dots\dots(10)$$

Fig. 4 に示した黒丸は (10) 式にもとづいて求めた値であって、波が碎ける限界付近の  $H/h \approx 0.6$  を除いて、非常によく一致しており、 $K$  と  $T, H$  および  $h$  との関係は、(10) 式によってあらわしうると考えられる。

### 3. Hyperbolic waves の水理特性

#### (1) 静水面の位置

波の谷から静水面までの高さ  $\delta$  は、第1報の (24) および (25) 式より、第1および第2近似式はそれぞれ

$$\frac{\delta_1}{H} = \frac{E}{K} \approx \frac{1}{K} \dots\dots\dots(11)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta_2}{H} &= \frac{E}{K} \left(1 - \frac{1}{12} \frac{H}{h_t}\right) \\ &\approx \frac{1}{K} \left\{1 - \frac{1}{12} \frac{H}{h} \frac{1}{1 - (\delta_2/H)(H/h)}\right\} \\ &\approx \frac{1}{K} \left\{1 - \frac{1}{12} \frac{H}{h} - \frac{1}{12} \frac{\delta_2}{H} \left(\frac{H}{h}\right)^2\right\} \\ &\approx \frac{1}{K} \left(1 - \frac{1}{12} \frac{H}{h}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

によってあらわされる。したがって、(10) 式を (11) および (12) 式に代入して、次式がえられる。

$$\frac{\delta_1}{H} = \frac{4}{\sqrt{3}} \left[ T \sqrt{\frac{g}{h}} \left(\frac{H}{h}\right)^{1/2} \left\{1 - 1.3 \left(\frac{H}{h}\right)^2\right\}^{1/2} \right]^{-1} \dots\dots\dots(13)$$

$$\frac{\delta_2}{H} = \frac{4}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{12} \frac{H}{h}\right) \left[ T \sqrt{\frac{g}{h}} \left(\frac{H}{h}\right)^{1/2} \left\{1 - 1.3 \left(\frac{H}{h}\right)^2\right\}^{1/2} \right]^{-1} \dots\dots\dots(14)$$

#### (2) 波 形

クノイド波の波形を示す式において、 $\text{cn}(v, k)$  を  $\text{sech } v$  とすればよいので、第1および第2近似の波形は、それぞれ次式であらわされる。

$$\frac{\eta_1}{H} = \text{sech}^2\left(\frac{2K}{L_1} X\right), \quad X = x - ct, \dots\dots\dots(15), (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\eta_2}{H} &= \text{sech}^2\left(\frac{2K}{L_2} X\right) - \frac{3}{4} \frac{H}{h_t} \text{sech}^2\left(\frac{2K}{L_2} X\right) \\ &\quad \times \left\{1 - \text{sech}^2\left(\frac{2K}{L_2} X\right)\right\} \\ &\approx \text{sech}^2\left(\frac{2K}{L_2} X\right) - \frac{3}{4} \frac{H}{h} \text{sech}^2\left(\frac{2K}{L_2} X\right) \\ &\quad \times \left\{1 + \frac{1}{K} \left(\frac{H}{h}\right)\right\} \left\{1 - \text{sech}^2\left(\frac{2K}{L_2} X\right)\right\}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

なお、 $K/L$  は波長の式から求めることができる。

#### (3) 波 速

波速  $c$  の第1近似は,

$$\frac{c_1}{\sqrt{gh_c}} = 1 + \frac{H}{h_c} \left( \frac{1}{2} - \frac{E}{K} \right) \approx 1 + \frac{H}{h_c} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{K} \right). \dots\dots\dots(18)$$

$h_c$  を  $h$  になおせば,

$$\left. \begin{aligned} \frac{c_1}{\sqrt{gh}} &= \left( 1 - \frac{\delta_1}{H} \frac{H}{h} \right)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{1}{1 - (\delta_1/H)(H/h)} \frac{H}{h} \left( \frac{1}{2} - \frac{E}{K} \right) \right\} \\ &\approx \left( 1 - \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{1}{1 - (1/K)(H/h)} \frac{H}{h} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{K} \right) \right\} \\ &\approx \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \left\{ 1 + \left( 1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \frac{H}{h} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{K} \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

第2近似は,

$$\begin{aligned} \frac{c_2}{\sqrt{gh_c}} &= 1 + \frac{H}{h_c} \left( \frac{1}{2} - \frac{E}{K} \right) + \left( \frac{H}{h_c} \right)^2 \left\{ \frac{E}{K} \left( \frac{E}{K} - \frac{1}{4} \right) - \frac{3}{20} \right\} \\ &\approx 1 + \frac{H}{h_c} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{K} \right) + \left( \frac{H}{h_c} \right)^2 \left\{ \frac{1}{K} \left( \frac{1}{K} - \frac{1}{4} \right) - \frac{3}{20} \right\}. \end{aligned} \dots\dots\dots(20)$$

$h_c$  を  $h$  でかきかえると,

$$\begin{aligned} \frac{c_2}{\sqrt{gh}} &\approx \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \left[ 1 + \left( 1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \frac{H}{h} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{K} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( 1 + \frac{2}{K} \frac{H}{h} \right) \left( \frac{H}{h} \right)^2 \left\{ \frac{1}{K} \left( \frac{1}{K} - \frac{1}{4} \right) - \frac{3}{20} \right\} \right]. \end{aligned} \dots\dots\dots(21)$$

(4) 波 長

波長  $L$  の第1近似は,

$$\frac{L_1}{h_c} = \frac{4K}{\sqrt{3}} \left( \frac{h_c}{H} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{H}{h_c} \right), \dots\dots\dots(22)$$

あるいは,

$$\frac{L_1}{h} \approx \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \frac{4K}{\sqrt{3}} \left( \frac{h}{H} \right)^{1/2} \left\{ 1 + \left( 1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \frac{3}{2} \frac{H}{h} \right\}. \dots\dots\dots(23)$$

第2近似は,

$$\frac{L_2}{h_c} = \frac{4K}{\sqrt{3}} \left( \frac{h_c}{H} \right)^{1/2} \left( 1 - \frac{5}{8} \frac{H}{h_c} \right), \dots\dots\dots(24)$$

あるいは,

$$\frac{L_2}{h} \approx \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \frac{4K}{\sqrt{3}} \left( \frac{h}{H} \right)^{1/2} \left\{ 1 - \left( 1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \frac{5}{8} \frac{H}{h} \right\}^{-1} \dots\dots\dots(25)$$

(5) 圧 力

圧力  $p$  の第1近似は,

$$\frac{p_1}{\rho g H} = \frac{\eta_1 - z}{H} = \operatorname{sech}^2 \left( \frac{2K}{L_1} X \right) - \frac{z}{H}. \dots\dots\dots(26)$$

ここに,  $z$  は波の谷を通る  $x$  軸に対して鉛直上向きにとった座標,  $\rho$  は水の密度,  $g$  は重力加速度である。

第2近似は,

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{\rho g H} &= \frac{\eta_2 - z}{H} - \frac{3}{4} \frac{H}{h_c} \left\{ 2 \frac{z}{h_c} + \left( \frac{z}{h_c} \right)^2 \right\} \left\{ 2 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{2K}{L_2} X \right) - 3 \operatorname{sech}^4 \left( \frac{2K}{L_2} X \right) \right\} \\ &\approx \operatorname{sech}^2 \left( 2K \frac{X}{L_2} \right) - \frac{3}{4} \frac{H}{h} \operatorname{sech}^2 \left( 2K \frac{X}{L_2} \right) \left( 1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \\ &\quad \times \left\{ 1 - \operatorname{sech}^2 \left( 2K \frac{X}{L_2} \right) \right\} - \frac{3}{4} \frac{H}{h} \operatorname{sech}^2 \left( 2K \frac{X}{L_2} \right) \left\{ 2 \frac{z}{h_c} + \left( \frac{z}{h_c} \right)^2 \right\} \\ &\quad \times \left( 1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \left\{ 2 - 3 \operatorname{sech}^2 \left( 2K \frac{X}{L_2} \right) \right\} - \frac{z}{H}. \end{aligned} \dots\dots\dots(27)$$

(6) 水粒子速度

$x$ 方向の水粒子の速度  $u$  のクノイド波の第1近似は、

$$\frac{u_1}{\sqrt{gh_c}} = \frac{\eta_1}{h_c} + \frac{H}{h_c k^2} \left( \frac{1}{2} - \frac{E}{K} \right) - \left( \frac{2k^2 - 1}{2k^2} \right) \frac{H}{h_c} \dots\dots\dots(28)$$

であらわされるから、hyperbolic waves の第1近似は、 $k=1$  として、

$$\frac{u_1}{\sqrt{gh_c}} = \frac{H}{h_c} \left( \frac{\eta_1}{H} - \frac{E}{K} \right) \approx \frac{H}{h_c} \left[ \operatorname{sech}^2 \left( 2K \frac{X}{L_1} \right) - \frac{1}{K} \right] \dots\dots\dots(29)$$

$h_c$  を  $h$  で書きなおすと、

$$\frac{u_1}{\sqrt{gh}} \approx \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \left( \frac{H}{h} \right) \left[ \operatorname{sech}^2 \left( 2K \frac{X}{L_1} \right) - \frac{1}{K} \right] \dots\dots\dots(30)$$

クノイド波の  $u$  の第2近似は、

$$\begin{aligned} \frac{u_2}{\sqrt{gh_c}} &= \frac{H}{h_c k^2} \left( \frac{1}{2} - \frac{E}{K} \right) + \left( \frac{H}{h_c} \right)^2 \frac{1}{k^4} \left\{ \frac{E}{K} \left( \frac{E}{K} + \frac{3}{4} k^2 - 1 \right) - \left( \frac{k^4 + 14k^2 - 9}{40} \right) \right\} \\ &\quad - \left( \frac{2k^2 - 1}{2k^2} \right) \frac{H}{h_c} + \left( \frac{21k^4 - 6k^2 - 9}{40k^4} \right) \left( \frac{H}{h_c} \right)^2 \\ &\quad + \frac{\eta_1}{h_c} \left[ 1 - \frac{H}{h_c} \left( \frac{7k^2 - 2}{4k^2} \right) - \frac{3}{2} \frac{H}{h_c} \left( 2 - \frac{1}{k^2} \right) \left\{ 2 \frac{z}{h_c} + \left( \frac{z}{h_c} \right)^2 \right\} \right] \\ &\quad + \left( \frac{\eta_1}{h_c} \right)^2 \left[ \frac{5}{4} + \frac{9}{4} \left\{ 2 \frac{z}{h_c} + \left( \frac{z}{h_c} \right)^2 \right\} \right] - \frac{3}{4} \left( \frac{H}{h_c} \right)^2 \left( \frac{1}{k^2} - 1 \right) \left\{ 2 \frac{z}{h_c} + \left( \frac{z}{h_c} \right)^2 \right\} \end{aligned} \dots\dots\dots(31)$$

であらわされるから、hyperbolic waves の第2近似は、 $k=1$  として、

$$\begin{aligned} \frac{u_2}{\sqrt{gh_c}} &= \left( \frac{H}{h_c} \right) \left( \frac{\eta_1}{H} \right) \left[ 1 - \frac{5}{4} \frac{H}{h_c} - \frac{3}{2} \frac{H}{h_c} \left\{ 2 \frac{z}{h_c} + \left( \frac{z}{h_c} \right)^2 \right\} \right] \\ &\quad + \left( \frac{H}{h_c} \right)^2 \left( \frac{\eta_1}{H} \right)^2 \left[ \frac{5}{4} + \frac{9}{4} \left\{ 2 \frac{z}{h_c} + \left( \frac{z}{h_c} \right)^2 \right\} \right] \\ &\quad - \frac{H}{h_c} \frac{E}{K} \left\{ 1 - \frac{H}{h_c} \left( \frac{E}{K} - \frac{1}{4} \right) \right\} \\ &\approx \left( \frac{H}{h_c} \right) \operatorname{sech}^2 \left( 2K \frac{X}{L_2} \right) \left[ 1 - \frac{5}{4} \frac{H}{h_c} - \frac{3}{2} \frac{H}{h_c} \left\{ 2 \frac{z}{h_c} + \left( \frac{z}{h_c} \right)^2 \right\} \right] \\ &\quad + \left( \frac{H}{h_c} \right)^2 \operatorname{sech}^4 \left( 2K \frac{X}{L_2} \right) \left[ \frac{5}{4} + \frac{9}{4} \left\{ 2 \frac{z}{h_c} + \left( \frac{z}{h_c} \right)^2 \right\} \right] \\ &\quad - \frac{H}{h_c} \frac{1}{K} \left\{ 1 - \frac{H}{h_c} \left( \frac{1}{K} - \frac{1}{4} \right) \right\} \dots\dots\dots(32) \end{aligned}$$

$H/h_c$  を  $H/h$  で書きなおせば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_2}{\sqrt{gh}} &\approx \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \left\{ A_1 \operatorname{sech}^2 \left( 2K \frac{X}{L_2} \right) + A_2 \operatorname{sech}^4 \left( 2K \frac{X}{L_2} \right) - A_3 \right\}, \\ A_1 &= \left( 1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \frac{H}{h} \left[ 1 - \frac{5}{4} \left( 1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \frac{H}{h} - \frac{3}{2} \left( 1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \right. \\ &\quad \times \left. \frac{H}{h} \left\{ 2 \frac{z}{h_c} + \left( \frac{z}{h_c} \right)^2 \right\} \right], \\ A_2 &= \left( 1 + \frac{2}{K} \frac{H}{h} \right) \left( \frac{H}{h} \right)^2 \left[ \frac{5}{4} + \frac{9}{4} \left\{ 2 \frac{z}{h_c} + \left( \frac{z}{h_c} \right)^2 \right\} \right], \\ A_3 &= \left( 1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \left( \frac{H}{h} \right) \frac{1}{K} \left\{ 1 - \left( 1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \left( \frac{H}{h} \right) \left( \frac{1}{K} - \frac{1}{4} \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(33)$$

一方、 $z$ 方向の水粒子の速度  $w$  のクノイド波の第1近似は、

$$\frac{w_1}{\sqrt{gh_c}} = \left(1 + \frac{z}{h_c}\right) \left\{ \frac{3}{k^2} \left(\frac{H}{h_c}\right)^3 \right\}^{1/2} \operatorname{cn}\left(2K \frac{X}{L_1}\right) \operatorname{sn}\left(2K \frac{X}{L_1}\right) \operatorname{dn}\left(2K \frac{X}{L_1}\right) \dots (34)$$

であるから, hyperbolic waves の第1近似は,  $k=1$  とし,  $\operatorname{cn}$ ,  $\operatorname{dn}$  を  $\operatorname{sech}$ ,  $\operatorname{sn}$  を  $\operatorname{tanh}$  と書きかえれば, 次のように書きあらわされる。

$$\frac{w_1}{\sqrt{gh_c}} = \left(1 + \frac{z}{h_c}\right) \sqrt{3} \left(\frac{H}{h_c}\right)^{3/2} \operatorname{sech}^2\left(2K \frac{X}{L_1}\right) \operatorname{tanh}\left(2K \frac{X}{L_1}\right) \dots (35)$$

$z/h_c$  の項のみを除いて,  $h_c$  を  $h$  で書きあらわすと,

$$\frac{w_1}{\sqrt{gh}} \approx \left(1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h}\right) \left(1 + \frac{z}{h_c}\right) \sqrt{3} \left(\frac{H}{h}\right)^{3/2} \operatorname{sech}^2\left(2K \frac{X}{L_1}\right) \operatorname{tanh}\left(2K \frac{X}{L_1}\right) \dots (36)$$

クノイド波の  $w$  の第2近似は,

$$\begin{aligned} \frac{w_2}{\sqrt{gh_c}} &= \left(1 + \frac{z}{h_c}\right) \left\{ \frac{3}{k^2} \left(\frac{H}{h_c}\right)^3 \right\}^{1/2} \operatorname{cn}\left(2K \frac{X}{L_2}\right) \operatorname{sn}\left(2K \frac{X}{L_2}\right) \operatorname{dn}\left(2K \frac{X}{L_2}\right) \\ &\times \left[ 1 - \frac{H}{h_c} \left(\frac{5k^2+2}{8k^2}\right) - \frac{H}{h_c} \left(1 - \frac{1}{2k^2}\right) \left\{ 2 \frac{z}{h_c} + \left(\frac{z}{h_c}\right)^2 \right\} \right] \\ &- \frac{1}{2} \frac{\eta_1}{h_c} \left[ 1 - 6 \frac{z}{h_c} - 3 \left(\frac{z}{h_c}\right)^2 \right] \dots (37) \end{aligned}$$

であるから, hyperbolic waves の第2近似は,

$$\begin{aligned} \frac{w_2}{\sqrt{gh_c}} &= \left(1 + \frac{z}{h_c}\right) \sqrt{3} \left(\frac{H}{h_c}\right)^{3/2} \operatorname{sech}^2\left(2K \frac{X}{L_2}\right) \operatorname{tanh}\left(2K \frac{X}{L_2}\right) \\ &\times \left[ 1 - \frac{7}{8} \frac{H}{h_c} - \frac{1}{2} \frac{H}{h_c} \left\{ 2 \frac{z}{h_c} + \left(\frac{z}{h_c}\right)^2 \right\} \right] \\ &- \frac{1}{2} \frac{H}{h_c} \operatorname{sech}^3\left(2K \frac{X}{L_2}\right) \left[ 1 - 6 \frac{z}{h_c} - 3 \left(\frac{z}{h_c}\right)^2 \right] \dots (38) \end{aligned}$$

あるいは,

$$\begin{aligned} \frac{w_2}{\sqrt{gh}} &\approx \left(1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h}\right) \left(1 + \frac{z}{h_c}\right) \sqrt{3} \left(\frac{H}{h}\right)^{3/2} \operatorname{sech}^2\left(2K \frac{X}{L_2}\right) \operatorname{tanh}\left(2K \frac{X}{L_2}\right) \\ &\times \left[ 1 - \frac{7}{8} \left(1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h}\right) \frac{H}{h} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h}\right) \frac{H}{h} \left\{ 2 \frac{z}{h_c} + \left(\frac{z}{h_c}\right)^2 \right\} \right] \\ &- \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h}\right) \frac{H}{h} \operatorname{sech}^2\left(2K \frac{X}{L_2}\right) \left[ 1 - 6 \frac{z}{h_c} - 3 \left(\frac{z}{h_c}\right)^2 \right] \dots (39) \end{aligned}$$

### (7) 波のエネルギー

ここでは, 簡単のため, 第1近似のみについて述べる。

a) 位置のエネルギー 単位面積当たりの波のもつ平均の位置のエネルギー  $E_p$  は,

$$E_p = \frac{1}{2} \rho g \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \eta^2 dx \dots (40)$$

であらわされるから, (15) 式を用いて  $E_p$  の第1近似を計算すれば,

$$\begin{aligned} E_{p1} &= \frac{1}{2} \rho g H^2 \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \operatorname{sech}^4\left(2K \frac{X}{L}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \rho g H^2 \frac{\operatorname{tanh} K}{K} \left(1 - \frac{1}{3} \operatorname{tanh}^2 K\right) \end{aligned}$$

がえられるが, (5) 式で示すように,  $K \geq 3$  の条件があるから  $\operatorname{tanh} K \approx 1$  としてよい。したがって, 上式は次のように書ける。

$$E_{p1} = \frac{1}{3} \rho g H^2 \frac{1}{K} \dots (41)$$

なお, クノイド波の位置のエネルギーを求めてみると,



$$E_{p1} = \frac{\rho g}{6k^4} H^2 \left\{ (4k^2 - 2) \frac{E}{K} + 2 - 5k^2 + 3k^4 \right\} \dots\dots\dots(42)$$

となるから、 $k=1$ 、 $E=1$  とおけば、(41) 式と一致する。また、1 波長当たりの hyperbolic waves の位置のエネルギーは、(41) 式と (23) 式より、

$$E_{p1} L_1 = \frac{1}{3} \rho g H^2 \frac{L_1}{K} \\ = \frac{1}{2} \rho g H^3 \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \left( \frac{4}{3} \frac{h}{H} \right)^{3/2} \left\{ 1 + \left( 1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \frac{3}{2} \frac{H}{h} \right\} \dots\dots(43)$$

となるから、孤立波の位置のエネルギー  $E_{ps1}$  は、上式で  $K \rightarrow \infty$  とすることにより、

$$E_{ps1} = \frac{1}{2} \rho g H^3 \left( \frac{4}{3} \frac{h}{H} \right)^{3/2} \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{H}{h} \right) \dots\dots\dots(44)$$

がえられる。

b) 運動のエネルギー 単位面積当たりの波のもつ平均の運動のエネルギー  $E_k$  は、

$$E_k = \frac{1}{2} \rho \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-h_t}^{\eta} (u^2 + w^2) dx dz \dots\dots\dots(45)$$

であらわされるから、(29) および (35) 式を用いて  $E_k$  の第1近似を計算すれば、 $(\tanh K)^n \approx 1$  (ただし  $n$  は11以下の奇数) を考慮して、

$$\frac{1}{2} \rho \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-h_t}^{\eta} u^2 dx dz = \frac{1}{3} \rho g H^2 \frac{1}{K} \left\{ 1 + \frac{4}{5} \left( \frac{H}{h_t} \right) - \frac{3}{K} - \frac{2}{K} \left( \frac{H}{h_t} \right) \right\}$$

および

$$\frac{1}{2} \rho \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-h_t}^{\eta} w^2 dx dz = \frac{1}{3} \rho g H^2 \frac{1}{K} \left\{ \frac{1}{5} \left( \frac{H}{h_t} \right) + \frac{12}{35} \left( \frac{H}{h_t} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{8}{35} \left( \frac{H}{h_t} \right)^3 + \frac{64}{1155} \left( \frac{H}{h_t} \right)^4 \right\}$$

がえられるから、 $(H/h_t)^3$  以下の項を無視して、

$$E_{k1} \approx \frac{1}{3} \rho g H^2 \frac{1}{K} \left\{ 1 + \frac{H}{h_t} + \frac{12}{35} \left( \frac{H}{h_t} \right)^2 - \frac{3}{K} - \frac{2}{K} \left( \frac{H}{h_t} \right) \right\} \dots\dots\dots(46)$$

が求められる。

なお、1 波長当たりの運動のエネルギーは、

$$E_{k1} L_1 = \frac{1}{2} \rho g H^3 \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \left( \frac{4}{3} \frac{h}{H} \right)^{3/2} \left\{ 1 + \left( 1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \frac{3}{2} \frac{H}{h} \right\} \\ \times \left\{ 1 + \left( 1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \left( \frac{H}{h} \right) + \frac{12}{35} \left( 1 + \frac{2}{K} \frac{H}{h} \right) \left( \frac{H}{h} \right)^2 \right. \\ \left. - \frac{3}{K} - \frac{2}{K} \left( 1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \left( \frac{H}{h} \right) \right\} \dots\dots\dots(47)$$

となるから、孤立波の運動のエネルギー  $E_{ks1}$  は、上式で  $K \rightarrow \infty$  とすることにより、

$$E_{ks1} = \frac{1}{2} \rho g H^3 \left( \frac{4}{3} \frac{h}{H} \right)^{3/2} \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{H}{h} \right) \left\{ 1 + \frac{H}{h} + \frac{12}{35} \left( \frac{H}{h} \right)^2 \right\} \\ \approx \frac{1}{2} \rho g H^3 \left( \frac{4}{3} \frac{h}{H} \right)^{3/2} \left\{ 1 + \frac{5}{2} \frac{H}{h} + \frac{129}{70} \left( \frac{H}{h} \right)^2 \right\} \dots\dots\dots(48)$$

がえられる。

c) 全エネルギー 単位面積当たりの波のもつ平均の全エネルギーの第1近似  $E_t$  は、(41) および (46) 式より、

$$\begin{aligned}
 E_1 &= E_{v1} + E_{k1} \\
 &= \frac{2}{3} \rho g H^2 \frac{1}{K} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{H}{hc} \right) + \frac{6}{35} \left( \frac{H}{hc} \right)^2 - \frac{3}{2} \frac{1}{K} - \frac{1}{K} \left( \frac{H}{hc} \right) \right\} \\
 &\approx \frac{2}{3} \rho g H^2 \frac{1}{K} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \left( \frac{H}{h} \right) + \frac{6}{35} \left( 1 + \frac{2}{K} \frac{H}{h} \right) \left( \frac{H}{h} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3}{2} \frac{1}{K} - \frac{1}{K} \left( 1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \left( \frac{H}{h} \right) \right\} \dots (49) \\
 &\approx \frac{2}{3} \rho g H^2 \frac{1}{K} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{H}{h} \right) + \frac{6}{35} \left( \frac{H}{h} \right)^2 - \frac{3}{2} \frac{1}{K} - \frac{1}{K} \left( \frac{H}{h} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

が求められる。

1波長当たりの全エネルギーは、(43) および (47) 式より、

$$\begin{aligned}
 E_1 L_1 &= (E_{v1} + E_{k1}) L_1 \\
 &\approx \rho g H^3 \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) \left( \frac{4}{3} \frac{h}{H} \right)^{3/2} \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{H}{h} \right) \\
 &\quad \times \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{H}{h} \right) + \frac{6}{35} \left( \frac{H}{h} \right)^2 - \frac{3}{2} \frac{1}{K} - \frac{1}{K} \left( \frac{H}{h} \right) \right\} \dots (50)
 \end{aligned}$$

とあらわされるから、孤立波の全エネルギー  $E_{s1}$  は、上式で  $K \rightarrow \infty$  として、

$$\begin{aligned}
 E_{s1} &= \rho g H^3 \left( \frac{4}{3} \frac{h}{H} \right)^{3/2} \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{H}{h} \right) \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{H}{h} + \frac{6}{35} \left( \frac{H}{h} \right)^2 \right\} \\
 &\approx \rho g H^3 \left( \frac{4}{3} \frac{h}{H} \right)^{3/2} \left\{ 1 + 2 \frac{H}{h} + \frac{129}{140} \left( \frac{H}{h} \right)^2 \right\} \dots (51)
 \end{aligned}$$

となる。なお、波長として第2近似の(24)式を用いると、(51)式の代わりに

$$\begin{aligned}
 E_{s1} &\approx \rho g H^3 \left( \frac{4}{3} \frac{h}{H} \right)^{3/2} \left( 1 - \frac{5}{8} \frac{H}{h} \right)^{-1} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{H}{h} + \frac{6}{35} \left( \frac{H}{h} \right)^2 \right\} \\
 &\approx \rho g H^3 \left( \frac{4}{3} \frac{h}{H} \right)^{3/2} \left\{ 1 + \frac{9}{8} \frac{H}{h} + \frac{1959}{2240} \left( \frac{H}{h} \right)^2 \right\} \dots (52)
 \end{aligned}$$

がえられる。

### (8) 波のエネルギーの伝達

単位時間に単位幅を通過して輸送される平均の波のエネルギー  $\bar{W}$  は次式によってあらわされる<sup>28)</sup>。

$$\bar{W} = -\frac{\rho}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-h_c}^{\eta} u \frac{\partial \varphi}{\partial t} dz dt \dots (53)$$

ここに、 $\varphi$  は速度ポテンシャルである。

ベルヌーイの定理より、(53)式は

$$\bar{W} = \frac{\rho}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-h_c}^{\eta} \left\{ \frac{1}{2} (u^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} + gz \right\} u dz dt \dots (54)$$

と変形される。

いま、圧力  $p$ 、水粒子速度  $u$  および  $w$  として、第1近似の(26)、(29)および(35)式を用い、(54)式の積分を行なえば、 $(\tanh K)^n \approx 1$  (ここに、 $n$  は13以下の奇数) を考慮し、かつ  $(H/h_c)^3$  以下の項を無視して、

$$\begin{aligned}
 \frac{\rho}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-h_c}^{\eta_1} \frac{1}{2} u_1^2 dz dt &\approx \rho g \sqrt{gh_c} H^2 \frac{1}{K} \left\{ \frac{4}{15} \frac{H}{hc} + \frac{8}{35} \left( \frac{H}{hc} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{K} \frac{H}{hc} - \frac{4}{5} \frac{1}{K} \left( \frac{H}{hc} \right)^2 \right\}, \\
 \frac{\rho}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-h_c}^{\eta_1} \frac{1}{2} u_1 w_1^2 dz dt &\approx -\rho g \sqrt{gh_c} H^2 \frac{1}{K} \cdot \frac{1}{35} \left( \frac{H}{hc} \right)^2,
 \end{aligned}$$

$$\frac{\rho}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-h_t}^{\eta_1} \left( \frac{p_1}{\rho} + gz \right) u_1 dz dt = \rho g \sqrt{gh_t} H^2 \frac{1}{K} \left( \frac{2}{3} + \frac{8}{15} \frac{H}{h_t} - \frac{1}{K} - \frac{2}{3} \frac{1}{K} \frac{H}{h_t} \right)$$

がえられるから、

$$\left. \begin{aligned} \bar{W}_1 &= \frac{2}{3} \rho g \sqrt{gh_t} H^2 \frac{1}{K} \left\{ 1 + \frac{6}{5} \frac{H}{h_t} + \frac{3}{10} \left( \frac{H}{h_t} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} \frac{1}{K} - \frac{5}{2} \frac{1}{K} \frac{H}{h_t} - \frac{6}{5} \frac{1}{K} \left( \frac{H}{h_t} \right)^2 \right\} \\ &\approx \frac{2}{3} \rho g \sqrt{gh} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right) H^2 \left\{ 1 + \frac{6}{5} \frac{H}{h} + \frac{3}{10} \left( \frac{H}{h} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} \frac{1}{K} - \frac{5}{2} \frac{1}{K} \frac{H}{h} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(55)$$

が求められる。

#### 4. Hyperbolic waves の適用限界

以上述べてきた hyperbolic waves の水理特性式は、すべて (5) 式の条件のもとに導かれたもので、したがって、(5) 式がこの波の適用限界を示すことになる。

$K$  と  $T\sqrt{g/h}$  および  $H/h$  との関係は (10) 式によってあらわされるから、(5) 式は次のようにあらわすことができる。

$$K = \frac{\sqrt{3}}{4} T \sqrt{\frac{g}{h}} \left( \frac{H}{h} \right)^{1/2} \left\{ 1 - 1.3 \left( \frac{H}{h} \right)^2 \right\}^{1/2} \geq 3 \dots\dots\dots(56)$$

Fig. 5 は、(56) 式によって、hyperbolic waves の適用限界を示したもので、破線は  $H/h$  の値が小さい場合に適用される近似式

$$T\sqrt{g/h} = 4\sqrt{3} (H/h)^{-1/2} \dots\dots\dots(57)$$

をあらわす。

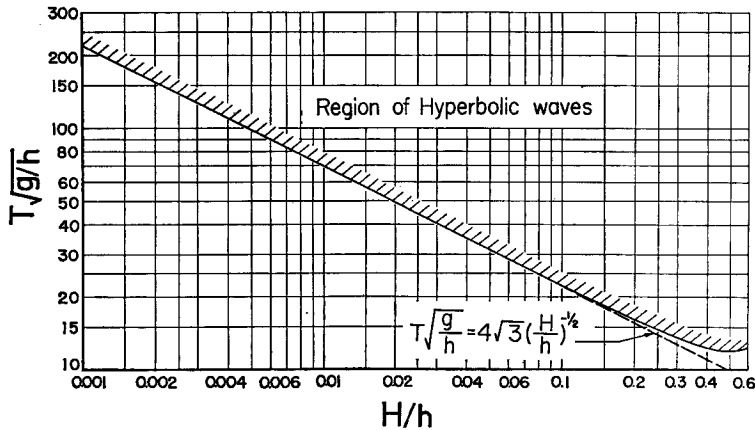


Fig. 5 Limit for application of hyperbolic wave theory.

#### 5. 結 語

以上この論文では、クノイド波の理論式の取扱いが非常に面倒なので、クノイド波の理論で  $k=1$  および

$E=1$  とおくけれども、 $K$  の値は無限大ではなく、有限の値をとるという新しい波を考え、これを hyperbolic waves と名付けた。この波は、いわばクノイド波から波長が長くなって、遂には孤立波へ移行するときの、中間の波であるといえる。そして、この波の水理特性、すなわち、波形、波速、波長、圧力、水粒子速度、波のエネルギーおよびエネルギーの伝達に関する式を導き、さらにこの波の適用限界を示した。水理特性としては、これらのほか、水粒子の軌跡、質量輸送、その他波の変形など、まだ論ずべき性質が残されているが、これらについては、別の機会にゆずりたい。

なお、この研究は文部省特定研究費による研究の一部であることを付記して謝意を表する。

#### 参 考 文 献

- 1) 岩垣雄一：クノイド波に関する研究（第1報）——波形こう配および波形について——，京大防災研究所年報，第7号，昭39. 3 pp.373—386.
- 2) 岩垣雄一：クノイド波に関する研究（第2報）——波速および波長について——，京大防災研究所年報，第8号，昭40. 3，pp.343—351.
- 3) Laitone, E.V.: The Second Approximation to Cnoidal and Solitary Waves, *Jour. of Fluid Mechanics*, Vol.9, 1961, pp.430—444.
- 4) 岩垣雄一，細見昌彦：クノイド波に関する研究——波形，波速および波長に関する実験——，京大防災研究所年報，第9号，昭41. 3，pp.637—645.
- 5) Skjelbreia, L.: Gravity Waves, Stokes' Third Order Approximation, *Tables of Functions*, Council on Wave Research, The Engineering Foundation, 1959, pp.1—337.
- 6) 岩垣雄一，細見昌彦：クノイド波に関する二，三の実験，第13回海岸工学講演会講演集，昭41.12，pp.1—8.
- 7) Stoker, J.J.: *Water Waves*, Interscience Pub., Inc., New York, 1957, p.48.
- 8) Wehausen, J.V. and E.V. Laitone: *Surface Waves*, *Handbuch der Physik*, Bd. IX, Springer-Verlag, Berlin, 1960, p.458.