

# 底部スリットを有する開水路流れの特性について

中川博次・宇民正

## VARIED FLOW IN OPEN CHANNEL WITH BOTTOM DIVERSION RACKS

By *Tadashi* UTAMI and *Hiroji* NAKAGAWA

### Synopsis

The behaviors of open channel flow on bottom diversion racks and their discharge characteristics are investigated herein.

The contents of this paper are as follows; The first, the coefficients of discharge are researched by experiment and applicability of gradually varied flow theory which is used widely for analysis of the water surface profile is discussed. The second, the fundamental equation including the terms of normal velocity is led and the characteristics of abruptly varied flow on the racks are investigated by experiment. At the last, in case of subcritical transitional flow, theoretical analysis of effluent and main flow behaviors is described and verified by experiment.

### 1. ま え が き

bottom rack は水路末または堤頂部に設けられた流出孔であり、その流出特性から考えて流量変化の非常に激しい山間急流部で一定流量を取水・分水するのに適し、また流下土砂を調節する機能を有する。その型式としては流下方向の格子で構成されるもの、それと直角な方向の格子で構成されるもの、あるいは多孔板より成るものがある。

bottom rack 上での開水路流れの挙動については、従来流量が場所的に減少する漸変流として解析されているが、通常用いられるこの種の構造物上では水路条件および流量の不連続な変化によって急変流としての性状を示すことが認められている。

その意味から本研究では、まず bottom rack における漸変流解析方法の適合性を実験によって明らかにし、次に鉛直方向速度成分を考慮した場合の水形特性を論じるとともに、急変流性状を実験的に把握して解析の方向づけを与える。最後に水面変化が小さい常流遷移の場合について、底部スリットからの流出量および主流の運動機構に関する理論的、実験的考察を行ない、分土工の一般的機能を論じる。

### 2. 漸変流としての考察

(1) 基礎方程式とその水理学的特性 一次元解析法による漸変流の基礎方程式は  $x$  をパラメーターとして次式で表わされる。

$$\frac{dh}{dx} = \sin \theta - \frac{n^2 Q^2}{R^{4/3} A^2} + \frac{2\beta \rho q_* Q}{g A^2} \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{dx}{dx} = \cos \theta - \frac{\beta Q^2}{g A^3} \frac{\partial A}{\partial h} \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{dQ}{dX} = -q_* \left( \cos \theta - \frac{\beta Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial h} \right) \dots\dots\dots(3)$$

上式中、 $\beta$ は運動量補正係数であり、エネルギー解析による場合には明らかにエネルギー補正係数 $\alpha$ となる。 $q_*$ は流出流量であり、 $p$ は流出にともなう運動量(またはエネルギー)の変化の大きさを表わす係数で、それぞれ

運動量解析  $p = 1 - (u_b/2\beta u_m)$   $u_m$ : 平均流速,  $u_b$ : 境界面における $x$ 方向流速

エネルギー解析  $p = (3 - u_s^2/\alpha u_m^2)/4$   $u_s$ : 境界面における絶対流速

となる。従来の解析法で流出流量の運動量およびエネルギーを無視した場合の値として、それぞれ1および1/2が用いられている。 $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p$ の分水上での変化についての実験的考察の結果はすでに報告した<sup>1)</sup>。

(2) 流出流量 多孔板では流出水のもつ運動エネルギーの大半は孔の壁面に衝突して変向する際に失なわれる。したがって、

$$q_* = C_h b \psi \sqrt{2gh} \dots\dots\dots(4)$$

で流出流量を表示するのが合理的である。ここに、 $C_h$ は(4)式の表示にもとづく流量係数、 $b$ は水路幅、 $\psi$ は開孔部面積と(水路幅×単位水路長)との比(開度)、 $h$ は水深である。一方、流出水が孔から自由落下する場合には、流出過程でのエネルギー損失が無視されるから次式の表示が用いられる。

$$q_* = C_H b \psi \sqrt{2gH} \dots\dots\dots(5)$$

ここに、 $C_H$ は(5)式の表示にもとづく流量係数、 $H$ は流出断面での平均エネルギー水頭である。

幅25cmの長方形一様断面水路の底面に、Fig. 1に示す塩化ビニール製多孔板をこう配1/200, 1/500および1/2000に設置し、各開孔部からの流出量を測定した結果を用いて $C_h$ および $C_H$ を計算し、その値を流出断面での主流の平均フルード数 $F$ との関係を示したのがFig. 2である。図から明らかなように、 $C_h$ より $C_H$ の方が $F$ との一義的關係が明確であることから、流出によるエネルギー損失は速度水頭に比してかなり小さいことが認められる。他型式の底部分水工の流出特性に関してはすでにその実験結果を明らかにした<sup>2)</sup>。

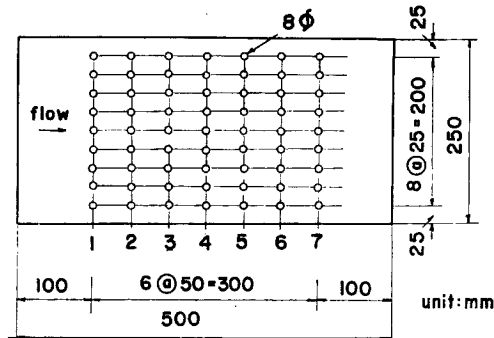


Fig. 1 Bottom diversion orifice used for test.

(3) 水面形特性 分水上に現われる遷移水面の形は一般に Fig. 3 に示される6種に分類される。すなわち、(a)は分水工をはさんで常流から常流へ遷移する場合、(b)は射流から射流への遷移、(c)は常流から分水工上流端付近の擬似鞍形点を通して射流に変化するもの、(d)は分水工上で等流水深曲線と限界水深との位置関係が変わり、特異点として結節点が現われるもの、(e)は分水工上で鞍形点が見られる場合、(f)は分水工の上流部で鞍形点が見われ、その下流で結節点を通して常流に移行するものである。

分水上に特異点があられる場合の性質について考察する。いま、長方形一様断面水路を対象とした場

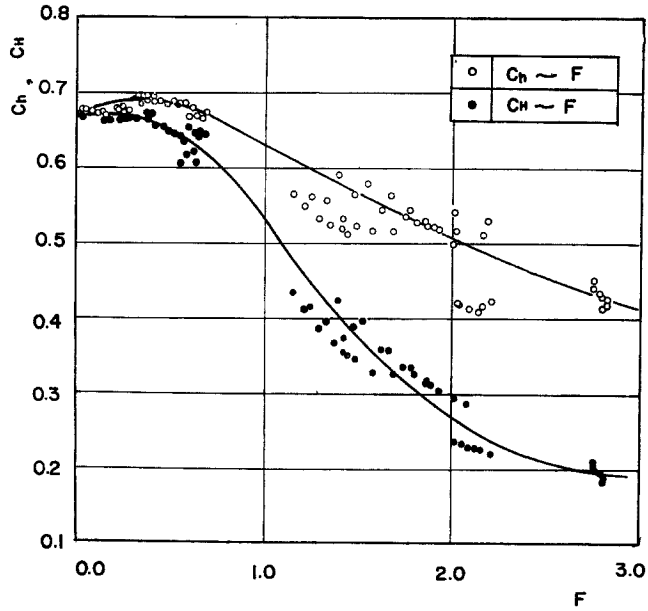


Fig. 2 Coefficient of discharge for bottom diversion orifice.

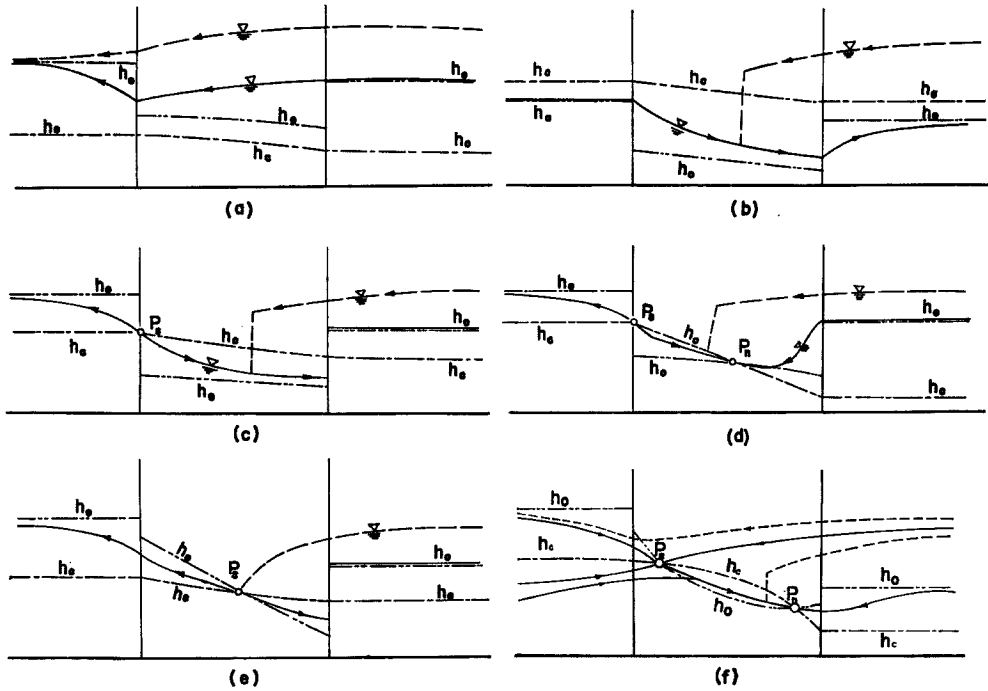


Fig. 3 Possible water surface profiles on the bottom racks.

合、断面形状、底こう配は  $x$  に無関係であり、また (1) および (2) 式に含まれる諸係数を  $h$  のみの関数で表わしうるならば、 $Q \sim h$  面での二次元解析が可能である。すなわち、

$$\frac{dh}{dQ} = \frac{\sin \theta - \frac{n^2 Q^2}{R^{4/3} b^2 h^2} + \frac{2\beta p q_* Q}{g b^2 h^2}}{q_* \left( \cos \theta - \frac{\beta Q^2}{g b^2 h^3} \right)} = \frac{f_1(Q, h)}{f_2(Q, h)} \dots\dots\dots (6)$$

特異点では、 $f_1 = f_2 = 0$  であるから、特異点における諸量に添字  $c$  をつけて表わすと、特異点の位置は明らかに、

$$\sin \theta = (n^2 Q_c^2 / R c^{4/3} b^2 h c^2) - (2\beta p q_* Q_c / g b^2 h c^2) \dots\dots\dots (7)$$

$$\cos \theta = \beta Q_c^2 / g b^2 h c^3 \dots\dots\dots (8)$$

(7) 式および (8) 式より、次の関係が得られる。

$$i = \tan \theta = h c \{ (n^2 g / \beta R c^{4/3}) - (2\beta p q_* c / Q_c) \} \dots\dots\dots (9)$$

特異点近傍の線型化方程式は、 $n, \beta, p$  を一定とすると、次式で表わされる。

$$\frac{dh}{dQ} = \frac{cQ + dh}{aQ + bh} \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 $a = 2q_* c \cos \theta / Q_c$ 、 $b = -3q_* c \cos \theta / h c$ 、 $c = -(2h c \cos \theta / Q_c^2) \{ p q_* c + (i Q_c / h c) - p Q_c (\partial q_* / \partial Q)_c \}$ 、 $d = (2h c \cos \theta / Q_c) [ (i Q_c / h c^2) + (2R c / 3h c^2) \{ (i Q_c / h c) + 2p q_* c \} + p (\partial q_* / \partial h)_c ]$  である。

いま、流出流量が (4) 式で表示されるものとする、流量係数  $C_n$  は主流のフルード数  $F (= \sqrt{\beta Q} / b \sqrt{g h^3 \cos \theta})$  の関数として一義的に定まるから、 $(\partial q_* / \partial Q)_c = (q_* c F_c / C_n c Q_c) (\partial C_n / \partial F)_c$  および  $(\partial q_* / \partial h)_c = -(q_* c / 2h c) \{ (3F_c / C_n c) (\partial C_n / \partial F)_c - 1 \}$  の関係が得られる。一方、Fig. 2 の曲線から  $(\partial C_n / \partial F)_c < 0$  であり、結局常数係数の符号は、 $a > 0$ 、 $b < 0$ 、 $c < 0$ 、 $d > 0$  となり、(10) 式の特性方程式の判別式  $D = (a-d)^2 + 4bc > 0$  となる。また、

$$ad - bc = (2q_* c \cos^2 \theta / Q_c^2) \{ (i Q_c / h c) + 2p q_* c \} (b - 6h c) / (b + 2h c) \dots\dots\dots (11)$$

であるから、 $h c < b/6$  の場合には特異点は結節点に、 $h c > b/6$  では鞍形点となる。流出流量表示式として (5) 式を用いた場合にもまったく同じ結果が得られる。

(4) 漸変流解析法の検討 Fig. 1 に示された分 waters 工模型は、漸変流基礎方程式に含まれる諸係数の値を

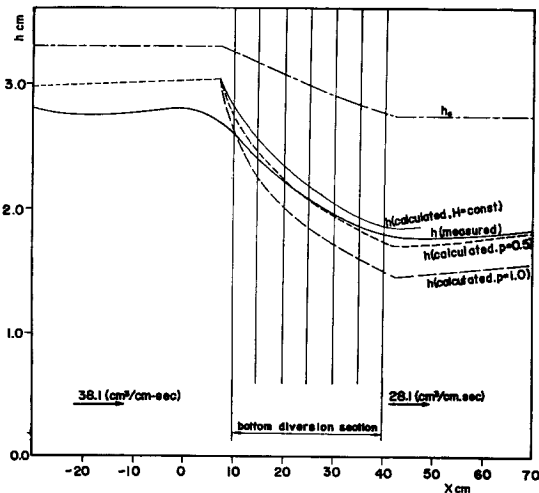


Fig. 4 Comparison of observed and calculated water surface profiles in case of gradually varied flow.

実験によって明らかにする目的で、流量の場所的变化が小さくなるように選ばれたものである。いま、この分土工での実測水面形と従来の運動量およびエネルギー解析法にもとづいて計算された水面形とを比較した一例を Fig. 4 に示す。また分土工上で流れの比エネルギーが変化しないとの仮定にもとづく計算水面形も併示されている。明らかに運動量解析法 ( $p=1$ ) によるよりはエネルギー解析法 ( $p=1/2$ ) による方が実測水面形との適合度は大きく、また比エネルギー一定の仮定も実用解析上は十分許容しうることがわかる。

このように分水比が小さく、分土工延長が比較的大きい場合には、巨視的には主流に関する漸変流的取扱いが可能であるが、流れの水理学的挙動を詳細に検討すれば基礎方程式の適用性にかなり問題があることが認められる。すなわち、流れが常流、射流にかかわらず、分土工上下流端付近での実測底面圧力はその点での水深に相当した静水圧より  $\pm 5\%$  以内の差異を示し、流線曲率の影響が現われており、また水面こう配の実測値から逆算された  $p$  の値も端部付近では分土工中央部に比して極度に小さい値を示し、特定の水理量に関係づけて  $p$  を一義的に決定するのは困難であることが認められた。さらに分土工上では常に変曲点を有する水面形を示したが、このような変曲点の存在は従来の漸変流理論によれば特定の水路条件を除いて発生しうるものではない。Fig. 5 は Khatchatrian の実験<sup>3)</sup> で得られた縦格子上の圧力および流下方向流速の分布を示したものであるが、分土工上で漸変流解析の基本仮定である静水圧分布は成立せず、水面変化も急激であって鉛直方向速度成分を無視しえないことがわかる。

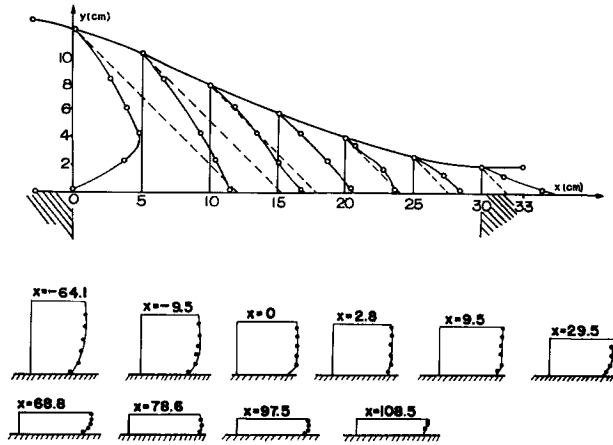


Fig. 5 Pressure and velocity distribution on the rack (by Khatchatrian).

以上の実験的事実から漸変流理論はこの種流れの性状を十分満足には表わしえないものと考えられ、分土工上の流れの急変流としての水理学的特性が明らかにされねばならない。しかしながら急変流に関する二次元解析は、流量が場所的に変化しない場合にも基礎方程式が高次の非線型性をもち、また境界条件を確定しがたいことから定量的な数学的解をうることは困難であり、さらに流量が場所的に変化する場合には流出条件が含まれるからより複雑である。そこで以下ではある仮定のもとに流量が変化する場合の開水路流れの基礎方程式を導びき、それに基づいて分土工上の流れを定性的に考察するとともに、実験によって急変流特性に関する若干の考察を行なう。

### 3. 鉛直方向速度成分を考慮した基礎方程式

いま、分土工床に沿った流下方向に  $x$  軸、それと直角方向に  $z$  軸をとり、 $\partial^2 u / \partial x^2 \ll \partial^2 u / \partial z^2$ 、また  $\partial^2 w / \partial x^2$ 、 $\partial^2 w / \partial z^2 \ll \partial^2 u / \partial z^2$  とすると、各方向の運動方程式は次のとおりとなる。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \dots\dots\dots(12)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \dots\dots\dots (13)$$

連続式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (14)$$

を考慮すると、(12) 式および (13) 式はそれぞれ、

$$-\frac{u^2}{g} \frac{\partial(w/u)}{\partial z} = \sin \theta - \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho g} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \dots\dots\dots (15)$$

$$\frac{u^2}{g} \frac{\partial(w/u)}{\partial x} = -\cos \theta - \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial z} \dots\dots\dots (16)$$

となる。x 方向流速の分布形は、

$$u = u_m f'(z/h) = (q/h) f'(m) \dots\dots\dots (17)$$

で表わされるものとする。ここに、 $u_m$  は x 方向の平均流速、 $q$  は水路単位幅当りの流量である。(14) 式に (17) 式を代入して積分し、自由水面  $z=h$  での条件  $w/u = dh/dx$  および連続条件  $dq/dx = -q_*$  を与えると、z 方向流速  $w$  は次式で表わされる。

$$w = q_* \{f(m) - f(1)\} + (qm/h)(dh/dx) f'(m) \dots\dots\dots (18)$$

(17) および (18) 式を (16) 式に代入し、z から h まで積分すると圧力分布式として次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho g} &= h \cos \theta (1-m) + \frac{q_*^2}{g} \int_m^1 f'(m) \{f(m) - f(1)\} dm \\ &+ \frac{1}{g} \frac{dh}{dx} \left[ q \frac{dq_*}{dh} \int_m^1 f'(m) \{f(m) - f(1)\} dm - \frac{qq_*}{h} \int_m^1 m \{f'(m)\}^2 dm \right. \\ &+ \left. \frac{qq_*}{h} \int_m^1 f'(m) \{f(m) - f(1)\} dm + \frac{qq_*}{h} \int_m^1 m f''(m) \{f(m) - f(1)\} dm \right] \\ &- \frac{q^2}{gh^2} \left( \frac{dh}{dx} \right)^2 \int_m^1 m \{f'(m)\}^2 dm + \frac{q^2}{gh} \frac{d^2h}{dx^2} \int_m^1 m \{f'(m)\}^2 dm \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

いま、分水工上の各断面での x 方向流速が平均流速  $u_m$  で表わしうるとすると、

$$du/dz = 0, f'(m) = 1, f(m) = m, f(1) = 1, f''(m) = 0 \dots\dots\dots (20)$$

であり、また水路単位幅当り流出量  $q_*$  として  $q_* = C_n \psi \sqrt{2gh}$  の表示を与え、 $C_n$  を一定と仮定すれば、 $dq_*/dh = q_*/2h$  となる。これらを (19) 式に代入し、微小項を省略すれば、

$$\frac{p}{\rho g} = (1-m)h \cos \theta - (1-m)^2 \frac{q_*^2}{2g} - (5-m)(1-m) \frac{qq_*}{4gh} \frac{dh}{dx} + (1-m^2) \frac{q^2}{2gh} \frac{d^2h}{dx^2} \dots\dots\dots (21)$$

が得られる。(17)、(18) および (21) 式を (15) 式に代入し、z=0 から h まで積分すると、

$$h \sin \theta - \frac{\tau}{\rho g} + \frac{qq_*}{gh} - \frac{dh}{dx} \left( h \cos \theta + \frac{q_*^2}{4g} - \frac{q^2}{gh^3} \right) + \frac{5qq_*}{4g} \frac{d^2h}{dx^2} - \frac{q^2}{3g} \frac{d^3h}{dx^3} = 0 \dots\dots\dots (22)$$

を得る。(22) 式が z 方向速度成分を考慮したときの水面形方程式であり、漸変流次元解析法にもとづく (1) および (2) 式に比べ、 $d^2h/dx^2$ 、 $d^3h/dx^3$  および水面こう配と水深の積を含む項が付加される。

(22) 式は独立変数 x に対して 2 つの未知数  $q$  および  $h$  を含むから、連続式

$$dq/dx = -q_* = -C_n \psi \sqrt{2gh} \dots\dots\dots (23)$$

の關係を用いて  $q \sim h$  平面での方程式にかき直し解析をすすめることができるが、(22) 式は非線型であるために代数的解をうることは困難である。

いま底面での圧力水頭は、(21) 式で  $m=0$  として、

$$\frac{p_0}{\rho g} = h \cos \theta - \frac{q_*^2}{2g} - \frac{5qq_*}{4gh} \frac{dh}{dx} + \frac{q^2}{2gh} \frac{d^2h}{dx^2} \dots\dots\dots (24)$$

Fig. 5 に示すように分水工上始端付近では、 $p_0=0$  であるから、

$$\frac{d^2h}{dx^2} = \frac{5q^*}{2q} \left( \frac{dh}{dx} \right) - \frac{2gh^2}{q^2} \left( 1 - \frac{q^{*2}}{2gh} \right) = \frac{5q^*}{2q} \left( \frac{dh}{dx} \right) - \frac{2gh^2}{q^2} (1 - C_n^2 \psi^2)$$

射流状態では常に、 $dh/dx < 0$ 、また  $C_n^2 \psi^2 < 1$  であるから、 $d^2h/dx^2 < 0$  となり、上に凸な水面形が発生することがわかる。

また、分土工上にあられる水面形の変曲点での水路床面圧力  $p_{bc}$  は、 $d^2h/dx^2 = 0$  から、

$$\frac{p_{bc}}{\rho g} = h - \frac{q^{*2}}{2g} - \frac{5qq^*}{4gh} \frac{dh}{dx} = h \left( 1 - C_n^2 \psi^2 + \frac{5qC_n^2 \psi^2}{2h} \frac{dh}{dq} \right)$$

となり、これに分土工上での比エネルギー一定の仮定にもとづく関係式  $dh/dq = h/q [1 - (h/h_c)^3]$  ( $h_c$  は限界水深) が近似的に成りたつものとして代入し、整理すると次式が得られる。

$$\frac{p_{bc}}{\rho gh} = 1 + \frac{C_n^2 \psi^2 (3h_c^3 + 2h^3)}{2(h_c^3 - h^3)}$$

分土工上を射流状態で流下する場合には、 $h_c^3 > h^3$  であるから  $p_{bc}/\rho g > h$  となり、変曲点での底面圧力は静水圧より大となることがわかる。

#### 4. 流量が急変する開水路流れに関する実験的考察 (常流から射流に遷移する場合)

分土工上での急変流特性を考察するために、水路床に流下方向と直角にスリットを設けた場合の開水路流れの水理特性に関する実験を行なった。ここでは、分土工上流で常流から射流に遷移する流れに限定して考察をすすめる。

(1) 実験装置および方法 実験水路の全長は 900 cm で、幅 25 cm、高さ 20 cm の長方形断面を有し、水路の中央部 200 cm は透明アクリル樹脂製、その他の部分はペンキ塗装された木製である。流出部分のスリットは幅 3 cm で、二次元流れとして取扱いが可能なように水路全幅にわたって開孔されている。底部流出端は底部流出に当たっての流量損失を最小にするために、45° の鋭縁に加工された。Fig. 6 に実験装置の配置を示す。

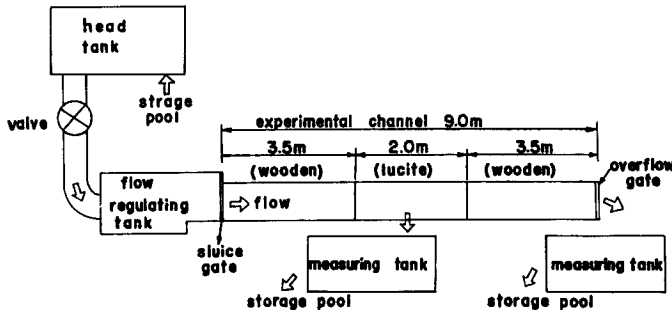


Fig. 6 Experimental apparatus.

流速および圧力の測定にはピトー管とマンノメーターを使用し、とくにスリット近傍で流向が水路床と平行でないところでは可傾ピトー管を用いた。流向は水中に糸片を流すことにより測定された。以下の流速および圧力の測定値はすべて水路中心線に沿って測られたものである。スリット付近で流速の変化が著しいところでは、トレーサーによる flow visualization の方法を利用して流速ベクトルを測定したが、これについては 5. において述べる。

(2) 実験結果の考察 1) 水面形状 水路こう配を 1/1000 の一定として、自然流下させたときの流れは Fig. 7 に示すように、スリット上流では常流であり、スリットの近傍で限界状態になり、以下は射流となって流下する流況を示した。Fig. 7 では初期流量から計算された限界水深  $h_c$  で水深および流下距離を無次元化して示してあり、スリット上流縁を  $x=0$  に選んでいる。スリットよりやや上流に支配断面が生じる

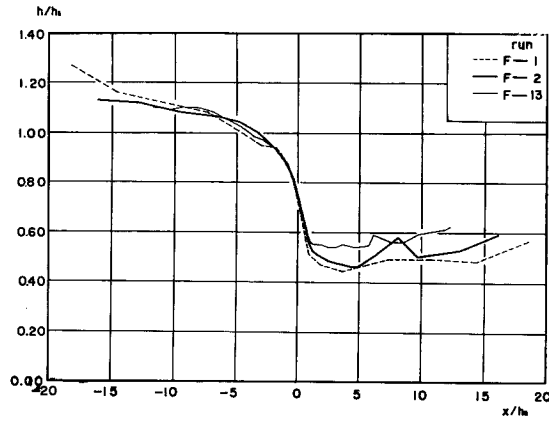


Fig. 7 Observed water surface profiles in case of sudden transition from subcritical to supercritical flow condition.

この現象は段落流の場合と同様であるから、従来の段落流に関する実験結果と比較して論ずることは興味深い。いま、スリット上流端から限界水深が発生する断面までの距離を  $L_f$ 、スリット始端断面での水深を  $h_f$  とするとき、実測値から計算された  $L_f/h_c$  および  $h_f/h_c$  の値を Table 1 に示す。段落流に関する H. Rouse<sup>4)</sup> の水平水路についての実験結果では  $h_f/h_c$  が 0.715,  $L_f/h_c$  が 4.0 なる値が得られており、岩崎の実験<sup>5)</sup> によれば  $h_f/h_c$  の値として 0.724 が与えられている。本実験では水路こう配および下流水位の影響をうけて、 $h_f/h_c$  の値は段落の場合に比して若干大きくなり、また限界水深発生点も段縁に近くなることが認められた。さらに流量配分比が大きくなるに伴って、 $h_f/h_c$  の値は減少する傾向が認められる。

Table 1 Measured depth at the brink and location of critical section

Runs	Initial flow rate $Q_1$ (l/s)	Divided flow rate $Q_*$ (l/s)	Discharge distribution ratio $\kappa$ (%)	$h_f/h_c$	$L_f/h_c$
F-1	18.70	4.40	23.6	0.748	3.95
F-2	11.97	3.55	29.7	0.745	3.40
F-3	9.88	3.34	33.8	0.730	3.65

2) 流速分布と圧力分布 スリットより上流の各断面中心線上での流速分布および圧力分布を Fig. 8 に示す。上流水路では流速は対数分布則に従いが、段縁に接近するにつれて底層流速が卓越するようになり、段落部では自由渦運動に似た流速分布を示している。圧力分布は限界水深があらわれる断面では静水圧分布を示したが、底部圧力が次第に減少し段縁部では底面圧力は大気圧に等しくなることが確かめられた。

Fig. 9 は流速および圧力の測定値を用いて計算された各断面でのエネルギー水頭の鉛直分布を示したものである。明らかにエネルギー水頭は対数分布を示しているが、各断面での分布形にほとんど差異が認められない。エネルギーの鉛直方向変化が認められるところから、蔽密にはこの種の流れをポテンシャル流として取扱うのは不適當である。



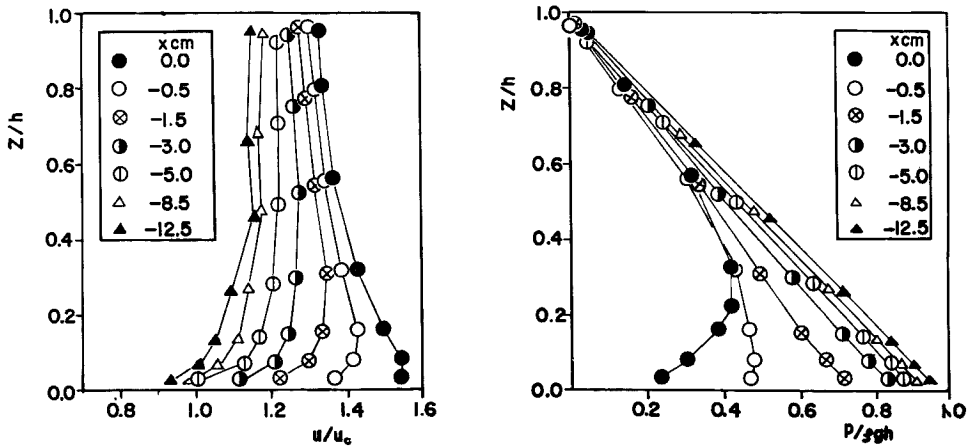


Fig. 8 Experimental variation of pressure and velocity distributions.

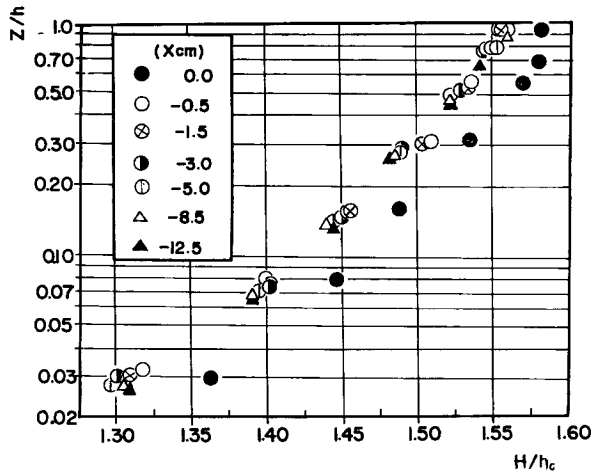


Fig. 9 Experimental variation of energy head distribution.

3) 流線曲率の変化 3.で求められた鉛直速度成分を考慮した基礎方程式において、流量が変化しない場合を考え、また  $d^2h/dx^2 \approx 1/R_s$  ( $R_s$  は水面の曲率半径) とすると、(16) 式左辺の加速度項は、 $(u^2/gR_s)(z/h)$  となり、曲率半径が水面で  $R_s$ 、水路底で無限大、その間は直線的に変化する仮定が必然的に含まれている。周知のように Boussinesq<sup>6)</sup> はこの仮定にもとづいて流線曲率の効果を論じ、また Jaeger<sup>7)</sup> は Fawer の曲率変化の表示式、 $1/R_z = \cos \phi/R = (1/R_s)(z/h)^2$  を用いて段落部の水理現象を論じ、連続式および運動量式を用いて、 $n = -1/2$  を与えている。ここで、 $R_z$  は鉛直方向にとられた曲率半径、 $\phi$  は流線と水平軸とのなす角である。岩佐<sup>8)</sup> は段落部の流れについて底面で有限曲率を有するとして、非回転曲線流理論による考察を行なっている。

いま、スリットを有する開水路流れについて、絶対流速  $V$  および圧力を測定し、 $V^2/gR = \cos \theta + (1/\rho g)(\partial p/\partial n)$  で与えられる関係式において  $\partial p/\partial n \approx \partial p/\partial z$ 、 $\cos \theta = 1$  として各断面での流線曲率の分布を求めたのが Fig. 10 である。スリットのごく近傍では水路床に近くなるほど曲率半径が小さくなり、ある有限な値をとる。また、段縁部のわずかに上流で水路床近くに曲率が負になる点が存在することが認められ、あた

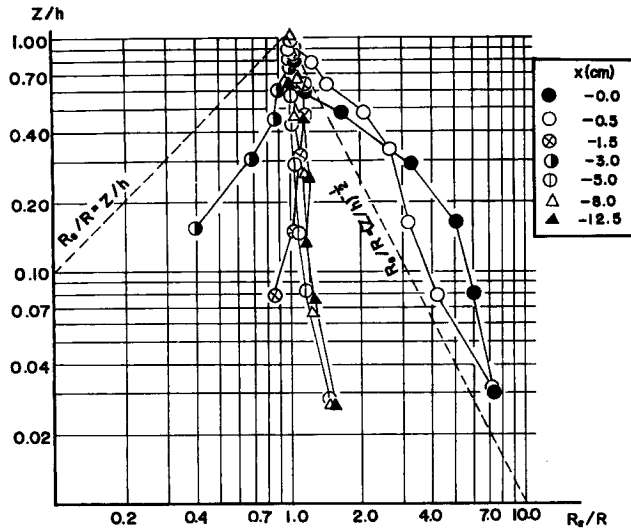


Fig. 10 Experimental variation of the curvatures of the streamline.

かも水路床にシルを設けた場合の流況を示すことが認められたのは興味深い。総じて段縁部では Jaeger の分布形が現象をよく表現しており、それより上流は Boussinesq の仮定が成り立つと考えてよい。

5. 流量が急変する開水路流れに関する実験的考察 (常流から常流に遷移する場合)

4. で述べたと同じ実験装置を用いて、水路全長にわたり常流状態となる場合のスリットからの流出および主流特性について実験的に考察する。

(1) 流出部近傍の水理学的特性 1) 流速分布 水路全幅にわたって設けられたスリット上の流れは二次元的取扱いが可能であるから、いま、Fig. 11 に示すようなスリット幅の midpoint を原点とする極座標  $(r, \phi)$  を考え、 $\phi=0$  の軸を水路床に沿い下流向きにとる。粘性項を無視するとき、運動方程式は次式で与えられる。

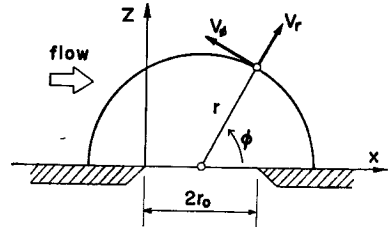


Fig. 11 Coordinate system.

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \dots\dots\dots(25)$$

$$v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\phi}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial \Omega}{\partial \phi} \dots\dots\dots(26)$$

また、流れが非回転的であると仮定すると、

$$\frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi) - \frac{\partial v_r}{\partial \phi} = 0 \dots\dots\dots(27)$$

となる。ここで、 $\Omega \equiv p + \rho g r \sin(\phi - \theta)$ 、 $\theta$  は水路床こう配、 $p$  は圧力、 $v_\phi$  は接線方向流速、 $v_r$  は半径方向流速成分である。

上式を直接解くことは困難であるから、解析にあたって流速分布に関するモデルを仮定することにする。すなわち、実際の流れの流速ベクトルは水路底に平行な成分  $u_m$  と座標原点の方向に向かう成分とから成るものとし、後者は半径  $r$  の半円周上では  $(\Delta q / \pi r) f(\phi)$  で与えられるものとする。ここで  $\Delta q$  は水路単位幅

当りのスリットからの流出流量であり、 $f(\phi)$  は流速分布を表わす関数である。スリットより上流で流線の曲がりかほとんどなく、圧力が静水圧分布を示す断面  $I$  における水深および平均流速をそれぞれ  $u_1$  および  $h_1$  とする。 $u_m$  は流出に関与しないことを考慮すれば次の表示式を与えることができる。

$$u_m = \left( u_1 - \frac{\Delta q}{2h_1} \right) g(r, \phi) \dots\dots\dots (28)$$

流れの各点で  $u_m$  は一定すなわち  $g(r, \phi) = 1$  と仮定すると、上述の仮定にもとづく流速分布式を (27) 式に代入することによって  $f(\phi) = 1$  を得るから、結局  $v_r$  および  $v_\phi$  は次のようになる。

$$v_r = -\frac{\Delta q}{\pi r} + u_m \cos \phi \dots\dots\dots (29)$$

$$v_\phi = -u_m \sin \phi \dots\dots\dots (30)$$

$g(r, \phi) = f(\phi) = 1$  の仮定を検討するために、上流側流量  $Q_1$  が 11.84 l/sec, 流出流量 7.31 l/sec, 下流水深が 13.0 cm の場合について、スリット幅を直径とする半円周上における  $f(\phi)$  および  $g(r_0, \phi)$  の分布を調べた。流出部近傍の流速ベクトルの測定には、流線曲率が大きいためにピトー管の使用は困難であるから、トレーサーによる flow visualization の方法を用いた。トレーサーとしてはモノクロールベンゼンとノルマルヘキサンの混合液に蛍光塗料を加え、その比重を 1 としたものをを用いた。この混合液は水中で直径 1~3 mm の粒状になるので、それをストロボ照明により写真撮影した。撮影結果の一例を Fig. 12 に示す。

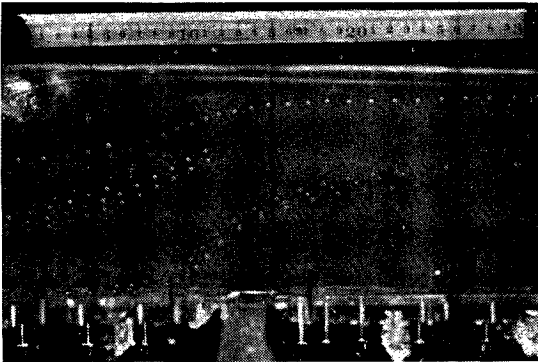


Fig. 12 Pattern of motion of floating particles.

多くの写真から読みとられた流速ベクトルを半径方向成分、すなわち  $(\Delta q / \pi r_0) f(\phi)$  および  $x$  方向成分  $\{u_1 - (\Delta q / 2h_1)\} g(r_0, \phi)$  とに分け、それから計算された  $f(\phi)$ ,  $g(r_0, \phi)$  と  $\phi$  との関係を Fig. 13 に示す。流速ベクトルを写真から読みとるさいにかなりの誤差が入ることはさげられず、また乱れの影響もあって結果はかなりばらついているが、Fig. 13 は  $g(r_0, \phi) = 1$  の仮定についてなお検討の余地があることを示している。

次に点  $P(r, \phi)$  における流速ベクトルの大きさ  $u$  を求める。(29) 式および (30) 式を

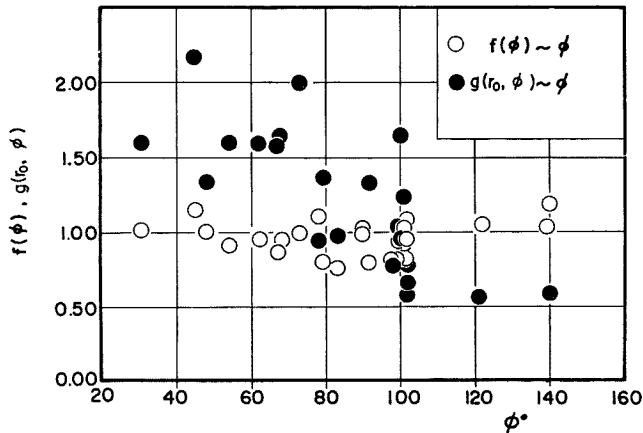


Fig. 13 Measured values of  $f(\phi)$  and  $g(r_0, \phi)$ .

用いるとき,

$$u^2 = \left(\frac{dq}{\pi r}\right)^2 - 2\left(\frac{dq}{\pi r}\right)u_m \cos \phi + u_m^2 \dots\dots\dots (31)$$

であるから,  $dq$  に対して後述の表示式 (33) を用いると,

$$\frac{u^2}{g h_1} = \frac{4C_1^2(2+F_1^2)}{\pi^2} \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 + \frac{4C_1}{\pi} \sqrt{2+F_1^2} (F_1 - C_1 \eta_1 \sqrt{2+F_1^2}) \frac{r_0}{r} \cos \phi + (F_1 - C_1 \eta_1 \sqrt{2+F_1^2})^2 \dots\dots\dots (32)$$

となる。ここで  $\eta_1 = r_0/h_1$ ,  $C_1$  は流量係数,  $F_1$  は断面  $I$  におけるフルード数である。(32) 式を用いて計算された  $x=0$  の断面における流速分布と実測値とを比較して Fig. 14 に示すが, 底面近傍での不一致が著るしいのは  $u_m$  に関する仮定が十分現象を表わしていないためである。

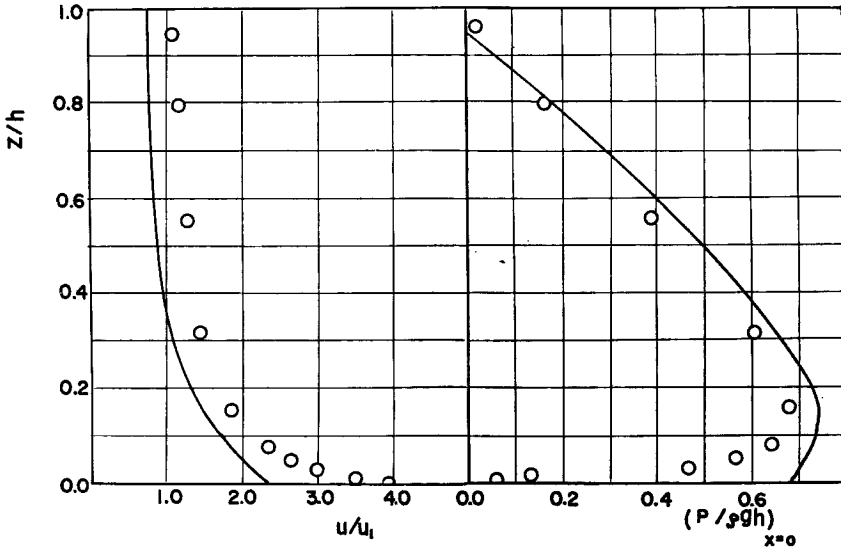


Fig. 14 Pressure and velocity distribution at section  $x=0$ .

2) 流出流量式 スリットからの流出流量  $dq$  の算定式として次式の表示を与える。

$$dq = 2C_1 r_0 \sqrt{2gH_1}$$

ここで  $H_1$  は断面  $I$  における比エネルギー,  $C_1$  は流量係数,  $2r_0$  はスリット幅である。いま, スリット中心線に関して対称な自由流出を考え, 断面  $I$  での水深が  $h_1$  に等しく, 比エネルギーを  $H_0$ , 流量係数を  $C_0$  とするとき, 平均流速は  $dq/2h_1$  で与えられるから, 流出流量は

$$dq_0 = 2C_0 r_0 \sqrt{2gH_0} = 2C_0 r_0 \sqrt{2gh_1 + (dq_0/2h_1)^2}$$

となる。流速の  $x$  方向成分  $u_m$  は流出量に関与しないから  $dq$  は  $dq_0$  に等しくなり, 結局流量係数に関する次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} dq &= 2C_1 r_0 \sqrt{2gH_1} \\ C_1 &= \frac{C_0}{\sqrt{(1-C_0\eta_1^2)\left(1+\frac{F_1^2}{2}\right)}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

ただし,  $F_1 \equiv u_1/\sqrt{gh_1}$  である。自由水面を有する対称流出の流量係数  $C_0$  の値をいかに選ぶべきかに問題があるが, ここでは二次元的なスリットからの自由流出に関する収縮係数の理論値  $\pi/(\pi+2)$  を用いて (33) 式の  $C_1$  を計算し, 実測値と比較した結果を Fig. 15 に示す。実測値は理論値よりやや大きくなるが, 最

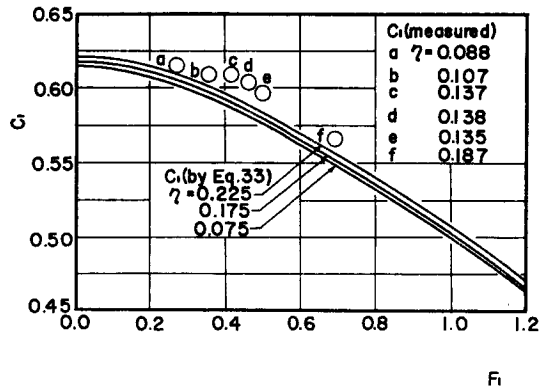


Fig. 15 Coefficient of discharge for the slot.

大推定誤差は3%であってほぼ満足すべき結果を与えることが示された。

3) 圧力分布 (29) 式および (30) 式を (25), (26) 式に代入すると次式がえられる。

$$\Omega/\rho = -(\Delta q/\pi)^2(1/2r^2) + (\Delta qu_m/\pi r) \cos \phi + g_1(\phi)$$

$$\Omega/\rho = (\Delta qu_m/\pi r) \cos \phi + g_2(r)$$

この両式が同時に成り立つためには、

$$\Omega/\rho = -(\Delta q/\pi)^2(1/2r^2) + (\Delta qu_m/\pi r) \cos \phi + (p_0/\rho)$$

とならねばならない。ここで  $p_0/\rho$  は積分定数である。この式から圧力分布に関する次式を得る。

$$p/\rho g = -r \sin(\phi - \theta) - (\Delta q/\pi)^2(1/2gr^2) + (\Delta qu_m/g\pi r) \cos \phi + (p_0/\rho g)$$

断面 I での比エネルギーが保存されると仮定して積分定数を定めると、 $P(r, \phi)$  での圧力は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho g} = & -r \sin(\phi - \theta) + r_0 \sin \theta - \frac{1}{2g} \left( \frac{\Delta q}{\pi} \right)^2 \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) \\ & + \frac{\Delta qu_m}{g\pi} \left( \frac{\cos \phi}{r} + \frac{1}{r_0} \right) + H_1 - \frac{1}{2g} \left( \frac{\Delta q}{\pi r_0} + u_m \right)^2 \dots \dots \dots (34) \end{aligned}$$

(33) 式および (34) 式を用いて計算されたスリット始端断面における圧力分布と実測値とを比較した一例を Fig. 14 に示す。流速分布と同様底面での適合性の低いことが認められる。

(2) 主流に関する一次元解析 1) 基礎方程式 Fig. 16 に示すようにスリットの上下流で流出の影響による流速分布のひずみや圧力の静水圧分布からのずれがほとんどない位置に断面 I および II を選び、両断面間に運動量式をたてると、

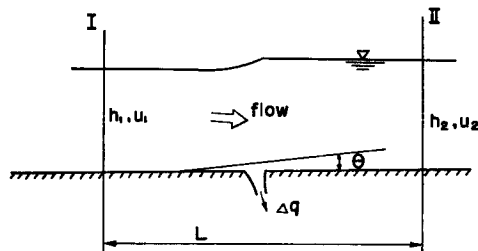


Fig. 16 Definition sketch for one dimensional analysis.

$$\rho h_2 u_2^2 - \rho h_1 u_1^2 = (\rho g h_1^2 / 2) - (\rho g h_2^2 / 2) + \rho g (h_1 + h_2) (L \sin \theta / 2) - \rho g \Delta M - \tau_b L \dots\dots\dots (35)$$

がえられる。ここで、 $h$ は水深、 $u$ は平均流速、 $L$ は両断面間の水路床に沿った距離、 $\tau_b L$ は両断面間で水路単位幅当りに作用する境界せん断力である。また  $\Delta M$  は水路単位幅当りの流出量のもつ比力であり、次式によって表わされる。

$$\Delta M = \frac{1}{\rho g} \left[ \int_0^\pi \rho r_0 v_r (-v_r \cos \phi + v_\phi \sin \phi) d\phi + \int_0^\pi r_0 p \cos \phi d\phi \right] \dots\dots\dots (36)$$

上式に流速分布を表わす (29), (30) 式および圧力分布に関する (34) 式を代入して計算すると次式が得られる。

$$\Delta M = (\Delta q u_m / g) - (\pi r_0^2 \sin^2 \theta / 2)$$

したがって運動量式は、

$$h_2 u_2^2 - h_1 u_1^2 = \frac{g h_1^2}{2} - \frac{g h_2^2}{2} + \frac{g (h_1 + h_2) L}{2} \sin \theta - \Delta q \cdot u_m + \frac{\pi g r_0^2 \sin^2 \theta}{2} - \frac{\tau_b L}{\rho} \dots\dots\dots (37)$$

となる。

2) 水深の変化 (37) 式の両辺に  $(2/g h_1^2)$  をかけて無次元化し、連続式  $u_1 h_1 = u_2 h_2 + \Delta q$  の関係を導入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \xi^3 - \left( \frac{\eta_1 L \sin \theta}{r_0} \right) \xi^2 - \left\{ 1 + 2F_1^2 + \left( \frac{\eta_1 L \sin \theta}{r_0} \right) - 4\varepsilon(F_1 - \varepsilon) + \pi \eta_1^2 \sin \theta \right\} \xi \\ + 2(F_1 - 2\varepsilon)^2 - \frac{2\eta_1 L \tau_b}{\rho g h_1 r_0} = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (38)$$

上式中、 $\xi = h_2/h_1$ ,  $\varepsilon = \sqrt{2 C_0 \eta_1 / \sqrt{1 - C_0^2 \eta_1^2}}$  である。(38) 式で  $\eta_1$  をパラメーターとして  $\xi$  と  $F_1$  との関係を求め、図示したのが Fig. 17 である。スリットからの流出流量と初期流量との比  $\kappa$  (流量配分比) は

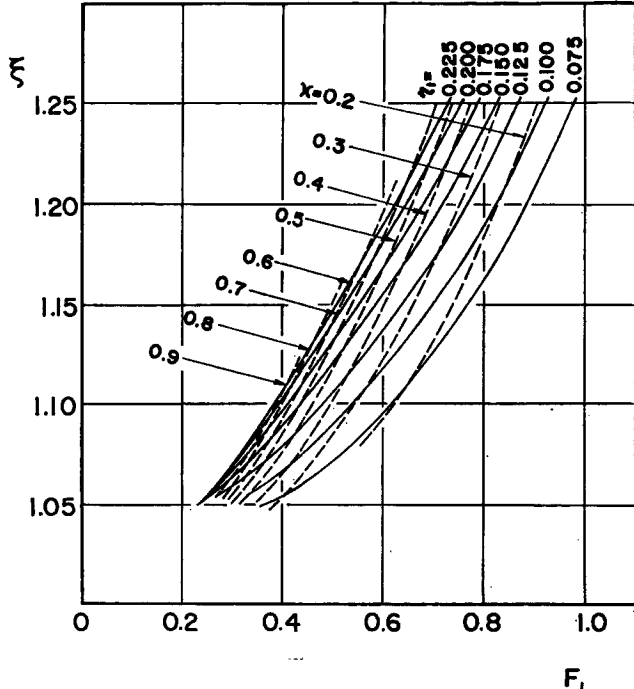


Fig. 17 Theoretical variation of relative tailwater depth with  $F_1$  and  $\eta_1$  (or  $\kappa$ ) in case of the tranquil flow.

$$\kappa = \frac{dq}{u_1 h_1} = \frac{2\sqrt{2}C_0\eta_1}{\sqrt{1-C_0^2\eta_1^2}} \cdot \frac{1}{F_1} = \frac{2\xi}{F_1} \dots\dots\dots(39)$$

となるから、 $\xi$ と $F_1$ の関係を表わす Fig. 17 はパラメーターとして $\eta_1$ の代りに $\kappa$ を用いて表示することができ、その結果は図中の破線で示すようになる。

一般に流量の減少は水路幅の急拡が流れに及ぼす効果と同様に論じられる。いま、開水路急拡部における取扱いと同じように、スリットからの流出のある流れについて、流出水による運動量損失および境界抵抗を無視し、また $\theta \approx 0$ とすれば(38)式は、

$$F_1^2 = \frac{\xi(\xi^2 - 1)}{2\{\xi - (1 - \kappa)^2\}} \dots\dots\dots(40)$$

となる。この式は開水路急拡部において境界抵抗を無視し、拡幅面に作用する圧力水頭が下流水深に等しいとした場合に導びかれる関係式で、水路拡大比 $\beta_* = B_2/B_1$ を $1/(1-\kappa)^2$ に置きかえたものに等しい。

Table 2 に $\xi$ の実測値、(38)式あるいは Fig. 17 で得られた値および(40)式で計算された値を比較のために示す。表中の値から(38)式は実測値と十分な適合度をもつことならびに流出による運動量損失が水深変化に及ぼす影響がかなり大きいことがわかる。

Table 2 Comparison of theoretical and experimental values of relative tailwater depth and energy head

Run	$h_1$ (cm)	$F_1$	$\eta_1$	$\kappa$	$\xi$			$H_2$ (cm)	
					measured	by Eq. (38)	by Eq. (40)	measured	by Eq. (41)
F-3	10.93	0.428	0.137	0.577	1.090	1.094	1.125	12.06	12.14
F-5	8.04	0.638	0.187	0.516	1.210	1.215	1.33	10.10	10.11
F-6	11.13	0.495	0.135	0.512	1.111	1.114	1.15	12.70	12.71
F-11	13.99	0.349	0.107	0.541	1.069	1.065	1.09	15.11	15.01
F-12	17.10	0.273	0.088	0.569	1.050	1.050	1.06	18.18	77.92
F-14	10.86	0.470	0.138	0.513	1.105	1.070	1.14	12.30	12.32
F-15	12.24	0.357	0.123	0.617	1.010	1.000	1.10	13.24	13.22

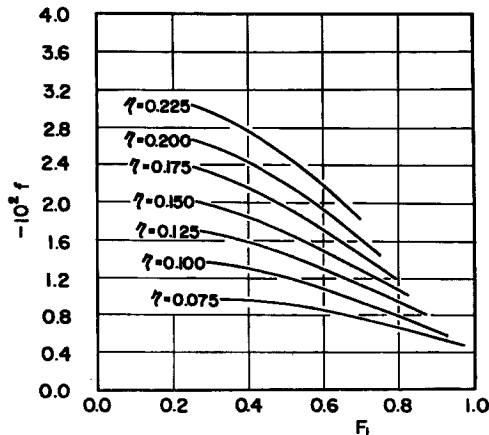


Fig. 18 Variation of relative energy loss with  $F_1$  and  $\eta_1$ .

3) 比エネルギーの変化 スリットの上流と下流との比エネルギーの差  $\Delta H$  の  $H_1$  に対する比を  $f$  で表わすと、

$$f \equiv \frac{\Delta H}{H_1} = \frac{H_1 - H_2}{H_1} = \left[ 1 + \frac{F_1^2}{2} - \xi \left\{ 1 + \frac{(F_1 - 2\xi)^2}{2\xi^3} \right\} \right] / \left( 1 + \frac{F_1^2}{2} \right) \dots\dots\dots(41)$$

となり、(38) 式で計算された  $\xi$  を用いて  $f$  を求めた結果は Fig. 18 に示される。下流断面 II での比エネルギー  $H_2$  の実測値と Fig. 18 から得られる  $f$  を用いて算出された  $H_2$  とを比較して Table 2 に示す。

## 6. あとがき

本報告では底部から流出のある場合の開水路流れの水理学的特性について理論的、実験的考察を行なった。これまでの考察によって明らかにされた事項を列挙すれば次のとおりである。

(1) 底部分水工の流量係数は流出断面での流れの平均フルード数と明確な相関関係を持ち、漸変流解析を行なう場合の流量変化の決定にこの関係を有効に利用することができる。

(2) 分土工上の水面形に特異点があられる場合、その性状は限界水深と水路幅の比によって決定される。

(3) 漸変流一次元解析で流出水の運動量またはエネルギーを無視した従来の解析法を検討した結果、エネルギー解析法による方が適合精度が高いことが認められる。

(4) 流量変化が大きい場合には、漸変流理論では十分満足に分土工上の流れを解析することはむずかしい。

(5) 分土工上流端近傍で常流から射流に急変する流れは、段落水流の現象と酷似しており、流線曲率やエネルギー分布の変化について注目すべき実験的事実が認められる。

(6) 常流状態で局所流出部を遷移する場合には、流出係数および流出部近傍の水理量は上流側の水理条件によって一義的に決定される。

今後、実際に分土工上にあらわれる常流から射流へ遷移する流れの急変流特性に関して詳細な実験的研究を行ない、分土工上の開水路流れに関する一貫した解析方法を確立したいと考えている。

最後に本研究を進めるに当り、御懇篤なる御教示を賜わった岩佐義朗教授に心から謝意を表するとともに、本研究は文部省科学研究費(試験研究)によるものであることを付記する。

## 参 考 文 献

- 1) 中川博次, 宇民 正: 横越流分水工の機能設計に関する研究, 京大防災研究所年報, 第9号, 昭.41. 3, p. 540
- 2) 岩佐義朗, 中川博次: 底部取水工を有する開水路流れの特性について, 第9回水理講演会講演集, 土木学会水理委員会, 昭.40. 2, pp. 31—36
- 3) Mostkow, M. A.: Sur le calcul des grilles de prise d'eau, La Houille Blanche, No. 4, Sept. 1957, p. 573
- 4) Rouse, H.: Discharge characteristics of the free overfall, Civil Engineering, Vol. 6, April, 1936
- 5) 岩崎敏夫: 段落水流の水理現象に関する実験的考察, 土木学会誌, 第38巻, 第6号, 昭.28. 6, p. 34
- 6) Boussinesq, J. V.: Essai sur la théorie des eaux courantes, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences, Paris, Vol. 23, Ser. 2, No. 1, 1877, pp. 1—680
- 7) Jaeger, C.: Commentaires et discussions, "Hauteur d'eau a l'extrémité d'un long déversoir" par Craya, A., La Houille Blanche Nov.-Déc., 1948, pp. 518—523
- 8) Iwasa, Y.: Basic studies of hydraulic essentials of open channel flows contributive to hydraulic design of channel structures, The doctoral dissertation for Kyoto University, Kyoto, June, 1959, pp. 250—254