

自由地下水の水面解析について

—明きよ排水の水理について(3)—

大 橋 行 三

A THEORETICAL STUDY ON TWO-DIMENSIONAL FLOW OF UNCONFINED GROUND WATER

—Unsteady flow of Ground Water into Ditch (3)—

By Gyōzō ŌHASHI

Synopsis

A two-dimensional approach to the unconfined groundwater flow from the mountain area or the river to the drainage channels in the alluvial fan is discussed here. The two-dimensional situation for the flow is based on the assumption that the basin may be divided into several basins of rectangular shape, each bounded with a drainage channel on two parallel sides, and that the ratio of both length and width to depth from a free surface to a sloping impervious base is so large that the vertical changes of the hydraulic characteristics of the seepage flow are negligible.

The fundamental equation has been developed for the unsteady flow, and some of the hydraulic significances of the parameters included in this equation have been discussed.

For the purpose of making clear the fundamental characteristics of the flow, a solution of the steady flow equation is first obtained with the technique of the numerical calculations, and the effects of seepage flow into a ditch are especially examined.

Secondly, to obtain the analytic solution of the steady flow equation, the following technique has been discussed by referring of the characteristics of the flow obtained with the above mentioned numerical calculations as follows: the seepage flow in the rectangular region may be divided into both longitudinal and lateral flows which mean the parallel and orthogonal flows to the drainage channel respectively, and both flows can be related with the recharge elements which are defined as the difference between inflow and outflow through the section in unity width at any point in the longitudinal flow.

Finally, the results obtained in this analytic method have been tested against the numerical results.

まえがき

河川、湖沼における水位の人工調節計画の立案に際し、これにともなう周辺地域の広域にわたる地下水変動を予知する問題は非常に重要である。現在、こういった地域の地下水に関する事前調査は、一般によく実施され、かなりの貴重な資料が収集されている。しかしながら、広域地下水変動に関する解析理論は、水文

学の他の研究に比べ、その体系的手法が貧弱なため、資料を有効に活用し、高精度の予測をうる段階に至っていない。かかることから、複雑な自然条件下の広域にわたる地下水挙動を、どのようなスケールで、どのようなモデルに簡略化し、如何に流動特性を把握するかといった基本的な理論の究明が必要である。

本研究は、こういった問題のうち、自由地下水の平面的挙動、とくに、大河川など、領域の周囲における境界値を与える要素以外に、領域内に散在する排水河川を境界値にとる2次元的な流れを検討しようとするもので、まず、基礎方程式の一般形を提示した後、定常状態の場合の数値解を求め、研究の問題点を指摘する。つぎに、地下水におよぼす排水河川の効果、すなわち、「しぼり出し効果」の検討を主眼とする近似解法を提示し、その理論的根拠を明らかにするとともに、若干の考察を加える。

1. 基礎式

地下水の平面的な挙動に関する研究は、井戸の場合には、Mahdi S. Hantush¹⁾ など示唆に富む研究があるが、縦横に拡がりをもつ領域におけるそれについては、現在のところ必ずしも十分な研究がなされているとはいえない。そこで、まずここでは、それらの一般式について考察する。

1. 1. 基礎式の誘導

Fig. 1 のように、任意形状の不透水層をもつ帯水層内の流れについて、次のような運動の式 (Darcy 則) および連続の式が成立する。

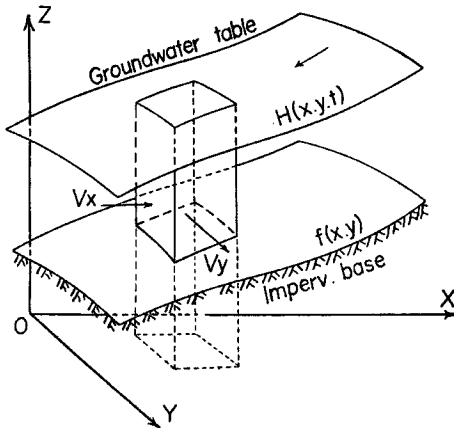


Fig. 1 Schematic representation of three dimensional flow.

$$v_i = -K \cdot \partial\phi / \partial l \dots\dots\dots(1)$$

$$v_i = \epsilon \cdot dl / dt \dots\dots\dots(2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y + \frac{\partial}{\partial z} v_z = -S_s \frac{\partial \phi}{\partial t} \dots\dots\dots(3)$$

$$\phi = p/\gamma + z + C$$

ここに、 v_x, v_y, v_z : 座標軸方向の見かけ流速 [LT^{-1}],
 S_s : 帯水層の貯留率 (単位水頭の昇降によって帯水層が膨張、圧縮されて排除される量 [L^{-1}], ϵ : 有効間隙率, K : 透水係数 [LT^{-1}], p/γ : (x, y, z) 点の圧力水頭, $z + C$: 位置水頭, $\phi = \phi(x, y, z, t)$: 水頭

(3) 式を z に関して $f(x, y)$ から $H(x, y, z)$ まで積分し、積分記号下の微分法にしたがって書き換え、さらに、 $z = f(x, y)$, $z = H(x, y, z)$ 面上の水分子の微分表示に (2) 式を考慮して演算すれば次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_f^H v_x dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_f^H v_y dz = -\epsilon \frac{\partial H}{\partial t} - S_s \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_f^H \phi dz - \phi(x, y, H, t) \frac{\partial H}{\partial t} \right] \dots\dots\dots(4)$$

(1) 式を用い上式をさらに積分記号下の微分法によって書き換えれば次式となる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_f^H \phi dz - \phi_H \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + \phi_f \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial y} \int_f^H \phi dz - \phi_H \cdot \frac{\partial H}{\partial y} + \phi_f \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right] = \frac{\epsilon}{K} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{S_s}{K} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_f^H \phi dz - \phi_H \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \right] \dots\dots\dots(5)$$

ここに、 $\phi_H = \phi(x, y, H, t)$, $\phi_f = \phi(x, y, f, t)$

いま、帯水層全貫入の観測井の水位 $\bar{\phi}$ を次式で表示する。

$$\bar{\phi}(x, y, t) = \frac{1}{D} \int_f^H \phi(x, y, z, t) dz \dots\dots\dots(6)$$

また、Fig. 2 に示すように、 D , ϕ_H , ϕ_f , $\bar{\phi}$ を次式で示す。

$$D(x, y, t) = H(x, y, t) - f(x, y) \dots\dots\dots(7)$$

$$\bar{\phi}(x, y, t) = \bar{D}(x, y, t) + f(x, y) + C \dots\dots\dots(8)$$

$$\begin{aligned} \phi_H(x, y, H, t) &= H(x, y, t) + C \\ &= D(x, y, t) \\ &\quad + f(x, y) + C \dots\dots(9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_f(x, y, f, t) &= D_b(x, y, t) \\ &\quad + f(x, y) + C \dots\dots(10) \end{aligned}$$

ここに、 \bar{D} ：観測井の水深（帯水層全貫入） D_b ：帯水層底に開いたピエゾメータの水深。

（6～10）式の関係（5）式に代入、 D 、 \bar{D} 、 D_b によって表示すると次式をうる。

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D\bar{D} - \frac{D^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_b \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(D\bar{D} - \frac{D^2}{2} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_b \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\epsilon}{KD} \frac{\partial}{\partial t} \left[D(D - \bar{D}) \right] + \left[\frac{S_s + \epsilon}{KD} \right] \frac{\partial}{\partial t} \left(D\bar{D} - \frac{D^2}{2} \right) \dots\dots\dots(11) \end{aligned}$$

上式が自由地下水流れの最も一般的な基礎方程式である。

1. 2. 一様傾斜不透層をもつ流れ

一様傾向の不透層を $f(x, y) = \alpha x$ とおくと、 $\partial f / \partial x = \alpha$ 、 $\partial f / \partial y = 0$ であるから（11）式は次式となる。

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D\bar{D} - \frac{D^2}{2} \right) + \alpha \frac{\partial D_b}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(D\bar{D} - \frac{D^2}{2} \right) = \frac{\epsilon}{KD} \frac{\partial}{\partial t} \left[D(D - \bar{D}) \right] \\ &\quad + \left[\frac{S_s + \epsilon}{KD} \right] \frac{\partial}{\partial t} \left(D\bar{D} - \frac{D^2}{2} \right) \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

とくに、定常流の基礎式は次式となる。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D\bar{D} - \frac{D^2}{2} \right) + \alpha \frac{\partial D_b}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(D\bar{D} - \frac{D^2}{2} \right) = 0 \dots\dots\dots(13)$$

井戸への流れの場合には、それが $\alpha < 0.2$ 、 $(D_0 - h_w) / D_0 < 0.5$ の条件を満足する限り、 D 、 $D_b = \bar{D}$ と考えて大きな誤差は生起しないとされている。ここに、 D_0 ：揚水しない元の流れの水位、 h_w ：最大揚水時の水深、

一般に、排水路への流れは井戸への流れに比べ水面変化が緩く、帯水層厚さに対しても水位変化高は小さい。したがって、 D 、 $D_b = \bar{D}$ とすると（13）式は次のようになる。

$$\frac{\partial^2 \bar{D}^2}{\partial x^2} + \left[\frac{2}{2\bar{D}} \right] \frac{\partial \bar{D}^2}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{D}^2}{\partial y^2} = 0$$

さらに、非線型項の [] をある定数に置き換え、線型化すれば次の方程式となる。

$$\frac{\partial^2 \bar{D}^2}{\partial x^2} + \frac{2}{\beta} \frac{\partial \bar{D}^2}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{D}^2}{\partial y^2} = 0 \dots\dots\dots(14)$$

ここに、 $\beta = 2\bar{D} / \alpha$

一方、同様な領域について、Dupuit-Forchheimer の仮定に基づく平行流れの式、

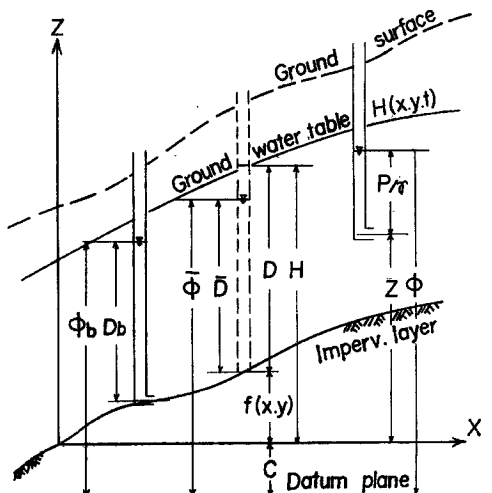


Fig. 2 Schematic representation of the heights of the ground water in observed well.

$q_w = -Kh(\alpha + \partial h/\partial x)$, $q_y = -Kh(\partial h/\partial x)$ を用い, 連続の式, $\partial q_x/\partial x + \partial q_y/\partial y = 0$ から導かれる次式は, 上記 (14) 式と同型であることがわかる。

$$\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + \frac{2}{\beta_1} \frac{\partial h^2}{\partial x} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2} = 0 \dots\dots\dots(15)$$

ここに, $h = h(x, y)$, $\beta_1 \equiv (2h/\alpha)$

(14) 式と (15) 式の差異は \bar{D} と h との差異である。結局, 水位こう配の急な領域においては, $\bar{D} < h$ であるが, 緩い領域では両者には大差ないと考えられるから, 排水路への流れを対象とする本研究は, (14), (15) 式は同一とする。なお, β , β_1 の中に含まれる水位定数 D , h はいずれも, Weighed mean depth とする。

以上, (11) 式に, 任意形状帯水層内の 2 次元非定常流, (12) 式に一樣傾斜不透層上の同様な流れの方程式を示した。これらの式は非線型である点など, 容易に解は得られないとしても, 数値解析による検討を行なう際有用である。(14) 式の 2 次元定常流に関しては, 以下において論及する。

2. 2 次元定常流の数値解析による検討

(14) 式は広域地下水の基本的挙動を表わす式として重要である。ここに, 甲府盆地の一流域を事例として, 2 次元定常流モデルの数値解析による検討を行なう。採用したモデルは実流域の特性を備える上流, 下流および排水路の水位を境界値にとる流れであって, ここではとくに排水路の存在が, 地下水流れにどのような影響を与えるかを究明する。

2. 1. 基本式

Fig. 3 に示すような, 上流 (BD), 下流 (AC) の境界と排水河川 (CE) をもつ流域の一部分をとり出し, 現象の基本的モデル領域とする。このとき上流境界の水位は, 十分な供給水によって, 常に一定に保たれているものとする。また, $AB \parallel CE$ ($y = -l$ にも対称な排水路がある), $AC \parallel BD$, 帯水層底は一樣傾斜の不透水層, 排水路の水位は x の関数表示が可能であるとする。

このような領域の流れの方程式は (14) 式である。(14) 式において $\bar{D} \equiv F$, $2/\beta \equiv a$ とおけば

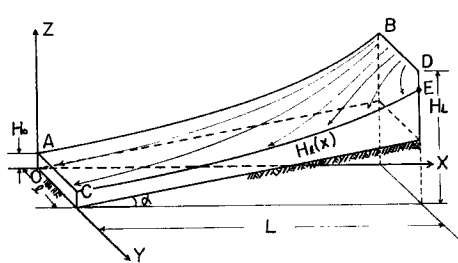


Fig. 3 Schematic diagram of two-dimensional flow.

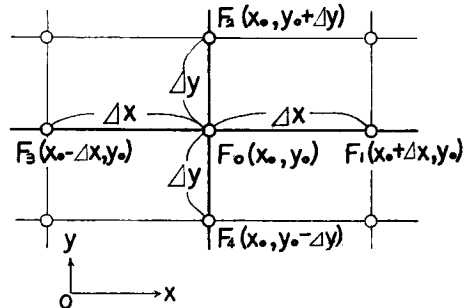


Fig. 4 Schematic representation of lattice points.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + a \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

上式を緩和法によって解くことを考えてみる。 $F = F(x, y)$ の各微係数を, Taylor 展開により近似し, Fig. 4 の記号を用いて演算基本式を示せば次式となる。

$$F_0 = \frac{F_1 + F_3 + n^2(F_2 + F_4)}{2(1+n^2)} + \frac{an\Delta y(F_1 - F_3)}{4(1+n^2)} \dots\dots\dots(16)$$

ここに, $\Delta x = n \cdot \Delta y$ とする。

2. 2. 計算領域と境界条件

(16) 式を用いる数値解析は、不規則形状の領域に対して有効であるが、ここでは、Fig. 5 に示すような、甲府盆地の中央部に位置する単一のモデル領域を対象とした。したがって、笛吹川、釜無川、荒川に囲まれた地域に散在する多数の排水河川が平行に流下するものとして単純化し、長方形領域（幅 1km, 長さ 5.1km）を考えた。また、格子間かくは x 方向、150m, y 方向 50m にとった（格子点数 340 点）次に帯水層、地下水位の性状は Fig. 5 の断面をモデルに採用し、実測資料¹⁰⁾ にもとづいて不透水層傾斜度 α , 上, 下流水位 H_L, H_0 を決定した。以下にその値を示す。

$$\alpha = 1.333 \times 10^{-3} \quad (x=0, \text{ E.L. } 239\text{m}, \quad x=6000\text{m}, \text{ E.L. } 247\text{m})$$

$$(A) : H_0 = 7.0\text{m}, \quad H_L = 15.3\text{m}$$

$$(B) : H_0 = 5.0\text{m}, \quad H_L = 15.17\text{m}$$

ここに、(A) は現況近似、(B) は下流端降下の場合の水位である。また、残された排水河川の水位による境界値は以下の検討にもとづいて与える。なお、 $\alpha = 1.067 \times 10^{-4}$ を与えた。

2. 3. 排水路の特性

x 方向の境界条件となる排水河川の水位は流域の地下水流れに關与する重要な要素である。したがって、実流域における排水河川水位の実態形状をモデルの境界値として評価するとき、どの程度単純化して用いるかは一つの問題点である。Fig. 5 の当該地域には、多数の中小排水河川が存在している。これらの排水河川の縦断形状は概略、Fig. 6 のようである。ただし、距り x は、河口よりの距りではなく、排水河川が笛吹川に対し平行でなくなる点を原点ととり、かつ平面的の屈曲も、ある程度直線表示することにより若干、修正してある。なお、この部分の排水河川を以下では排水路と呼ぶ。

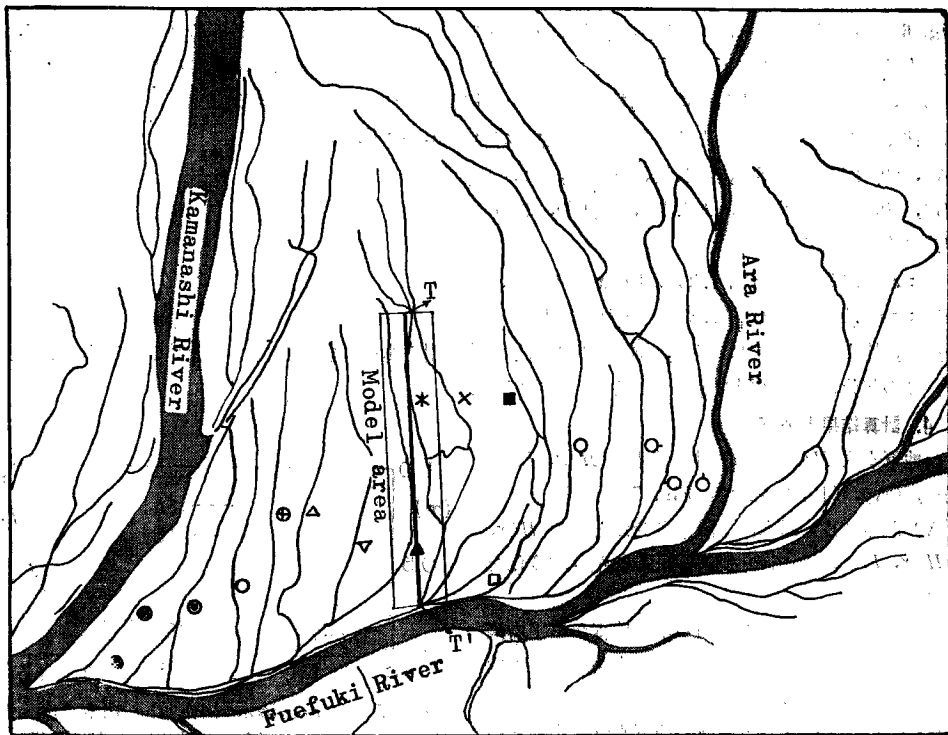


Fig. 5. Geographical map of the Kōfu Basin and location of the model area,

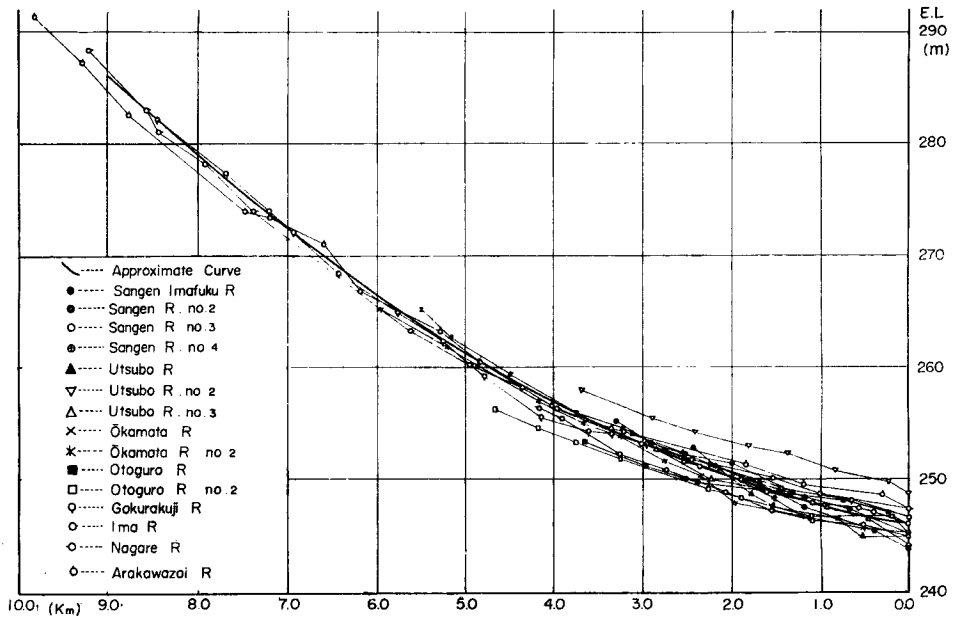


Fig. 6 Distribution diagram of the longitudinal section curves of ditches in the Kōfu Basin.

Fig. 6 より排水路の特性をみると、下流部の標高にはかなりのばらつきはあるが全般的傾向として、指数曲線あるいは2次曲線に近い性状を示している。これらはほとんどが湧水帯領域内の水路であることを考慮すると、この性状は湧水帯の地形的特性と何等かの相関をもつように思われる。

曲線決定のため以下の値をとる。計算諸点 (x, z) x : m, z : E.L. (m)

(A), (0, 246), (2,500, 251.5), (9,000, 286)

(B), (0, 244), (6,000, 266.45), (9,000, 286)

曲線式は次式となる。

$$(A) : z = 3.453 \times 10^{-7}x^2 + 1.337 \times 10^{-3}x + 246$$

$$(B) : z = 3.083 \times 10^{-7}x^2 + 1.892 \times 10^{-3}x + 244$$

一般に、排水路の水位は、当然、排水河川を通して笛吹川の水位の影響を受けるはずであるが、ここではまず、この部分の流れは擬似等流であると仮定しておく。

2. 4. 計算結果と考察

最高地下水位 $H(x, 0)$ と排水路水位 $H(x, l)$ との差を、(A), (B)について、Fig. 7 に示す。

(A) から (B) に水位を降下させたときの $H(x, 0)$, $H(x, l)$ についての水位降下量の距り的变化を Fig. 8 に示す。

また Darcy 則を用い x 方向の水位曲線から平均流下浸透量を求め、その差分によって排水路への流出量を計算した結果を Fig. 9 に示す。

計算結果にもとづき、実流域の地下水位変化を考察すれば以下のようなものである。

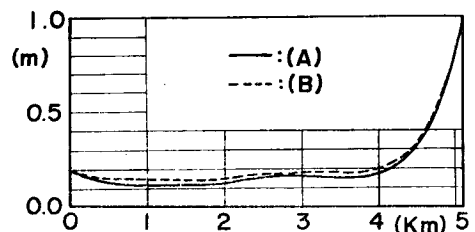


Fig. 7 Comparison with the differences between Max. height of G.W.T. and Hight of W.T. in ditch.

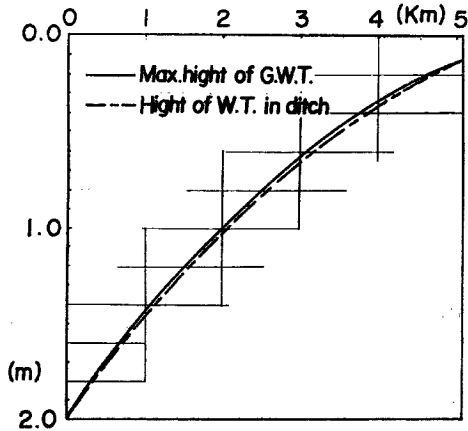


Fig. 8 Profile of the drawdowns of ground water head and water head in ditch.

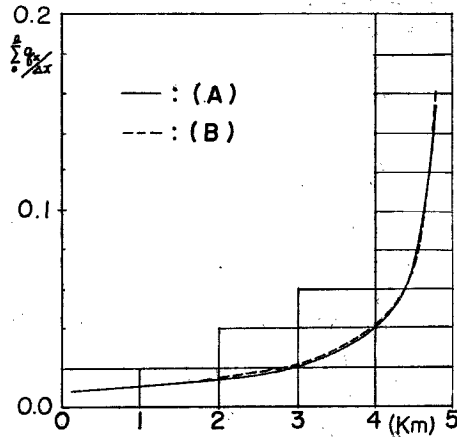


Fig. 9 Distribution diagram of discharge rate.

$H(x, 0)$ の変化量は、Fig. 7 に明らかなように、 $H(x, l)$ の変量とはほぼ同程度である。したがって、この地区の地下水位に対しては、排水路水位が非常に大きく関与しているといえる。

水位降下量の距的割合は水路水位の曲線形状に左右されるが、減少傾度が上流に向かって小さくなり、(Fig. 8)、 $H(x, 0)$ の傾向は、 $H(x, l)$ に酷似している。

Fig. 9 は排水路への浸透量の場所的分布である。その形状は指数曲線、ないし、2次曲線に近い。これらの分布形状は、排水路への浸透量の解析に大きな示唆を与える。

以上をまとめれば、排水路の存在によって、領域内の地下水は、上流より下流へ向う1次元的流れから、水位、流量ともに水路水位の境界値の影響を受ける平面的流れへと変化する。これら平面流において、排水路境界はむしろ下流境界より大きな支配要素であるといえる。

3. 2次元定常流の近似解法

(14) 式の近似解析解を、以下に提示する解法によって求め、「しぼり出し効果」の関数表示による検討を試みる。

3.1. 基本概念

一樣傾斜不透層上の一般的な2次元流れは、前述したように次式で示される。

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{2}{\beta} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

ここに、 $F \equiv \bar{D}^2$ この流れを、上流より下流へ向う Longitudinal Flow (X-Flow) とこれに垂直な Lateral Flow (Y-Flow) との2つの流れに分ける。すなわち、次の2式を考える。

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{2}{\beta} \frac{\partial F}{\partial x} + \xi_x(x, y) = 0 \dots\dots\dots(17)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \xi_y(x, y) = 0 \dots\dots\dots(18)$$

ここに、 $\xi(x, y)$ を Recharge factor と呼び、(17)、(18) 両式を関連づける関数であると考え。つまり、(17) 式の X-Flow は負の Recharge ξ_x を受ける1次元流れ、(18) 式の Y-Flow は正の Recharge ξ_y を受ける1次元流れと等価であると仮定する。したがって、当初、 $\xi(x, y)$ は既知として、(17)、(18) 式の独自の解を求め、その解に依る式からさらに $\xi(x, y)$ を求める関数型を導く。結局、 $\xi(x, y)$ に関する積微分方程式が導かれ、その解により $\xi(x, y)$ を決定する。

3. 2. 基本式の誘導

定常流の基礎式は(4)式から、

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_J^H v_x dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_J^H v_y dz = 0 \dots\dots\dots (19)$$

となる。いま、

$$\int_J^H v_x dz = q_x(x, y), \quad \int_J^H v_y dz = q_y(x, y) \dots\dots\dots (20)$$

とおき、(19)式を(20)式によって書き換え、 y に関して、 $l_{j-\frac{1}{2}}$ から $l_{j+\frac{1}{2}}$ まで積分する。さらに、積分記号下の微分法により次式をうる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_J q_x dy - q_x(x, l_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\partial l_{j+\frac{1}{2}}}{\partial x} + q_x(x, l_{j-\frac{1}{2}}) \frac{\partial l_{j-\frac{1}{2}}}{\partial x} + q_y(x, l_j) \Big|_{j=0} = 0 \dots\dots\dots (21)$$

ここに、 $\int_J = \int_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}$ つぎに、D-F式によって、 q_x, q_y を近似する。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} q_x &= -Kh \left(\alpha + \frac{\partial h}{\partial x} \right) = -K \left\{ h\alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (h^2) \right\} \\ q_y &= -Kh \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right) = -K \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (h^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

ここに、 $h \equiv h(x, y)$ 、上式を(21)式に代入し、線型化すれば次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_J F dy + \frac{1}{\beta_2} \frac{\partial}{\partial x} \int_J F dy - 2 \left\{ \frac{F}{\beta_2} + \frac{\partial F}{\partial x} \right\} \Big|_{j+\frac{1}{2}} \frac{\partial l_{j+\frac{1}{2}}}{\partial x} + 2 \left\{ \frac{F}{\beta_2} + \frac{\partial F}{\partial x} \right\} \Big|_{j-\frac{1}{2}} \frac{\partial l_{j-\frac{1}{2}}}{\partial x} \\ + \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{j-\frac{1}{2}} = 0 \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

ここに、 $F(x, y) \equiv h^2(x, y)$ 、 $\beta_2 \equiv h/\alpha$

上式がX-Flowの一般式である。つぎに、(20)式によって書きかえた(19)式を、 x に関して $L_{i-\frac{1}{2}}$ から $L_{i+\frac{1}{2}}$ まで積分し、X-Flowと同様な演算を行ない次式をうる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_i F dx - 2 \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{i+\frac{1}{2}} \frac{\partial L_{i+\frac{1}{2}}}{\partial y} + 2 \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{i-\frac{1}{2}} \frac{\partial L_{i-\frac{1}{2}}}{\partial y} + \left(\frac{F}{\beta_2} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) \Big|_{i-\frac{1}{2}} \\ - \left(\frac{F}{\beta_2} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) \Big|_{i+\frac{1}{2}} = 0 \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

上式がY-Flowの一般式である。

いま、一般式は求まったが、 $\int_J F dy, \int_i F dx$ の関係が明らかでない。そこで、次式の諸条件をもつ長方形領域(Fig. 3)に関する検討をすすめる。

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq x \leq L, \quad -l \leq y \leq l, \quad h(x, l) = h(x, -l) = H_l(x) \\ h(0, y) = H_0, \quad h(L, y) = H_L, \quad H_l(0) = H_0, \quad H_l(L) = H_L \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

この領域境界は平行であるから、 $\partial l_j / \partial x = 0, \partial L_i / \partial y = 0$ したがって、(23)、(24)式は次式となる。

$$[X\text{-Flow}] : \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_J F dy + \frac{1}{\beta_2} \frac{\partial}{\partial x} \int_J F dy + \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{j-\frac{1}{2}} = 0 \dots\dots\dots (26)$$

$$[Y\text{-Flow}] : \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_i F dx + \left(\frac{1}{\beta_2} F + \frac{\partial F}{\partial x} \right) \Big|_{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{\beta_2} F + \frac{\partial F}{\partial x} \right) \Big|_{i-\frac{1}{2}} = 0 \dots\dots\dots (27)$$

いま、 x 方向 ΔL 、 y 方向 Δl の単位角柱について、平均値表示の関係式を考えるため、

$$[X\text{-Flow}] : \bar{F}_j = \frac{1}{\Delta l} \int_J F dy \dots\dots\dots (28)$$

$$[Y\text{-Flow}] : \bar{F}_i = \frac{1}{\Delta L} \int_i F dx \dots\dots\dots (29)$$

とおき、(28)式を x に関して $L_{i-\frac{1}{2}}$ から $L_{i+\frac{1}{2}}$ まで積分すると次式が得られる。

$$\frac{1}{4L} \int_i \bar{F}_j dx = \frac{1}{4L} \int_j \bar{F}_i dy$$

$$\therefore \bar{F}_j = \frac{4L}{4L} \int_j \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial x} dy \dots\dots\dots(30)$$

ここで、(26) 式を (28) 式の \bar{F}_j によって表わすと

$$4L \frac{\partial^2 \bar{F}_j}{\partial x^2} + \frac{4L}{\beta_2} \frac{\partial \bar{F}_j}{\partial x} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{j-\frac{1}{2}} \right\} = 0 \dots\dots\dots(31)$$

となるが、さらにこの式の第 3, 4 項を \bar{F}_j , または \bar{F}_i によって表示する必要がある。(28), (30) 式から次式の関係が求まる,

$$\frac{\partial F}{\partial y} \Big|_j = 4L \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{F}_j}{\partial y} \right) \Big|_j = 4L \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{F}_i}{\partial x} \right) \Big|_j = 4L \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{F}_i}{\partial y} \right) \Big|_j \dots\dots\dots(32)$$

ただし、上式において、 \bar{F}_i に関する、 x, y の微分は交換可能であるという条件が含まれている。結局、 $\partial \bar{F}_j / \partial y \Big|_j$ は $\partial \bar{F}_i / \partial y \Big|_j$ によって、また、 $\partial \bar{F}_i / \partial y \Big|_j$ は (27) 式によって評価できるはずである。

いま、これらの関係を導く前に、(27) 式を以下に述べる Recharge factor によって表示する。

(27) 式を (29) 式によって書き換えれば、

$$4L \frac{\partial^2 \bar{F}_i}{\partial y^2} + \left\{ \left(\frac{1}{\beta_2} F + \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{\beta_2} F + \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}} \right\} = 0 \dots\dots\dots(33)$$

となる。ここで、 $F(i, j)$ 点の x 方向の単位幅流量 q_{xj} [$L^2 T^{-1}$] は次の関係から求まる、

$$q_{xj} = -K 4L \left\{ \frac{1}{\beta_2} F + \frac{\partial F}{\partial x} \right\}_{i,j} \dots\dots\dots(34)$$

つぎに、Recharge element r_{yi} [$L^2 T^{-1}$] を次式で定義する、

$$r_{yi} \equiv \frac{q_{xi+\frac{1}{2},j} - q_{xi-\frac{1}{2},j}}{4L} = \frac{\partial q_{xj}}{\partial x} \dots\dots\dots(35)$$

さらに、Recharge depth R_{yi} [L] を次式で定義する。

$$R_{yi} = r_{yi} / K = \partial q_{xj} / K \partial x = R_{yi}(i, y) \dots\dots\dots(36)$$

したがって (34~36) 式によって (33) 式を書き換えると、

$$\frac{\partial^2 \bar{F}_i}{\partial y^2} - \frac{1}{4L} \left\{ \frac{q_{xi+\frac{1}{2},j} - q_{xi-\frac{1}{2},j}}{4L \cdot K} \right\} = \frac{\partial^2 \bar{F}_i}{\partial y^2} - \frac{1}{4L} R_{yi} = 0 \dots\dots\dots(37)$$

が得られる。上式を y に関して $l_{j-\frac{1}{2}}$ から $l_{j+\frac{1}{2}}$ まで積分し、 $\partial \bar{F}_i / \partial y$ を求めて (32) 式に代入すれば次式の関係を得る。

$$\frac{\partial F}{\partial y} \Big|_j = 4L \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{F}_i}{\partial y} \right) \Big|_j = 4L \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{4L} \int_j R_{yi} dy \right\} \Big|_j \dots\dots\dots(38)$$

一方、(31) 式の第 3, 4 項を書き換えて次式とする。

$$\frac{1}{4L} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{j-\frac{1}{2}} \right\} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_j \right\} = R_{xj}(x, y) \dots\dots\dots(39)$$

ここに、 R_{xj} [L] を x の Recharge factor と定義し、(38) 式を用いて、 R_{yi} , r_{yi} との関係が次式のように関連づけられる。

$$R_{xj} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_j \right\} = \frac{4L}{4L} \frac{\partial}{\partial x} (R_{yi}) \Big|_j = \frac{4L}{4L} \frac{1}{K} \frac{\partial^2 q_{xj}}{\partial x^2} \dots\dots\dots(40)$$

したがって、(26), (27) 式は、 \bar{F}_j , R_{xj} , \bar{F}_i , R_{yi} などによって書き換えられて次式となる。

$$\frac{\partial^2 \bar{F}_j}{\partial x^2} + \frac{1}{\beta_2} \frac{\partial \bar{F}_j}{\partial x} + R_{xj} = 0 \dots\dots\dots(41)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{F}_i}{\partial y^2} - \frac{1}{4L} R_{yi} = 0 \dots\dots\dots(42)$$

これら両式が近似解法の基本式であって、(26), (27) 式の F がそれぞれ、平均値表示した \bar{F}_j , \bar{F}_i によ

って評価され、両者の変換は (30) 式によって関係づけられた。さらに、 ξ_u 、 ξ_v の関係は (40) 式によって関連づけられたことになり、先に、(14) 式を概念的に (17)、(18) 式の型に分離して解こうとした考え方の妥当性が実証されたといえる。

さて、(41)、(42) 式から出発して、 $R(x, y)$ を決定する演算を行なうのであるが、ここで、Recharge factor と「しぼり出し効果」との関連に主眼を置いて検討する場合には、平均値評価をさらに簡略化する。すなわち、Fig. 3 に示す X-Flow の全断面平均水位を考慮する方法に依存しても、十分な検討が得られるものと考えられる。

3. 3. 準2次元解法 (l 幅平均流れ)

基本式は (26) 式の積分範囲が 0 から l までに変更され、(27) 式は同一である。平均値表示も次式に変わる。

$$[X\text{-Flow}] \quad \bar{F} = \frac{1}{l} \int_0^l F dy \dots\dots\dots(43)$$

$$\bar{F} = \frac{dL}{l} \int_0^l \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial x} dy \dots\dots\dots(44)$$

また、領域対称軸の条件から $\partial F / \partial y|_0 = 0$ となり、(26) 式は次式となる。

$$l \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial x^2} + \frac{l}{\beta_2} \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_l = 0 \dots\dots\dots(45)$$

上式の第3項は (43)、(44) 式より

$$\frac{1}{l} \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_l = \frac{dL}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial x} \right\} \Big|_l = \frac{dL}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial y} \right\} \Big|_l \dots\dots\dots(46)$$

をうる。 $\partial \bar{F}_i / \partial y|_l$ の評価は前と同様に、(33~37) 式の関係を用い、(37) 式を y に関して 0 から l まで積分して求める。したがって次式をうる。

$$\frac{1}{l} \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_l = \frac{dL}{dL} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{l} \int_0^l R_{yi} dy \right\} \Big|_l = \bar{R}_x \dots\dots\dots(47)$$

ここに、 \bar{R}_x : x の断面平均 Recharge factor. R_{yi} との関係は次式となる。

$$\bar{R}_x = \frac{dL}{dL} \frac{1}{Kl} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^l \frac{\partial q_{xj}}{\partial x} dy \dots\dots\dots(48)$$

結局、基本式は X-Flow が次式のように変更され、Y-Flow は (42) 式と同一である。

$$\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial x^2} + \frac{1}{\beta_2} \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} + \bar{R}_x = 0 \dots\dots\dots(49)$$

[X-Flow の解]

境界条件 $h(0) = H_0$ 、 $h(L) = H_L$ を満たす (49) 式の解は次式をうる。

$$\bar{F}(x) = \bar{F} = H_0^2 + \{ (H_L^2 - H_0^2) - I[P_x]_0^L \} f(\beta x) + I[P_x]_0^2 \dots\dots\dots(50)$$

ここに、

$$I[P_x] \equiv \int \left\{ \int e^{\frac{x}{\beta_2}} \cdot p_x dx \right\} e^{-\frac{x}{\beta_2}} dx, \quad f(\beta x) \equiv \frac{(1 - e^{-\frac{x}{\beta_2}})}{(1 - e^{-\frac{L}{\beta_2}})}$$

$$p_x = \bar{R}_x$$

[Y-Flow の解]

境界条件、 $\partial h(i, 0) / \partial y = 0$ 、 $h(i, l) = H_i(x)$ を満たす (42) 式の解は次式をうる。

$$\bar{F}_i(i, y) = \bar{F}_i = H_i(x)^2 + \frac{1}{dL} I[I(p_v)]_0^y \dots\dots\dots(51)$$

ここに、

$$I[I(p_v)]_0^y \equiv \int_0^y \int_0^y p_v dy dy, \quad p_v(i, y) \equiv R_{yi}$$

最後に、(50), (51) 式に示される \bar{F} , \bar{F}_i から、 p_a , p_v を決定するための方程式を導く。

まず、 \bar{F} を用いて、 $x=x_i$ 点の X-Flow の全幅流量 \bar{q}_a を求める。

$$\bar{q}_a = Kl \left\{ \frac{1}{\beta_2} \bar{F} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \right\} \dots\dots\dots (52)$$

さらに $\partial \bar{q}_a / \partial x$ を求めると

$$\begin{aligned} \frac{1}{Kl} \frac{\partial \bar{q}_a}{\partial x} = & \left[\left\{ (HL^2 - H_0^2) - I[P_a]_0^i \right\} \left\{ \frac{1}{\beta_2} f'(\beta x) + f''(\beta x) \right\} \right. \\ & \left. + \left\{ \frac{1}{\beta_2} I'[P_a]_0^a + I''[P_a]_0^a \right\} \right] \dots\dots\dots (53) \end{aligned}$$

を得る。ここに、prime は $\partial/\partial x$ を示す。

つぎに、(44) 式の関係から (51) 式の \bar{F}_i にもとづく x 方向全幅平均水位 (\bar{F}) を求める。

$$(\bar{F}) = \frac{\Delta L}{l} \int_0^l \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial x} dy = \frac{\Delta L}{l} \left[\int_0^l \{H_i(x)^2\} dy + \frac{1}{\Delta l} \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} I[I(p_v)_0^i] dy \right]$$

上式を用い、(52) 式と同様にして x_i 点の全幅流量 (\bar{q}_a) を求め、さらに $\partial(\bar{q}_a)/\partial x$ を計算すれば次式をうる。

$$\frac{1}{Kl} \frac{\partial(\bar{q}_a)}{\partial x} = \left[\Delta L \left\{ \frac{1}{\beta_2} \{H_i(x)^2\}'' + \{H_i(x)^2\}''' \right\} + \frac{\Delta L}{l \Delta l} \left\{ \frac{1}{\beta_2} I''[G_F] + I'''[G_F] \right\} \right] \dots (54)$$

ここに、

$$I''[G_F] \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^l G_F(x, y) dy \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^l I[I(p_v)_0^i] dy$$

結局、(53), (54) 式は (36), (48) 式の関係から $\partial q_a / \partial x$ の未知関数を含む式であることがわかる。いま、(53), (54) 式の左辺は $y=l$ における R_{y_i} の値と等価である。したがって、両式は R_{y_i} に関する積微分方程式であり、3.1. に述べた Recharge factor $\xi(x, y)$ を決定する方程式が導かれた。

3. 4. Recharge factor

(53), (54) 式的一般解を求めるのは容易でない。しかし、2. 4. に示した分布曲線を参考にして、 $R(x, y)$ の関数型を試算した結果、次のような特解が得られた。

いま、 $p_v(x, y)$ の関数型は次式で与えられると仮定する。

$$p_v(x, y) = m y e^{n x} \dots\dots\dots (55)$$

ここに、 $m[1]$, $n[L^{-1}]$ はある定数である。(55) 式を (48) 式に代入して p_a を得る。

$$p_a = \frac{\Delta L}{\Delta l} \frac{l m n}{2} e^{n x} \dots\dots\dots (56)$$

p_a , p_v を (53), (54) 式に代入して、諸計算をまとめれば次式となる。

$$\frac{1}{l} \frac{\partial \bar{q}_a}{K \partial x} = \frac{\Delta L}{\Delta l} \frac{l m n}{2} e^{n x} \dots\dots\dots (57)$$

$$\frac{1}{l} \frac{\partial(\bar{q}_a)}{K \partial x} = \left[\Delta L \left\{ \frac{1}{\beta_2} \{H_i(x)^2\}'' + \{H_i(x)^2\}''' \right\} - \frac{\Delta L}{l \Delta l} \frac{l^2 m n}{8} \left(\frac{1}{\beta_2} + n \right) e^{n x} \right] \dots\dots\dots (58)$$

両式の左辺は (55) 式の $y=l$ における p_v に等しいから、未知係数 m , n の決定式は次式となる。

$$n = 2 \Delta l / l \Delta L \dots\dots\dots (59)$$

$$m \left\{ 1 + \frac{l^2 n}{4} \left(\frac{1}{\beta_2} + n \right) \right\} e^{n x} = \Delta L \left[\frac{1}{\beta_2} \{H_i(x)^2\}'' + \{H_i(x)^2\}''' \right] \dots\dots\dots (60)$$

m に関しては、排水路水位曲線がわかれば、 $x=0$ において、その値を決定する。たとえば 2. 3. に示された排水路の特性を考慮して、 $H_i(x) = H_0 e^{s x}$ とおけば、 m は次式で与えられる。

$$m = \frac{\Delta L \cdot 4 H_0^2 S^2 (1/\beta_2 + 2S)}{\{1 + l^2 n \cdot (1/\beta_2 + n)/4\}} \dots\dots\dots (61)$$

また、排水路への浸透量は次式で与えられる。

$$p_a = me^{nax} \dots\dots\dots(62)$$

4. 検 討

(50), (51) 式の p_a, p_v が決定され, X, Y -Flow の水面形は次式で与えられる。

$$\bar{F} = H_0^2 + \left\{ (HL^2 - H_0^2) - \frac{m}{n} \left(\frac{\beta_2}{1+n\beta_2} \right) (e^{nL} - 1) \right\} f(\beta x) + \frac{m}{n} \left(\frac{\beta_2}{1+n\beta_2} \right) (e^{nax} - 1) \dots(63)$$

$$\bar{F}_i = H_i(x)^2 + me^{nax}(y^3 - l^3)/6Al \dots\dots\dots(64)$$

まず, 両式が境界条件を満足するかを検討すれば, (63) 式は ($x=0, \bar{F}=H_0^2$), ($x=L, \bar{F}=HL^2$) の条件, (64) 式は ($y=0, \partial\bar{F}_i/\partial y=0$), ($y=l, \bar{F}_i=H_i(x)^2$) の条件をそれぞれ満たしている。ただし, $h(L, l)$ 点は, Fig. 3 の D, E で示すように現象に忠実な境界値を与えていない。この理由は, l 幅平均による近似のためである。したがって, $D-E$ 値の物理的な現象面からの関連づけが今後に残された問題点の一つである。

つぎに, 数値計算によって, 3. 3. に示した近似解法の妥当性を検討してみる。計算は, 数値解析による結果と対比するため, 2. 2. の条件と同一な領域を対象とする。とくに, (63) 式の水面形状に関する諸計算結果を Fig. 10 に示す。なお, 排水路水位は次式に与える

$$H_i(x) = 7.00 \exp(2.312 \times 10^{-4} \times x) \dots\dots\dots(65)$$

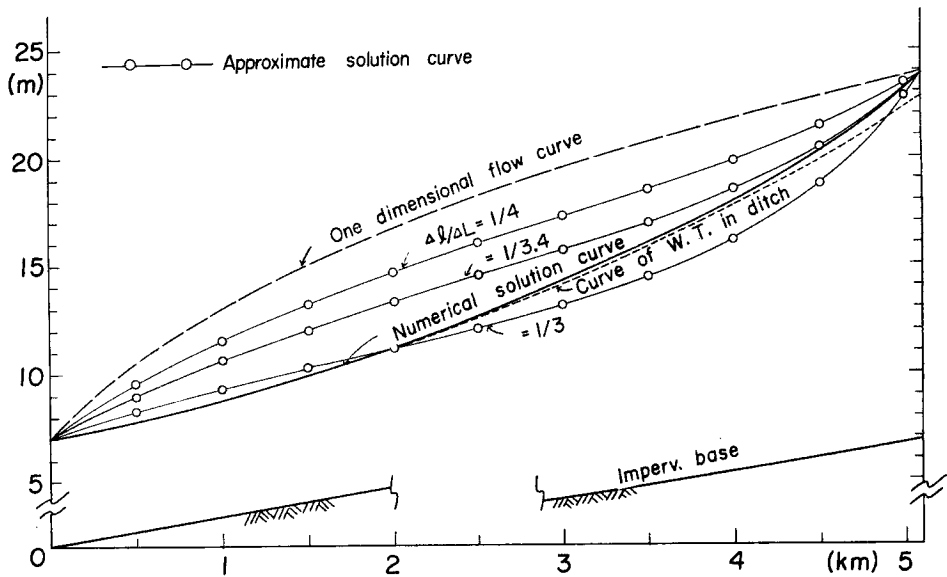


Fig. 10 Profile of the calculated ground water table and the water table in ditch from the Approximate solution or a numerical solution.

図に明らかなように, (63) 式の水面形状は, 式中の n の値, すなわち, 平均値表示の $\Delta l, \Delta L$ の間かくのとおり方によって, 非常な変化を示す。その例を Table 1 に示す。

計算より, n の値を, $n=2\Delta l/l \cdot \Delta L$ の関係式のみから一意的に決定できないことがわかる。つまり, 平均値評価に関するなんらか他の条件を導く必要があり, これには実験との対比など考えられる。

水面形状に関しては, (63) 式の曲線はいずれも Rising と Falling curve の複合されたものとなる。これは, 上, 下流境界値のみから一次元流れとして考えたとき, Falling curve となっている場合に排水路の効果が加味された性状であると考えられる。このことは前述の基本式誘導過程において, 一次元流れでは

Table 1

dl/dL	1/10	1/10	1/6	1/4	1/3.4	1/3	1	2
$dL(m)$	50	500	300	200	170	150	50	25
$n \times 10^3$	0.400	0.400	0.667	1.000	1.176	1.333	2.000	8.000
$m \times 10^7$	2.842	28.42	16.73	10.77	8.945	7.716	2.281	0.285
$(m/n) \left(\beta_2 / (1+n\beta_2) \right) \times (e^{nL} - 1)$	9.768	97.683	96.421	161.52	241.77	364.82	1471.0	∞

Falling curve となる場合を前提としているから当然の帰結といえる。また、計算領域の条件でも Falling curve となる。しかし、数値解析結果では、すべてが Rising curve である点を考慮すれば、一つの問題点として重要である。

Fig. 10 において、近似解による曲線は、 $dl/dL=1/3.4$ 程度のときよい近似を与える。すなわち、上流部分では排水路の効果により Rising curve となり、下流部分で Falling curve に変る。この性状は、Falling curve を前提とする場合には肯定されようが、 $dl/dL=1/3$ のように排水路水位より低い水位をとる場合には基本仮定を離れてしまうため、近似解として採りえない。

結 論

1. 広域地下水挙動のうち、自由地下水流れに関する基礎方程式を提示した。
2. 低平地における排水河川の効果を検討した2次元定常流について、その数値解析を行ない、2、3の特性を明示した。
3. 同様な2次元定常流に対する近似解法を提示し、その理論的根拠を示した。
4. 近似解法の妥当性を検討するため、数値解析結果と対比し、その問題点を考察した。
5. 近似解法は、検討すべき多くの問題点を含むが、基本的過程は有効と考えられる。
6. さらに今後、実験結果との対比を行なうとともに、解法の細部にわたる検討をすすめる。

参 考 文 献

- 1) Mahdi S. Hantush: Hydraulics of gravity wells in sloping sands, Proc. A.S.C.E., Vol. 88, HY4, 1962.
- 2) 大橋行三: 甲府盆地地下水の水面解析について, 京大防災研年報, No.9, 1966.
- 3) 防災研究協会: 甲府盆地地下水調査報告書 (I) 昭和40年3月, (II) 昭和41年3月