

## クノイド波に関する研究(第6報)

—クノイド波理論の適用限界について—

岩 垣 雄 一・山 口 正 隆

## STUDIES ON CNOIDAL WAVES (SIXTH REPORT)

—LIMITING CONDITION FOR APPLICATION OF  
CNOIDAL WAVE THEORY—By *Yuichi* IWAGAKI and *Masataka* YAMAGUCHI

## Synopsis

In the third report, it was described that Laitone's cnoidal wave theory of the second approximation agrees well with the experimental results for the wave profile, wave velocity and wave length in the case of small water depth-wave length ratio. This paper deals with finding of the limiting condition for application of the cnoidal wave theory by comparing with both Stokes wave theory of the third order approximation by Skjelbreia and the experimental results for the wave velocity and wave crest height above still water level in the case of relatively large water depth-wave length ratio.

In addition, the reason why Skjelbreia's solution has been adopted as the most preferable Stokes wave theory here is explained.

## 1. ま え が き

Laitone によるクノイド波の第2近似解<sup>1)</sup>が、水深・波長比  $h/L$  の小さい波については、実験結果とよく一致することを、第3報<sup>2)</sup>で述べた。すなわち、周期  $T$ 、水深  $h$  および重力加速度  $g$  によって作られる無次元量  $T\sqrt{g/h}$  の値が、15、20 および 30 の場合について、波速、波長、波形（水位変化）および波の谷から静水面までの高さを測定し、第1報<sup>3)</sup> および第2報<sup>4)</sup>において作成した図表によるクノイド波の第2近似値と比較した結果、 $T\sqrt{g/h}=30$  の場合には、波形が十分きれいでなかったため、波の谷から静水面までの高さが理論値とあまり一致しなかったが、それを除くと実験値は第2近似値とよく一致することがわかり、クノイド波理論の適合性を確認することができた。さらにその後、 $T\sqrt{g/h}=25$  の場合の実験を追加し検討した結果、理論の適合性を再確認した<sup>5)</sup>。しかし、クノイド波の理論解は、水深・波長比が小さいとして、摂動法により求められたものであるから、水深・波長が大きくなると具合が悪くなる。したがって、この波の理論解には適用限界があるはずであり、Laitone は水深の5倍より短い波長をもつ有限振幅波には、クノイド波の理論は適用すべきでないといっている<sup>6)</sup>。

一方、水深・波長比が大きい場合に適用される Stokes 波の理論は、逆に水深・波長比が小さくなり、また波形勾配が大きくなると、解の級数の収束性が悪くなり、この理論が適用できなくなる。いま静水面からの波の峰高を  $\eta_0$  とすれば、Stokes 波の理論が適用できる領域は、Keulegan<sup>7)</sup> によると  $h/L \geq 1/10$ 、Laitone<sup>8)</sup> によれば  $h/L \geq 1/8$ 、Wilson-Webb-Hendrickson<sup>9)</sup> によると  $h/L \geq (\eta_0/L)^{1/3}$  であるといわれている。

しかしながら、クノイド波にしても Stokes 波でも、このような限界を決めた根拠には問題があり、何らかの方法によってこれらの適用限界を検討し、妥当な限界を見出さなければならない。ここでは、波の特性のうち、波速と静水面上の波の峯高をとりあげ、 $0.07 \leq h/L \leq 0.2$ 、すなわち  $6 \leq T\sqrt{g/h} \leq 15$  の場合について実験を行ない、その結果を各理論式による計算値と比較し、Stokes 波理論とともにクノイド波理論の適用範囲を明確にしようとするもので、理論解として、クノイド波に対しては Laitone の第 2 近似解<sup>1)</sup>を Stokes 波では Skjelbreia の 3rd order の解<sup>9)</sup>を用いる。

Stokes 波の理論には各種のものがあり、そのうちのどれを採用するかが問題となる。そこで、佐藤の解<sup>10)</sup>、田中の解<sup>11), 12)</sup>および Skjelbreia の 3rd order の解を選び、それぞれの波速式を比較した<sup>13)</sup>が、ここでは主として水面における水粒子の運動を規定する水面条件と、動的条件である水面におけるベルヌーイの式とを、各解がどの程度満足するかを検討して、やはり Skjelbreia の解が最も好ましいとして取り上げた理由を述べる。

## 2. 波の各理論解の比較

### (1) 水面条件

波動解は一般に 2 つの水面条件を満足しなければならない。その 1 つは、水面における水粒子は、水面が運動してもやはり水面に存在するという kinematic な条件で、 $\eta$  を水平方向にとった軸からの水面の鉛直距離、 $u$  および  $w$  をそれぞれ水粒子の  $x$  および  $z$  方向の速度成分とすれば、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = w, \quad z = \eta \quad \dots \dots \dots (1)$$

であらわされる。この式は、波速  $c$  で波とともに移動する座標系 ( $X \sim z$ ) であらわし、運動を定常化すると、

$$\frac{\partial \eta}{\partial X} = \frac{w}{u - c}, \quad z = \eta \quad \dots \dots \dots (2)$$

となる。また Rayleigh の方法により、波速に等しい流速をもつ一様な流れを与えて定常化した場合には、

(1) 式において時間が落ちて、

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{w}{u}, \quad z = \eta \quad \dots \dots \dots (3)$$

とあらわされる。

もう 1 つの水面条件は、ベルヌーイの定理を水面に適用し、そこでは圧力は一定であるとおいた dynamic な条件であって、 $\phi$  を速度ポテンシャルとすれば、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + g\eta = \text{const.}, \quad z = \eta \quad \dots \dots \dots (4)$$

であらわされる。移動する座標系で定常化した場合には、(4) 式は

$$\frac{1}{2}\{(u - c)^2 + w^2\} + g\eta = \text{const.}, \quad z = \eta \quad \dots \dots \dots (5)$$

となり、また Rayleigh の方法による定常化の場合には、

$$\frac{1}{2}(u^2 + w^2) + g\eta = \text{const.}, \quad z = \eta \quad \dots \dots \dots (6)$$

であらわされる。

したがって問題は、波動解が (2) あるいは (3) 式および (5) あるいは (6) 式をどの程度満足するかを明らかにすることである。

### (2) 佐藤の解

佐藤は Stokes が深海波について行なったと同様な手法により、Rayleigh の方法を用いて、速度ポテン

シャル  $\phi$  と流れの関数  $\psi$  をつぎのように仮定して、波の特性を求めた。

$$\left. \begin{aligned} \frac{k\phi}{c} &= -kx + k\beta \cosh k(h_0 + z) \sin kx, \\ \frac{k\psi}{c} &= -kz + k\beta \sinh k(h_0 + z) \cos kx. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $h_0$  は  $x$  軸からの水深で、実際の平均水深  $h$  は  $h_0 + \delta_0$  に等しい。また、 $k = 2\pi/L$  であり、 $\beta$  はパラメーターであって、水面条件の計算に必要な波速、水粒子速度および波形を、平均水深  $h$  を用いて書きあらわせば、つぎのようになる。

$$\frac{c^2}{gh} = \frac{\tanh kh}{kh} \left\{ 1 + k^2 \beta^2 \left( \sinh^2 kh - \frac{1}{2} \right) \right\}, \dots\dots\dots (8)$$

$$kH = 2k\beta \sinh kh \{ 1 + (1/2)k^2 \beta^2 (1 + 2\sinh^2 kh) \}, \dots\dots\dots (9)$$

$$(u/c)_\eta = k\beta \cosh k(h + \eta) \cos kx - 1, \dots\dots\dots (10)$$

$$(w/c)_\eta = k\beta \sinh k(h + \eta) \sin kx, \dots\dots\dots (11)$$

$$\begin{aligned} k\eta &= \left[ k\beta \sinh k(h - \delta_0) + \frac{3}{4} k^3 \beta^3 \left\{ \sinh k(h - \delta_0) + \frac{3}{2} \sinh^3 k(h - \delta_0) \right\} \right] \cos kx \\ &+ \frac{1}{2} k^2 \beta^2 \sinh k(h - \delta_0) \cosh k(h - \delta_0) \cos^2 kx \\ &+ \frac{1}{4} k^3 \beta^3 \left\{ \sinh k(h - \delta_0) + \frac{3}{2} \sinh^3 k(h - \delta_0) \right\} \cos^3 kx, \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

$$k\delta_0 = (1/2)k^2 \beta^2 \sinh kh \cosh kh. \dots\dots\dots (13)$$

(3) 田 中 の 解

田中は、佐藤の解が自由表面の条件を厳密に満足しないことを考慮し、やはり Rayleigh の方法を用いて、速度ポテンシャル  $\phi$  および流れの関数  $\psi$  をつぎのような級数によって仮定した。

$$\left. \begin{aligned} \frac{k\phi}{c} &= -kx + \sum_{n=1}^{\infty} k\alpha_n \{ \cosh nk(h_0 + z) / \sinh nk h_0 \} \sin nkx, \\ \frac{k\psi}{c} &= -kz + \sum_{n=1}^{\infty} k\alpha_n \{ \sinh nk(h_0 + z) / \sinh nk h_0 \} \cos nkx. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 $\alpha_n$  はパラメーターであって、波速、水粒子速度および波形の各式を、平均水深  $h$  によって書きあらわせば、つぎのようである。

$$\frac{c^2}{gh} = \frac{\tanh kh}{kh} \left\{ 1 + \frac{1}{8} k^2 \alpha_1^2 \left( 9 \coth^4 kh - 6 \coth^2 kh + 5 - \frac{4}{\sinh^2 kh} \right) \right\}, \dots\dots\dots (15)$$

$$kH = 2k\alpha_1 \left\{ 1 + \frac{3}{64} k^2 \alpha_1^2 (9 \coth^6 kh + 13 \coth^4 kh + 11 \coth^2 kh - 1) \right\}, \dots\dots\dots (16)$$

$$\left( \frac{u}{c} \right)_\eta = \sum_{n=1}^3 nk\alpha_n \frac{\cosh nk(h + \eta)}{\sinh nk(h - \delta_0)} \cos nkx - 1, \dots\dots\dots (17)$$

$$\left( \frac{w}{c} \right)_\eta = \sum_{n=1}^3 nk\alpha_n \frac{\sinh nk(h + \eta)}{\sinh nk(h - \delta_0)} \sin nkx, \dots\dots\dots (18)$$

$$\begin{aligned} k\eta &= \left[ k\alpha_1 + \frac{3}{8} k^3 \alpha_1^3 \coth^2 k(h - \delta_0) \left\{ 1 + 2 \coth^2 k(h - \delta_0) \right\} \right] \cos kx \\ &+ \frac{1}{4} k^2 \alpha_1^2 \coth k(h - \delta_0) \{ 3 \coth^2 k(h - \delta_0) - 1 \} \cos 2kx \\ &+ \frac{3}{64} k^3 \alpha_1^3 \{ 3 \coth^2 k(h - \delta_0) - 1 \} \{ 3 \coth^4 k(h - \delta_0) + 1 \} \cos 3kx, \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

$$k\delta_0 = (1/2)k^2 \alpha_1^2 \coth kh. \dots\dots\dots (20)$$

(4) Skjelbreia の第3次近似解

第5次近似解は Skjelbreia-Hendrickson<sup>14)</sup> が求めているが、波の進行とともに移動する座標系により定常化した第3次近似解は、速度ポテンシャル  $\phi$ 、波形  $\eta$ 、ベルヌーイの定理の積分常数  $K$ 、および波速  $c$  をつぎのようにおけば、求めることができる。

$$k\phi/c = (\lambda A_{11} + \lambda^3 A_{13}) \cosh k(h+z) \sin kX + \lambda^2 A_{22} \cosh 2k(h+z) \sin 2kX + \lambda^3 A_{33} \cosh 3k(h+z) \sin 3kX, \dots\dots\dots(21)$$

$$k\eta = \lambda \cos kX + \lambda^2 B_{22} \cos 2kX + \lambda^3 B_{33} \cos 3kX, \dots\dots\dots(22)$$

$$kK = \lambda^2 C_3, \dots\dots\dots(23)$$

$$kc^2 = C_0(1 + \lambda^2 C_1), \quad X = x - ct. \dots\dots\dots(24)$$

ここに、 $\lambda$  はパラメーターであり、 $A_{11}, A_{13}, A_{22}, A_{33}, B_{22}, B_{33}, C_3, C_0$  および  $C_1$  はいずれも  $kh$  の関数であって、それぞれつぎのようにあらわされる。

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= 1/s_\eta, & A_{13} &= -c_\eta^2(5c_\eta^2+1)/85s_\eta^5, \\ A_{22} &= 3/8s_\eta^4, & A_{33} &= (13-4c_\eta^2)/64s_\eta^7, \\ B_{22} &= (2c_\eta^2+1)c_\eta/4s_\eta^3, & B_{33} &= 3(8c_\eta^6+1)/64s_\eta^6, \\ C_0^2 &= g \tanh kh, & C_1 &= (8c_\eta^4-8c_\eta^2+9)/8s_\eta^4, \\ C_3 &= -1/4s_\eta c_\eta, & s_\eta &= \sinh kh, \quad c_\eta = \cosh kh. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(25)$$

また  $\lambda$  は  $kH$  と  $kh$  の関数であって、

$$kH/2 = \lambda + \lambda^3 B_{33}. \dots\dots\dots(26)$$

波速は (24) 式より

$$\frac{c^2}{gh} = \frac{\tanh kh}{kh} (1 + \lambda^2 C_1) \dots\dots\dots(27)$$

であり、水粒子の水面における速度はつぎようになる。

$$(u/c)_\eta = (\lambda A_{11} + \lambda^3 A_{13}) \cosh k(h+\eta) \cos kX + 2\lambda^2 A_{22} \cosh 2k(h+\eta) \cos 2kX + 3\lambda^3 A_{33} \cosh 3k(h+\eta) \cos 3kX, \dots\dots\dots(28)$$

$$(w/c)_\eta = (\lambda A_{11} + \lambda^3 A_{13}) \sinh k(h+\eta) \sin kX + 2\lambda^2 A_{22} \sinh 2k(h+\eta) \sin 2kX + 3\lambda^3 A_{33} \sinh 3k(h+\eta) \sin 3kX. \dots\dots\dots(29)$$

なお、この解では  $x$  軸と平均水面とは一致し、式中の  $h$  は実際の平均水深をあらわす。

(5) 微小振幅波の理論解

Airy の微小振幅波の波形、波速および水粒子速度は、それぞれ

$$k\eta = (kH/2) \cos kX, \dots\dots\dots(30)$$

$$c^2/gh = \tanh kh/kh, \dots\dots\dots(31)$$

$$(u/c)_0 = \{(kH/2) \cosh kh / \sinh kh\} \cos kX, \dots\dots\dots(32)$$

$$(w/c)_0 = (kH/2) \sin kX \dots\dots\dots(33)$$

であらわされる。この場合、水面における値として、 $z=0$  の点の値を採用する。なお、上式は移動座標系による表示である。

(6) 各理論解による計算結果の比較

a) 各波速式の計算結果の比較 上記の各波速式を見ると、 $c/\sqrt{gh}$  は  $h/L$  と  $h/H$  の関数であることがわかり、かつ波の周期  $T$  と平均水深  $h$  とで作られる無次元量  $T\sqrt{g/h}$  は、

$$T\sqrt{g/h} = (h/L)^{-1} \cdot (c/\sqrt{gh})^{-1} \dots\dots\dots(34)$$

と変形されるので、 $c/\sqrt{gh}$  は  $T\sqrt{g/h}$  と  $h/H$  の関数としてあらわすことができる。Fig. 1 は波速に対する理論解を、 $h/H=2, 3, 6$  および10の場合に比較して示したもので、これらの図からいえることは、田中の解と Skjelbreia の解はほとんど差がないこと、佐藤の解は両者とかなりかけ離れ、とくに  $T\sqrt{g/h}$  の値が大きくなるほど、その差は著しいことである。このことは、佐藤の解は他にくらべて近似度が1次低いことによるものと思われる。

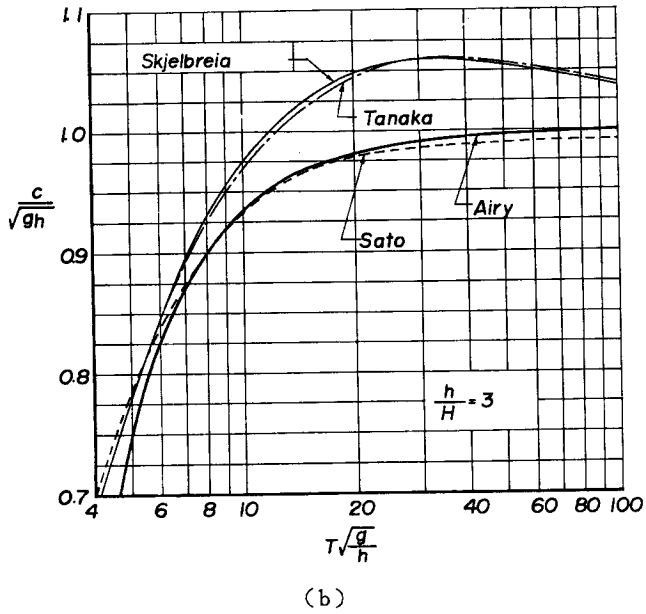
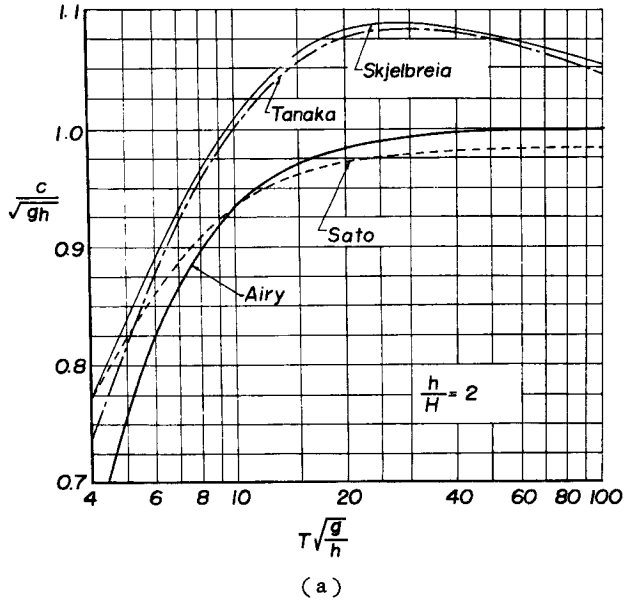
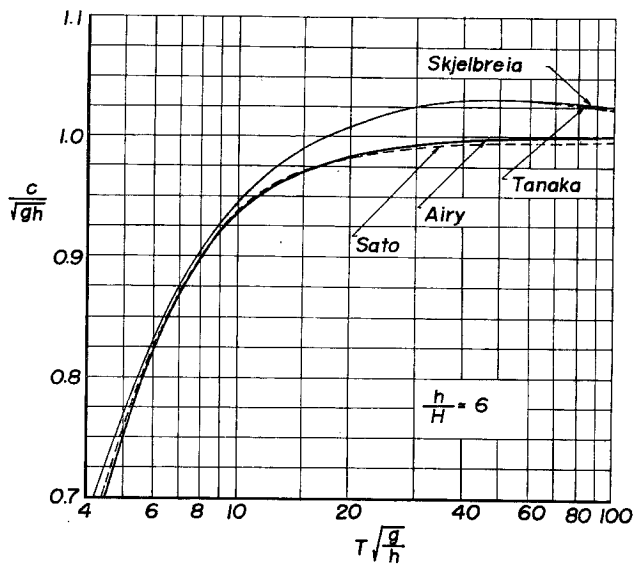
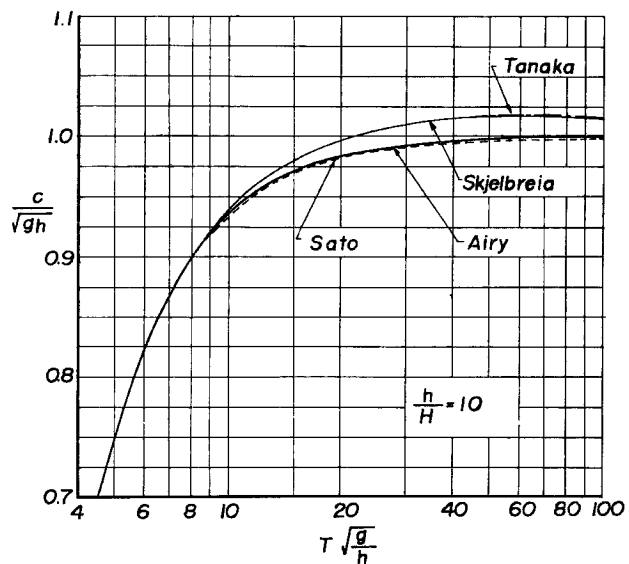


Fig. 1 Comparisons of wave velocities of small amplitude and Stokes waves.



(c)



(d)

Fig. 1 Comparisons of wave velocities of small amplitude and Stokes waves

b) 水面条件の誤差の比較 いま、

$$\epsilon_1 = \frac{\partial \eta}{\partial X} + \frac{(w/c)\eta}{1 - (u/c)\eta}, \dots\dots\dots(35)$$

あるいは、

$$\epsilon_1 = \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{(w/c)\eta}{(u/c)\eta} \dots\dots\dots(36)$$

とおけば、もし、水面における kinematic な条件を完全に満足しているときには、(2) あるいは (3) 式より  $\epsilon_1 = 0$  となるはずである。

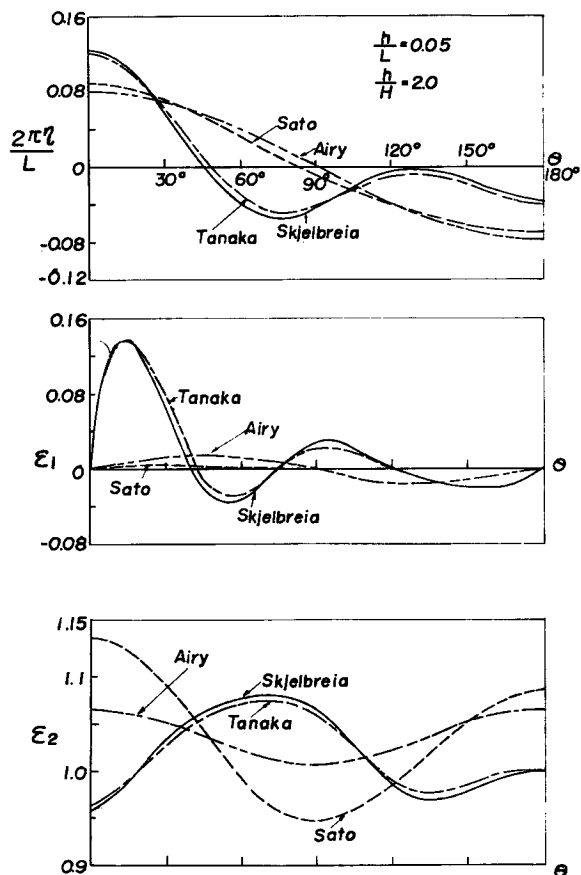
また、

$$\epsilon_2 = \left\{ 1 - \left( \frac{u}{c} \right)_\eta \right\}^2 + \left( \frac{w}{c} \right)_\eta^2 + \frac{2k\eta}{kh(c^2/gh)}, \dots\dots\dots(37)$$

あるいは、

$$\epsilon_2 = \left( \frac{u}{c} \right)_\eta^2 + \left( \frac{w}{c} \right)_\eta^2 + \frac{2k\eta}{kh(c^2/gh)} \dots\dots\dots(38)$$

とおけば、解が水面における dynamic な条件を完全に満たしている場合には、(5) あるいは (6) 式よ



(a)

Fig. 2 Comparison of boundary condition errors (1).

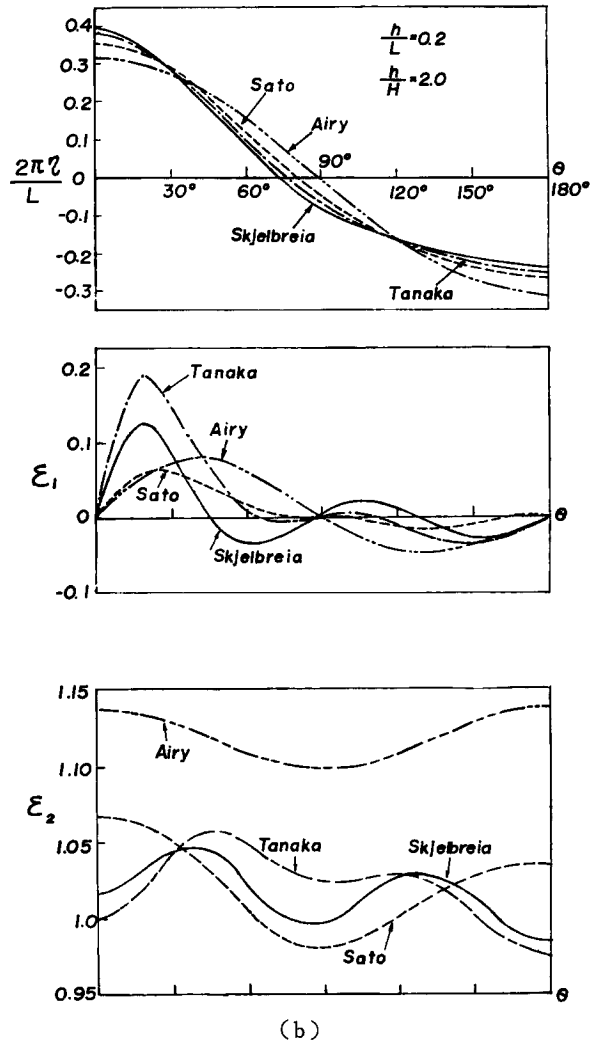


Fig. 2 Comparison of boundary condition errors (1).

り、 $x$ あるいは $X$ に無関係に  $\epsilon_2 = \text{const.}$  となるはずである。したがって、前述の各 Stokes 波の理論解を (35) あるいは (36) 式および (37) あるいは (38) 式に代入し、水面条件の誤差の程度を比較することによって、最も好ましい理論解はどれであるかを知ることができる<sup>15)</sup>。

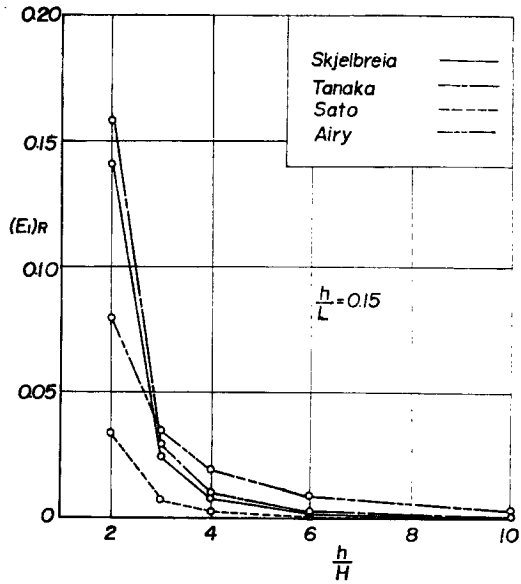
Fig. 2 は、佐藤の解および田中の解を (36) および (38) 式に、Skjelbreia の解は (35) および (37) 式に代入して得た  $\epsilon_1$  および  $\epsilon_2$  の位相による変化の 2 例を示したもので、参考のために波形も一緒に示してある。また比較のために、微小振幅波の場合も加えてある。この図から、kinematic な水面条件は静水面から上の波の峯の部分で最も適合しないこと、水深・波長比が 0.05 にもなると、むしろ微小振幅波や佐藤の解の方がよいことなどがわかる。

いま、Dean<sup>15)</sup> にならって、

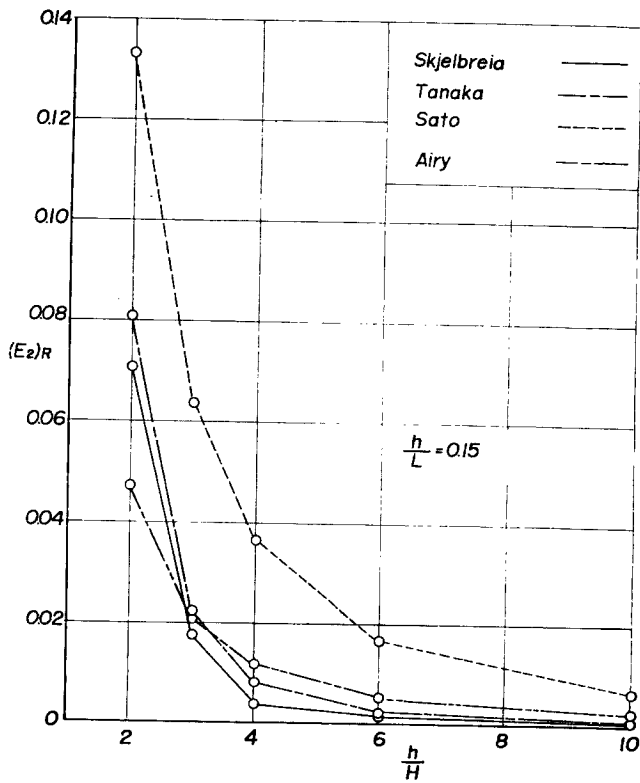
$$(E_1)_R = (\epsilon_1)_{max} - (\epsilon_1)_{min}, \dots\dots\dots(39)$$

$$(E_2)_R = (\epsilon_2)_{max} - (\epsilon_2)_{min} \dots\dots\dots(40)$$





(a)



(b)

Fig. 3 Comparison of boundary condition errors (2).

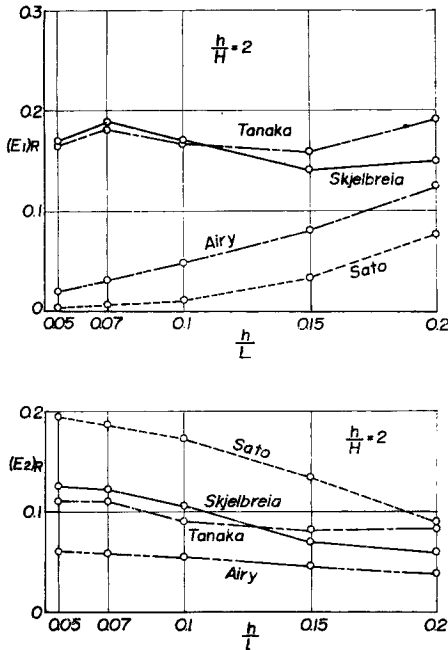


Fig. 4 Comparison of boundary condition errors (3).

とおけば、 $(E_1)_R$  および  $(E_2)_R$  の大小によって、水面条件の誤差の程度を比較することができる。Fig. 3 は  $h/L=0.15$  の場合の  $(E_1)_R$  および  $(E_2)_R$  と  $h/H$  との関係を示したもので、いずれの解も  $h/H$  の値が小さくなると、水面条件を満足しにくくなること、佐藤の解は他に比べて dynamic な水面条件の誤差が大きいこと、田中の解と Skjelbreia の解とは、波速式の比較で述べたと同様、あまり差がないこと、などがわかる。Fig. 4 は  $h/H=2$  の場合の  $h/L$  との関係を示したもので、この図から、田中の解と Skjelbreia の解は、 $h/L$  の値によって水面条件の誤差はあまり変化しないこと、微小振幅波と佐藤の解は、kinematic な水面条件の誤差が  $h/L$  の増大とともに大きくなって田中や Skjelbreia のものに近づくこと、dynamic な水面条件の誤差は、佐藤の解のものが他のものに比して最も大きいこと、などが理解される。

以上のことから、Stokes 波の理論解として、数表化されて計算に便利な Skjelbreia による第3次近似解を用いるのが適当と思われる。

### 3. Stokes 波とクノイド波の波速および波の峯高に関する理論曲線の比較

#### (1) 波速

Stokes 波の波速式は、前述のように Skjelbreia による (27) 式を用い、クノイド波の波速式は第2報の (4) 式あるいはそれを図化した Fig. 3 を用いる。Fig. 5 は、これらの式あるいは図を用いて、 $h/H=2, 3, 5$  および 10 の場合に対して求めた波速曲線であって、比較のために微小振幅数の曲線も示してある。これらの図から、クノイド波の曲線は、Laitone<sup>6)</sup> も指摘しているように、 $T\sqrt{g/h}$  (Laitone は  $T\sqrt{g/h}$  ではなく、波長と波の谷からの水深の比  $L/hc$  を用いている) の値がある値より小さくなると、波速が増加するという奇妙なことがおこるので、 $T\sqrt{g/h}$  の値が小さくなるとクノイド波の理論が適用できなくなること、また微小振幅波の波速よりクノイド波の波速が小さくなるということも常識的におかしいこと、逆に  $T\sqrt{g/h}$  の値が大きくなると Stokes 波の波速が減少し始めることから、 $T\sqrt{g/h}$  の値がある値を越えると Stokes 波の理論は適用できなくなること、などが理解される。しかし、 $h/H$  の値が大きくなると、クノイド波と Stokes 波の波速曲線は接近し、両者の差は小さくなる。

#### (2) 平均水面上の波の峯高

クノイド波の理論では、波の谷と平均水面との距離  $\delta$  は、 $\delta/H$  の形で、第1報の (20) 式であらわされるから、平均水面上の波の峯高と波高と比  $\eta_0/H$  は、

$$\eta_0/H = (H - \delta)/H = 1 - (\delta/H) \dots\dots\dots(41)$$

によって求められる。

一方、Stokes 波では、(22) 式で  $kX=0$  とおいて、次式のように求められる。

$$\eta_0/H = (kH)^{-1}(\lambda + \lambda^2 B_{22} + \lambda^3 B_{33}), \dots\dots\dots(42)$$

$\lambda$  は (26) 式で示すように  $kH$  と  $kh$  の関数であり、 $B_{22}$  および  $B_{33}$  は (25) 式でわかるように  $kh$  の関数であるから、 $\eta_0/H$  は  $kH$  と  $kh$  の関数である。したがって、波速の計算の場合と同様、 $h/H$  をパラ

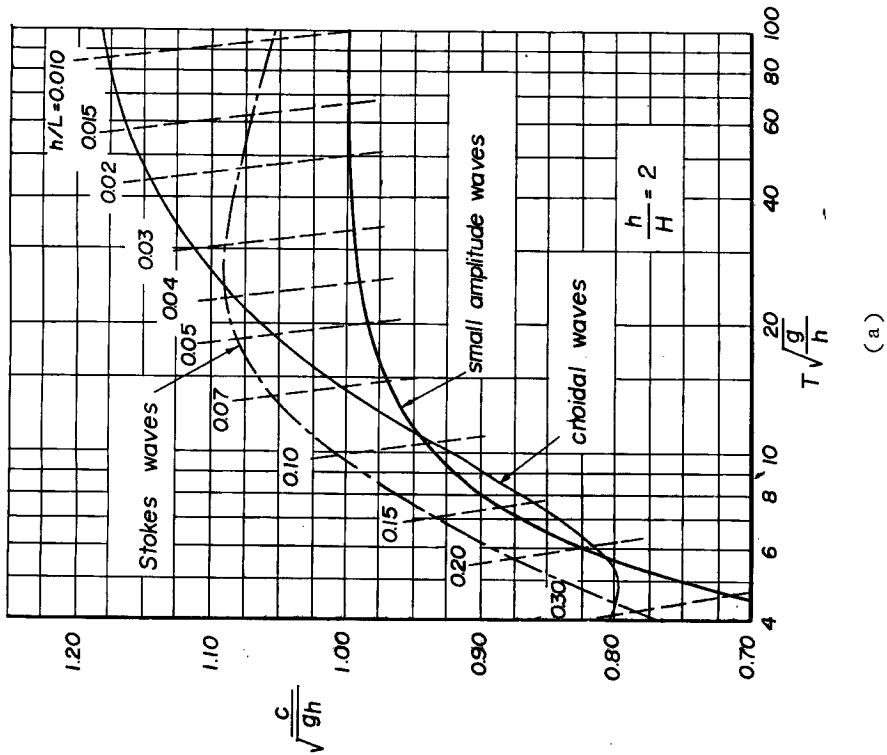
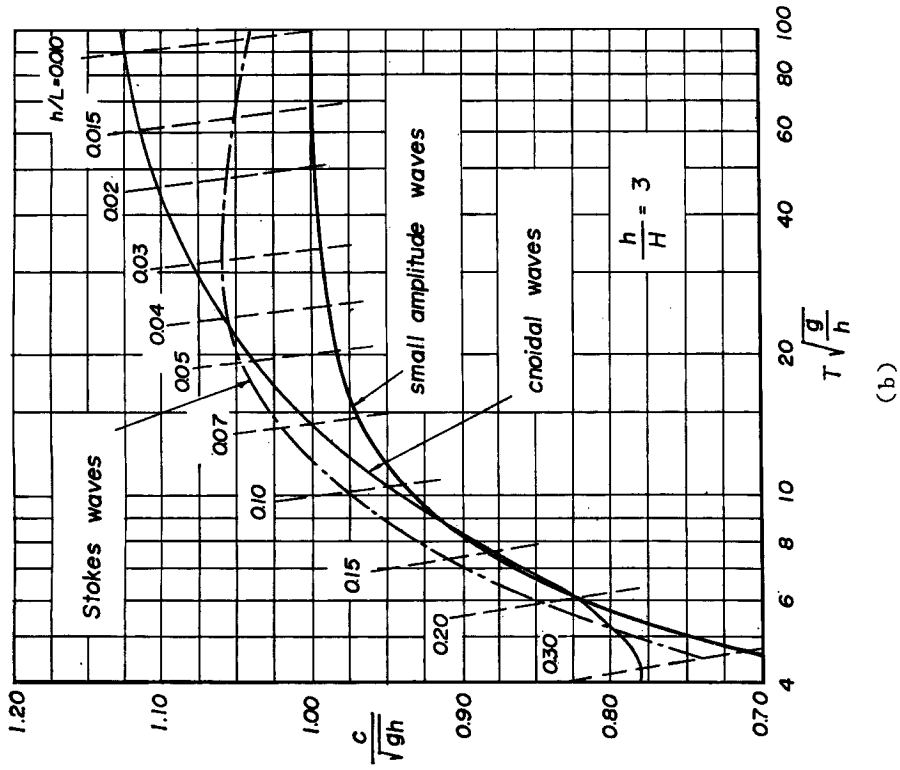
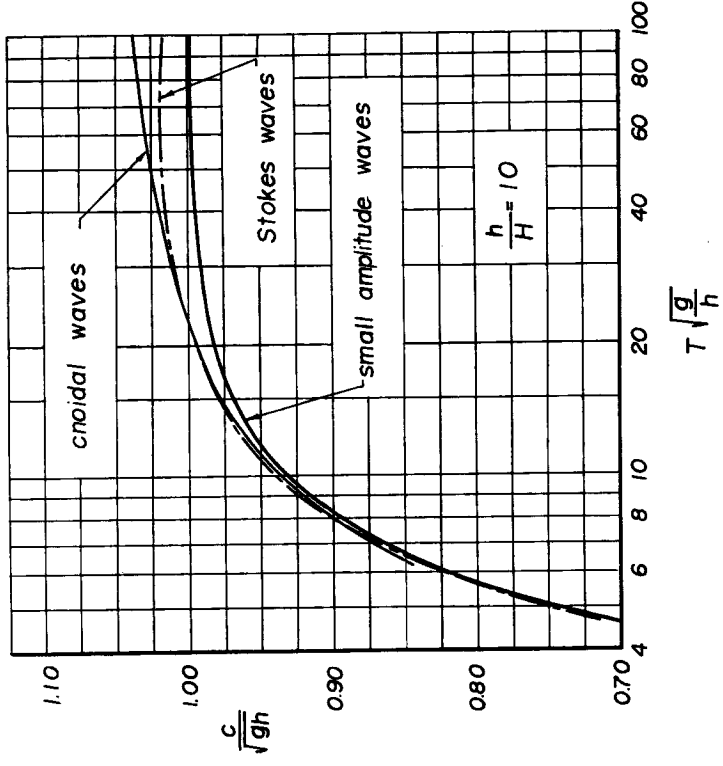
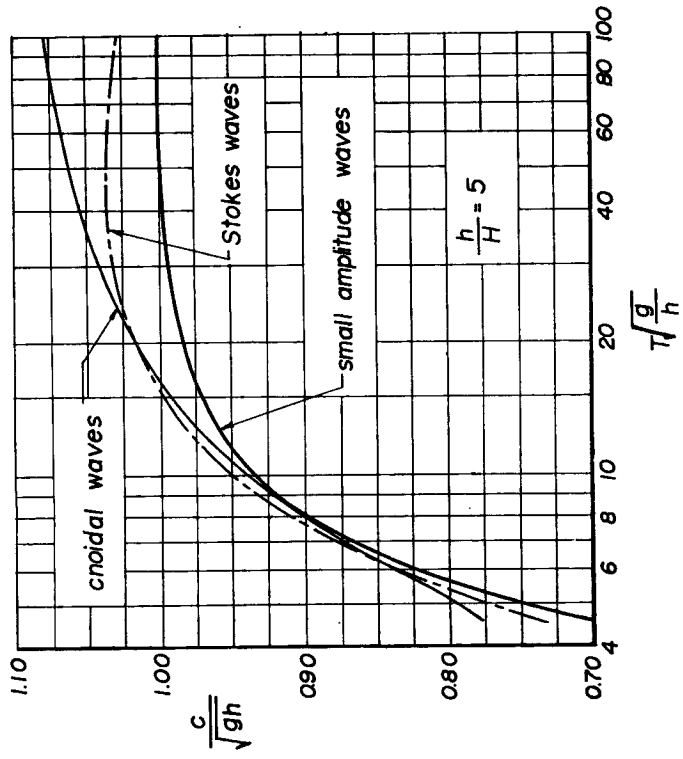


Fig. 5 Comparison between theoretical curves of wave velocity of small amplitude, Stokes and cnoidal waves.



(d)



(c)

Fig. 5 Comparison between theoretical curves of wave velocity of small amplitude, Stokes and cnoidal waves.

メーターとして  $\eta_0/H$  と  $T\sqrt{g/h}$  との関係が求められる。

Fig. 6 は、これらの式を用いて求めたクノイド波と Stokes 波の、平均水面上の波の峯高についての理論曲線を示したもので、この図からも  $T\sqrt{g/h}$  が大きくなると、Stokes 波の理論が適用できなくなることがわかり、また  $h/H$  の値が小さい場合には、 $T\sqrt{g/h}$  が小さくなると、クノイド波と Stokes 波の両者の理論曲線がかなり離れ、どちらが適用されるべきかよくわからない。したがって、両者の波の理論解の適用範囲は、実験を行なって検討することが必要である

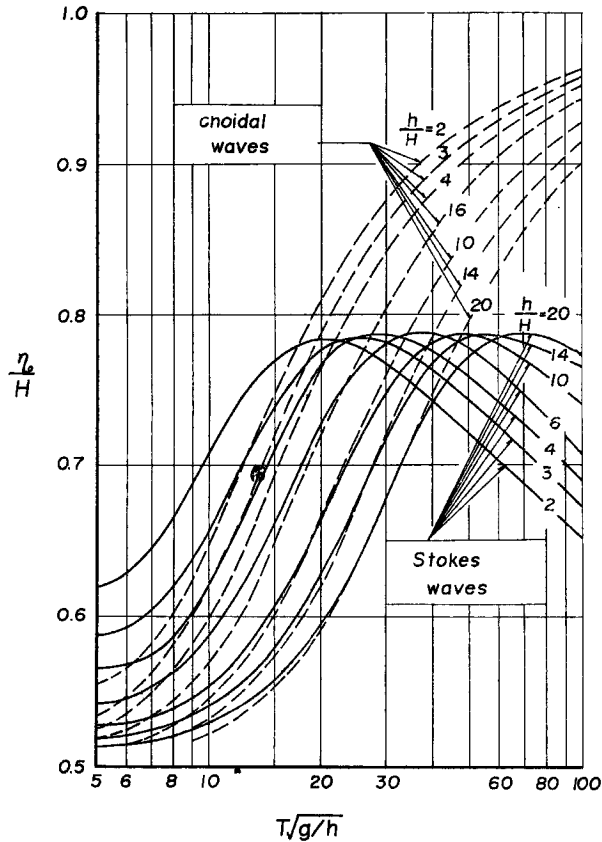


Fig. 6 Comparison between theoretical curves of wave crest height above still water level of Stokes and cnoidal waves.

#### 4. 理論解の適合性に関する実験

第3報<sup>2)</sup>において、水深・波長比の小さい  $T\sqrt{g/h}=15, 20$  および  $30$  の場合に対して、またその後  $T\sqrt{g/h}=25$  の場合を追加して<sup>3)</sup>、波形、波速および波長に関する実験を行ない、クノイド波理論の適合性について検討したが、ここではクノイド波理論が適用されなくなると思われる  $T\sqrt{g/h}$  の値の小さい場合、すなわち  $6 \leq T\sqrt{g/h} \leq 15$  の範囲について、波速に関する実験を行ない、同時にえられた波形記録から、平均水面上の波の峯高をも求め、各理論曲線と比較検討した。なお、実験装置の制約上、水深

Table 1 Wave characteristics and water depth used in experiments.

$T\sqrt{g/h}$	Wave period $T(\text{sec})$	Water depth $h(\text{cm})$	Wave height $H(\text{cm})$
6	0.8	17.42	2.88~2.07
	1.0	27.22	8.35~3.02
7	0.9	16.20	4.54~2.71
	1.1	24.22	8.54~2.88
8	1.0	15.31	4.98~2.49
	1.3	25.88	8.49~2.60
9	1.1	14.64	4.36~3.15
	1.4	23.71	8.60~2.41
10	1.2	14.11	4.12~2.07
	1.4	19.21	6.03~2.67
11	1.4	15.87	4.69~2.85
	1.7	23.41	7.52~1.56
12	1.5	15.31	5.13~1.78
	1.8	22.05	7.11~1.49
13	1.6	14.84	4.14~2.03
	1.9	20.93	8.41~1.33
14	1.7	14.45	4.33~1.43
	2.0	20.00	6.89~1.48
15	1.6	11.15	3.20~1.18

・波高比  $h/H$  がほぼ 2.5 以上の場合に限られた。

### (1) 実験装置および実験方法

用いた水槽は、第3報のものと同一宇治川水理実験所にある幅 50 cm、深さ 65 cm、長さ 63 mの波浪実験用長水槽で、造波機は鉄製の枠の上のレールを造波板付きの台車が往復運動するピストン型のものである。また実験方法も前と同様、 $T\sqrt{g/h}$  の値が一定になるように周期と水深を固定し、波高を変化させるようにした。実験を行なった水深と波の特性は **Table 1** に示す。波速の測定方法も前回と同じで、水槽端から 16~30 m 離れた位置に、300.4~303.4 cm の間隔で2つの電気抵抗式波高計を設置し、ペン書きオシログラフにより水位の時間的変化を記録させ、これから各波の峯の距離を読みとり、波が2つの波高計の間を進むに要する時間を求めて波速を算出した。またこのときにえられた波形記録から、平均水面上の波の峯高を求めた。

### (2) 実験結果と理論値との比較

**Table 2** は実験によって求めた波高  $H$ 、波速  $c$  および平均水面からの波の峯高  $\eta_0$  を示したものである。波高は3桁、波速は4桁まで示してあるが、前者は最大2%の読みとり誤差が、また後者は最大約0.5%程度の誤差が入っていると考えられる。 $\eta_0$  の読みとり誤差は、波高のそれの2倍程度であろう。

a) 波速 **Fig. 7** は  $T\sqrt{g/h}$  が6~15の各場合に対して、 $c/\sqrt{gh}$  と  $h/H$  との関係を描き、前述の Stokes 波とクノイド波の理論値と比較したものである。図中のクノイド波の曲線の端の黒丸は Laitone によって求められた最高波の限界点であり、 $T\sqrt{g/h}=15$  の場合の  $T=1.97$  sec の実験値は、第3報<sup>2)</sup>およびその後の追加実験<sup>3)</sup>によって求められた結果である。これらの図からつぎのことがいえる。

Table 2 Experimental data of wave velocity and wave crest height above still water level.

$T\sqrt{g/h}$	$T$ (sec)	$H$ (cm)	$c$ (cm/s)	$\eta_0$ (cm)
6	0.8	4.35	—	2.36
		4.26	—	2.40
		4.06	—	2.24
		3.49	—	1.85
		3.15	—	1.72
		2.88	107.7	1.47
		2.78	107.5	1.50
		2.63	—	1.34
	1.0	2.29	106.7	1.22
		2.07	106.6	1.06
		8.35	135.6	4.64
		8.26	135.6	4.54
		7.40	134.2	4.15
		6.54	134.3	3.45
		5.58	133.9	3.05
		4.68	134.2	2.58
7	0.9	3.75	133.3	1.96
		3.02	133.2	1.58
		4.54	109.6	2.58
		4.12	109.3	2.36
		3.53	109.3	1.94
	1.1	3.04	109.1	1.89
		2.71	108.5	1.47
		8.54	136.1	—
		8.12	135.9	—
		7.73	135.5	4.44
		7.39	135.2	—
		7.32	135.0	4.20
		6.46	133.6	3.73
		5.30	133.6	2.88
		4.08	133.0	2.10
		3.18	133.3	1.62
8	1.0	2.88	132.7	—
		4.98	112.6	2.92
		4.91	112.3	2.86
		4.84	112.0	2.83
		4.61	—	2.72
		4.16	—	2.43
		3.81	109.9	2.17
		3.14	110.1	1.17
	1.3	2.49	110.0	1.29
		8.49	145.3	5.14
		7.87	145.1	4.68
		6.42	144.6	3.78
		5.25	144.3	2.98
		3.88	143.7	2.14
		3.32	142.9	1.80
		2.60	142.7	1.36
9	1.1	2.49	110.6	2.63
		4.36	110.6	2.39
		4.14	110.3	2.39
		3.67	110.7	2.19
		3.15	110.6	1.77
	1.4	2.71	—	1.50
		2.17	—	1.16
		8.60	142.5	5.40
		8.56	141.8	—
		8.17	143.2	—
		7.76	142.2	4.88
		6.77	141.3	—
		5.82	141.2	3.40
		4.57	140.5	2.54
		3.36	139.8	—
		2.41	139.8	1.30

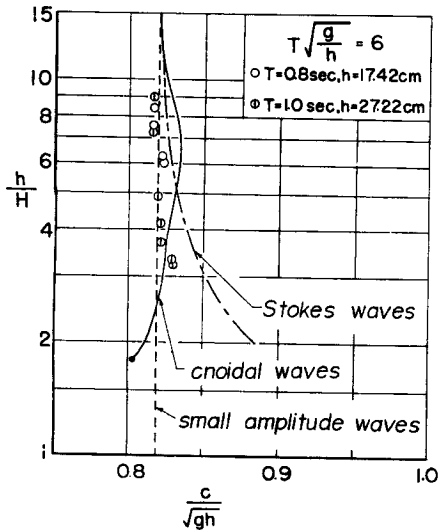
Table 2 Experimental data of wave velocity and wave crest height above still water level (continued).

$T\sqrt{g/h}$	$T$ (sec)	$H$ (cm)	$c$ (cm/s)	$\eta_0$ (cm)	$T\sqrt{g/h}$	$T$ (sec)	$H$ (cm)	$c$ (cm/s)	$\eta_0$ (cm)
10	1.2	4.12	110.8	2.56	12	1.5	5.13	121.2	3.40
		3.37	110.8	—			4.39	120.7	2.87
		3.04	110.4	1.82			4.34	119.6	2.84
		2.83	109.9	1.70			4.08	119.7	2.69
		2.46	109.5	1.45			3.68	119.4	2.36
	2.07	109.5	1.13	3.34		118.8	2.06		
	1.4	6.80	—	4.27		2.94	117.8	1.76	
		6.72	—	4.28		2.74	117.2	—	
		6.03	130.1	4.28		2.30	117.1	1.41	
		5.47	129.8	3.78		1.78	117.0	1.00	
4.61		129.3	3.40	7.17	—	4.75			
11	1.4	4.20	128.9	2.56	13	1.8	7.11	144.5	4.70
		3.73	128.0	2.20			6.77	144.6	4.49
		2.67	—	2.20			6.27	—	4.14
		2.11	—	1.15			5.56	143.3	3.47
		5.47	—	—			5.06	142.8	—
	1.4	5.24	—	3.67		4.55	142.2	2.84	
		5.05	—	3.51		3.82	141.2	2.31	
		5.02	—	3.29		2.92	142.2	1.67	
		4.69	119.5	3.35		2.12	131.6	1.17	
		4.52	119.3	—		1.49	139.9	0.79	
1.4	4.16	118.9	2.88	4.14	117.8	2.89			
	3.75	118.3	2.73	3.90	117.0	2.63			
	3.68	118.6	2.34	3.36	117.4	2.16			
	2.85	117.8	—	2.60	116.9	1.58			
	2.39	—	—	2.03	115.9	—			
11	1.7	2.01	—	1.62	1.9	1.6	8.41	141.7	5.83
		7.52	146.6	1.35			7.62	144.0	5.29
		7.24	147.0	1.17			6.91	143.4	4.75
		6.94	145.9	4.47			5.63	141.8	—
		6.15	145.7	3.95			5.23	140.4	3.87
	1.7	5.16	145.0	3.21		4.83	140.4	3.22	
		4.28	144.0	2.57		4.35	—	2.81	
		3.43	143.5	2.01		3.97	139.9	—	
		2.47	143.2	1.39		3.51	—	2.17	
		1.56	143.4	0.81		3.18	139.0	—	
1.7	—	—	—	2.80	137.7	1.63			
	—	—	—	2.85	137.7	1.25			
	—	—	—	1.33	137.9	0.71			
	—	—	—	—	—	—			
	—	—	—	—	—	—			

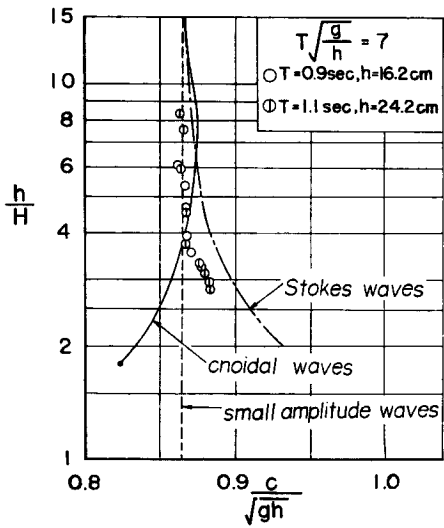


Table 2 Experimental data of wave velocity and wave crest height above still water level (continued).

$T\sqrt{g/h}$	$T$ (sec)	$H$ (cm)	$c$ (cm/s)	$\eta_0$ (cm)	
14	1.7	4.33	118.2	3.01	
		4.13	118.6	2.87	
		3.58	117.7	2.44	
		2.83	116.7	1.82	
		2.23	115.4	1.39	
		1.73	115.0	1.05	
		1.43	115.8	0.85	
		2.0	6.89	141.2	4.76
			6.71	140.9	4.50
	6.57		141.8	4.40	
	6.39		140.6	4.50	
	6.20		140.6	4.16	
	5.57		139.6	3.71	
	4.87		138.5	3.02	
	4.08		138.4	2.50	
	3.48		137.0	2.14	
	2.75		136.5	1.60	
	15	1.6	2.65	—	1.59
			2.00	133.7	1.23
1.48			134.2	0.84	
3.20			105.5	2.29	
3.12			105.4	2.15	
2.92			105.5	2.01	
2.59			104.4	1.85	
2.42			104.3	1.70	
2.14			103.8	1.43	
1.87			103.1	1.24	
1.65			103.1	1.05	
1.46			102.6	0.89	
1.18			101.3	0.70	
0.85	—	0.49			

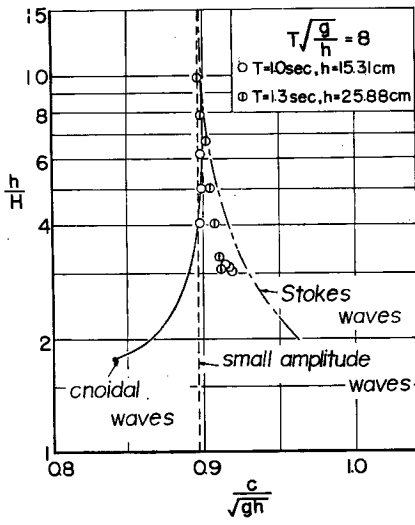


(a)

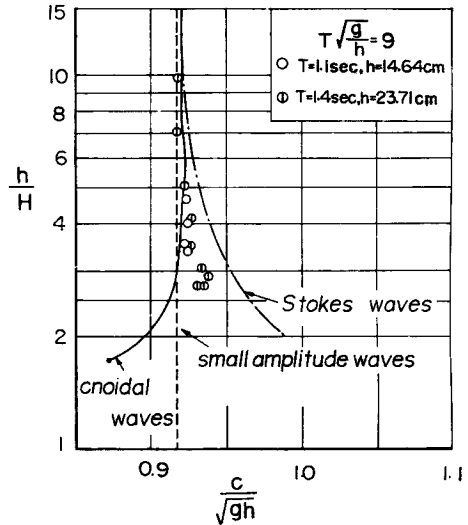


(b)

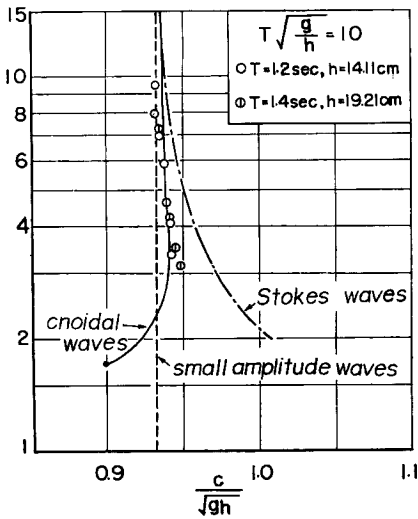
Fig. 7 (1) Comparison between theoretical and experimental values of wave velocity.



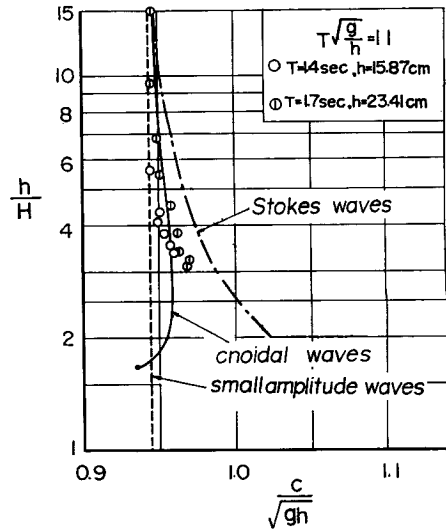
(c)



(d)



(e)



(f)

Fig. 7 (2) Comparison between theoretical and experimental values of wave velocity.

(1)  $T\sqrt{g/h}$  の値が6の場合には、 $h/H > 3.5$  のとき実験値は微小振幅波によく合い、 $h/H$  が3.5を越えると  $c/\sqrt{gh}$  の値は増加し始める。

(2) 実験値が微小振幅波の値より離れて増加し始める  $h/H$  の値は、 $T\sqrt{g/h}$  の値が7のとき4程度、

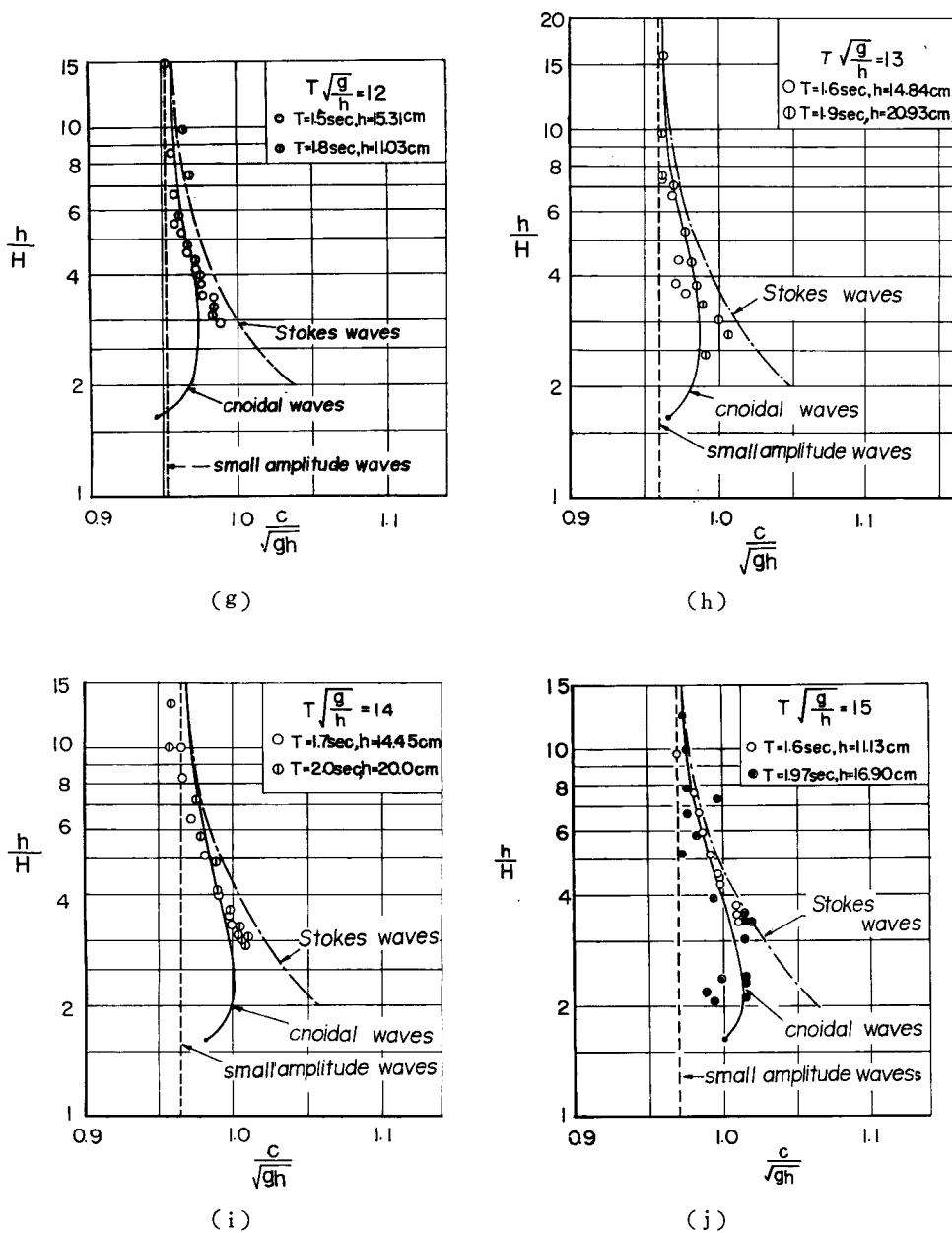
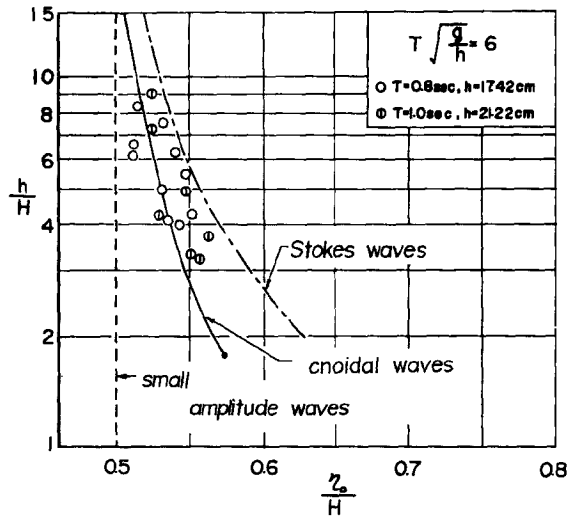


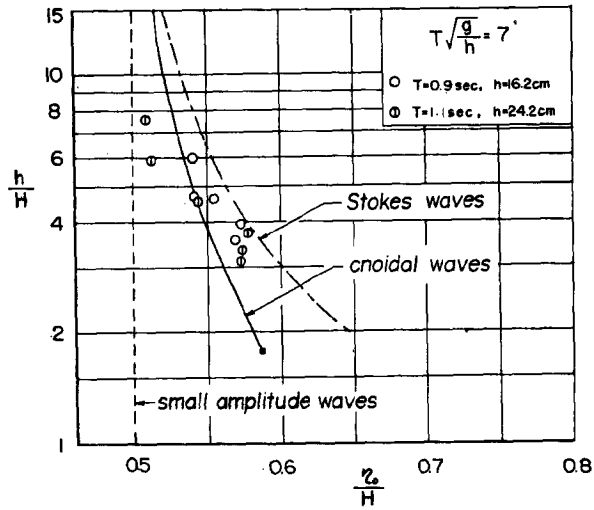
Fig. 7 (3) Comparison between theoretical and experimental values of wave velocity.

8 のとき 5 程度，9 のとき 6 程度，10 のとき 7 程度，14 のとき 10 程度で，この値は  $T\sqrt{g/h}$  が大きくなると少しづつ増大する。

(3) 実験値が  $h/H$  の減少とともに微小振幅波の値より離れたあとは，Stokes 波の曲線と微小振幅波

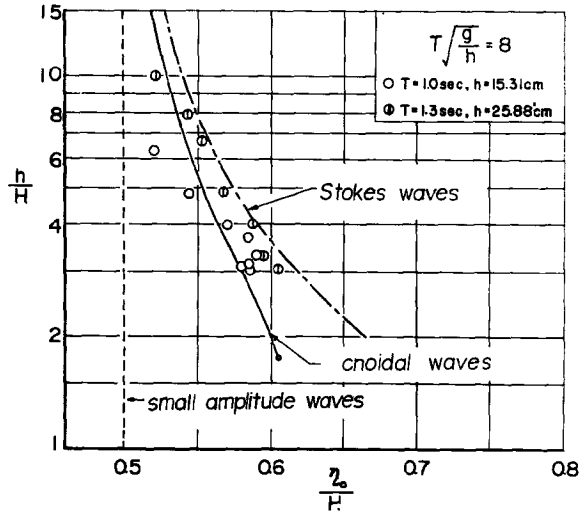


(a)

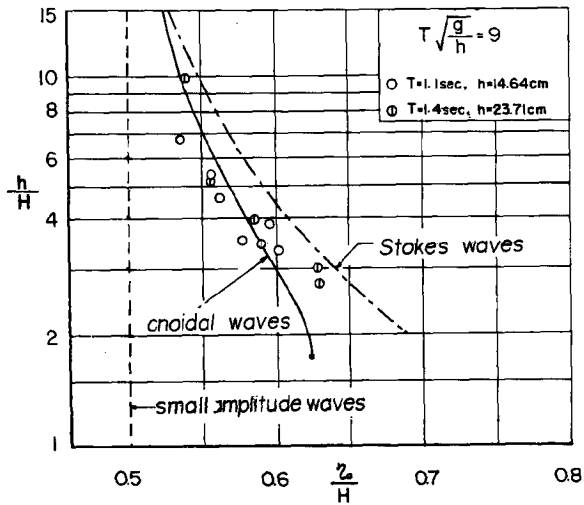


(b)

Fig. 8 (1) Comparison between theoretical and experimental values of wave crest height above still water level.

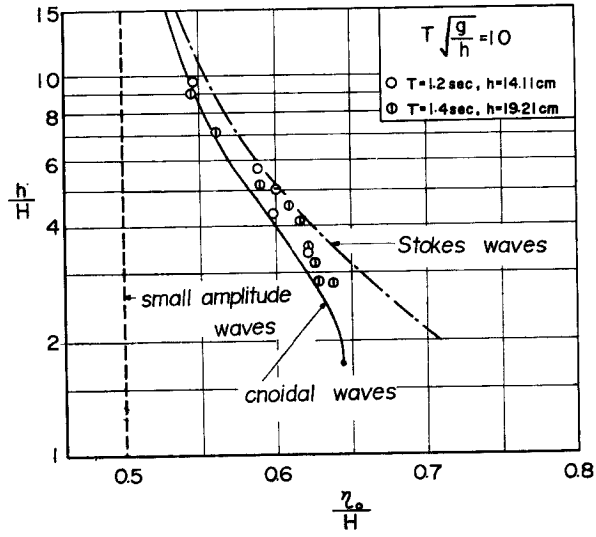


(c)

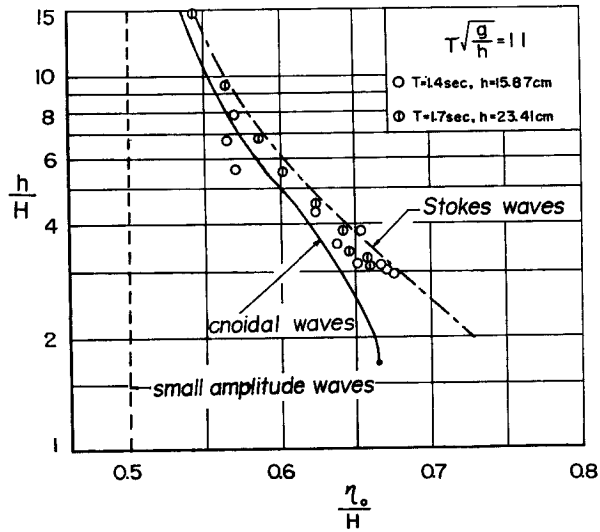


(d)

Fig. 8 (2) Comparison between theoretical and experimental values of wave crest height above still water level.



(e)



(f)

Fig. 8 (3) Comparison between theoretical and experimental values of wave crest height above still water level.

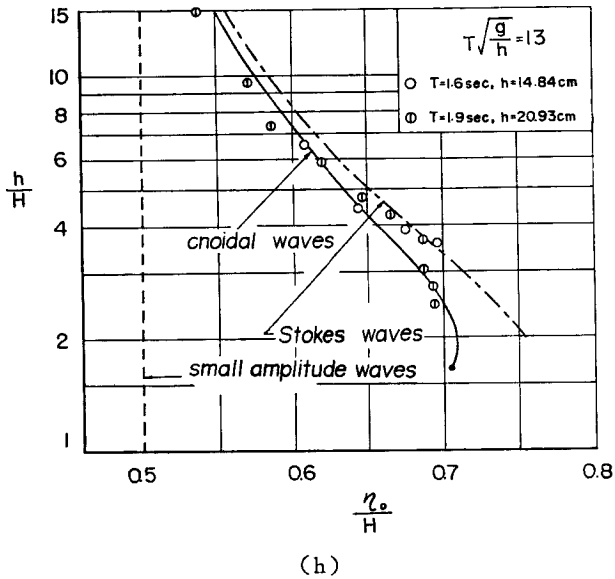
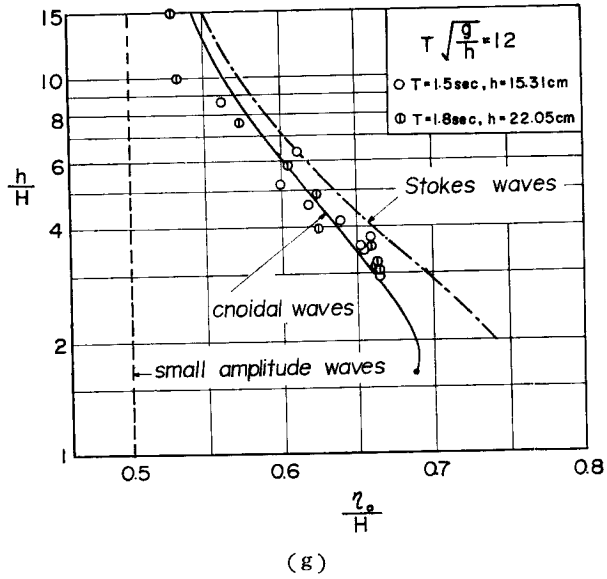
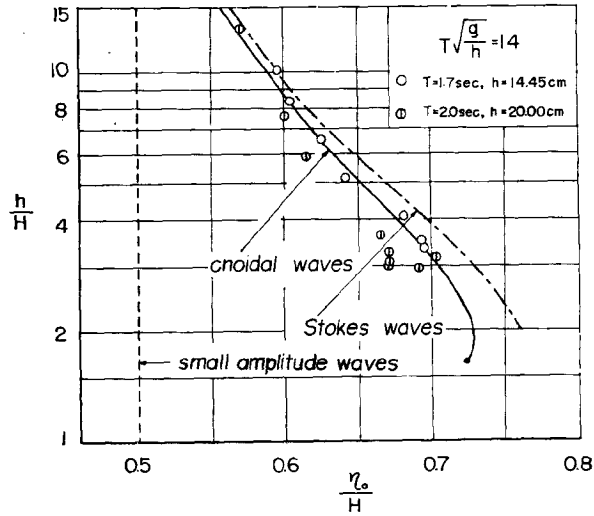
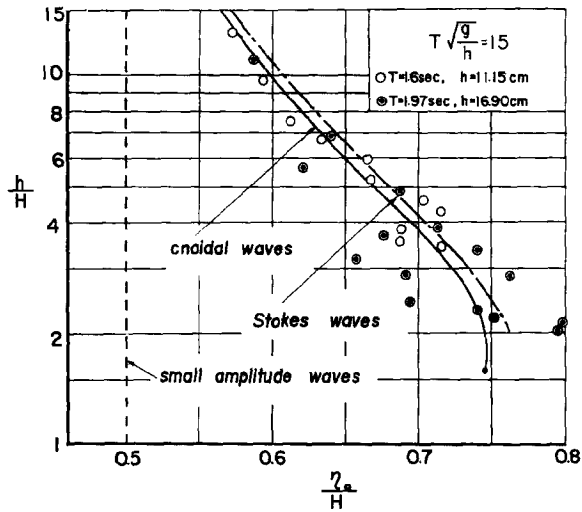


Fig. 8 (4) Comparison between theoretical and experimental values of wave crest height above still water level.



(i)



(j)

Fig. 8 (5) Comparison between theoretical and experimental values of wave crest height above still water level.



の値を示す破線の間中に点描される。Stokes 波の値は一般に実験値より大きい値を与える。

(4)  $T\sqrt{g/h}$  の値が9を越えると、クノイド波の値は  $h/H$  の値がある値以上で実験値と一致するようになる。

b) 平均水面からの波の峯高 Fig. 8は波速と同様、 $T\sqrt{g/h}$  が6~15の場合の実験値について  $\eta_0/H$  と  $h/H$  との関係を点描し、理論曲線と比較したものである。この実験値は、波速の場合と比べて誤差が大きいので、かなり散乱している。一般的な傾向としては、クノイド波の曲線と Stokes 波の曲線の間あたりに点描され、どちらかといえばクノイド波の曲線の方に近い。しかし、実用的な見地から、 $\eta_0/H$  の大きい方の実験値に注目して適合性を検討すれば、むしろ  $T\sqrt{g/h} \leq 15$  の実験範囲では Stokes 波の曲線が適用されるべきであると思われる。岩垣・細見の実験<sup>(9),(10)</sup>では、 $T\sqrt{g/h} \geq 20$  の場合には、逆にクノイド波の曲線の方が適用されるべきであることが認められる。

### 5. クノイド波理論の適用限界

クノイド波および Stokes 波の理論解と実験値を比較した結果、クノイド波理論が実験値と適合しなくなる  $T\sqrt{g/h}$  と  $h/H$  の限界値は、波速の場合、1%程度の相違を許せば Table 3 に示す値になる。この

Table 3 Critical values of  $h/H$  for each value of  $T\sqrt{g/h}$ , over which wave velocity formula in cnoidal wave theory is applicable.

$T\sqrt{g/h}$	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$h/H$	15	10	8	5	4.5	4	3.5	3	3	2

表を参考にして、クノイド波理論における波速式が適用される領域を定めると次式であらわされる。

$$T\sqrt{g/H} \geq 23 \dots\dots\dots (43)$$

すなわち、波速式の適用限界に水深が関係しないことは興味深い。ただし、上式の適用範囲は、実験条件を考えて  $T\sqrt{g/h} \geq 6$  としておく必要があろう。また、上の適用限界は波長に対しても適用できることはもちろんである。

平均水面からの波の峯高に対しては、散乱している実験値の平均を考えると、波速式と同じ適用限界をそのままクノイド波の峯高の式の適用限界とすることができるようである。しかし、実験値の上限を考慮するときは、前述のように、

$$T\sqrt{g/h} \geq 20 \dots\dots\dots (44)$$

とすべきであろう。

### 6. 結 語

この論文では、まず Stokes 波の理論解として、佐藤・田中および Skjelbreia の解を選び、とくに波速と水面条件の誤差の程度について比較検討し、Stokes 波としては Skjelbreia の第3近似解を用いるのが妥当であることを示した後、Stokes 波とクノイド波を比較して、クノイド波の適用限界を検討した。その方法としては、 $T\sqrt{g/h}$  が6から15までの詳細な実験を行ない、波速と平均水面上の波の峯高とを測定して、クノイド波の第2近似解と Stokes 波の第3次近似解および微小振幅波の値と比較した。その結果、1%程度の相違を許せば、波速、波長および波の峯高に対して、 $T\sqrt{g/H} \geq 23$  の領域でクノイド波理論が適用可能であることがわかる。ただし、実験条件を考慮して、 $T\sqrt{g/h} \geq 6$  の場合に限る必要がある。また、もし波の峯高に対して、実用上の見地から、実験値の上限を考慮して適用限界をきめるときは、 $T\sqrt{g/h} \geq 20$  とすべきであることも見出された。この限界は水深・波長比になおすと、 $h/L \leq 0.05$  となる。この限界は

Laitone が提案した  $h/L \leq 0.2$  よりかなり 厳しい。今後は、波速や波の峯高のみでなく、その他の水理特性についても検討して、Stokes 波やクノイド波の理論の適用限界を明確にし、 $T\sqrt{g/h}$  および  $h/H$  の変化に応じた水理特性の挙動を正しく把握する必要がある。

最後にこの研究は文部省特定研究費による研究の一部であることを付記して謝意を表する。

#### 参 考 文 献

- 1) Laitone, E. V. : The Second Approximation to Cnoidal and Solitary Waves, Jour. of Fluid Mechanics, Vol. 9, 1961, pp. 430—444.
- 2) 岩垣雄一, 細見昌彦 : クノイド波に関する研究 (第3報) ——波形, 波速および波長に関する実験——, 京大防災研究所年報, 第9号, 昭41. 3, pp. 637—645.
- 3) 岩垣雄一 : クノイド波に関する研究 (第1報) ——波形こう配および波形について——, 京大防災研究所年報, 第7号, 昭39. 3, pp. 373—386.
- 4) 岩垣雄一 : クノイド波に関する研究 (第2報) ——波速および波長について——, 京大防災研究所年報, 第8号, 昭40. 3, pp. 343—351.
- 5) 岩垣雄一, 細見昌彦 : クノイド波に関する二, 三の実験, 第13回海岸工学講演会講演集, 昭41. 12, pp. 1—8.
- 6) Laitone, E. V. : Limiting Conditions for Cnoidal and Stokes Waves, Jour. of Geophysical Research, Vol. 67, No. 4, 1962, pp. 1555—1564.
- 7) Keulegan, G. H. : Wave Motion, Engineering Hydraulics, Wiley, New York, ed. by H. Rouse, Chapt. 11, 1950, pp. 711—768.
- 8) Wilson, B. W., L. M. Webb and J. A. Hendrickson: The Nature of Tsunamis, Their Generation and Dispersion in Water of Finite Depth, National Science Co., Tech. Rep. No. SN57-2, 1952, pp. 1—50.
- 9) Skjelbreia, L. : Gravity Waves, Stokes' Third Order Approximation, Tables of Functions, Council on Wave Research, The Engineering Foundation, 1959, pp. 1—337.
- 10) Sato, S. : Surface Waves in Shallow Water, Jour. of Research, Public Works Research Institute, Vol. 1, Paper No. 2, 1954.
- 11) Tanaka, K. : On the Sea Waves, Technology Report of Osaka University, Vol. 13, No. 65, 1953.
- 12) 田中 清 : 海の波の解析概論, 海岸工学講演会講演集, 土木学会, 昭30. 11, pp. 17—32.
- 13) 岩垣雄一, 山口正隆 : Stokes 波とクノイド波の適用限界について, 第14回海岸工学講演会講演集, 昭42. 10, pp. 8—16.
- 14) Skjelbreia, L. and J. A. Hendrickson: Fifth Order Gravity Wave Theory, Proc. 7th Conf. on Coastal Eng., 1964, pp. 184—197.
- 15) Dean, R. G. : Stream Function Wave Theory; Validity and Application, Santa Barbara Specialty Conference on Coastal Eng., 1965, pp. 269—299.