

## クノイド波に関する研究 (第 5 報)

—hyperbolic waves について (2)—

岩 垣 雄 一・酒 井 哲 郎

## STUDIES ON CNOIDAL WAVES (FIFTH REPORT)

—ON HYPERBOLIC WAVES (2)—

By Yuichi IWAGAKI and Tetsuo SAKAI

## Synopsis

The previous paper proposed the formulas of various wave characteristics of the new waves named “hyperbolic waves” derived from the cnoidal wave theory under the condition that  $K \geq 3$ , in which  $K$  is the complete elliptic integral of the first kind.

This paper gives firstly the equations of total energy and energy transmission of hyperbolic waves of the second approximation, and proposes the relation between  $K$  and the wave period, wave height and water depth to be applied in the region where the ratio of wave height to water depth is greater than 0.55. This gives more exact values than that proposed in that region in the previous paper. Secondly, as an application of the hyperbolic wave theory, the present paper deals with wave shoaling, that is changes in the wave height, wave crest height above the still water level, and wave length or wave velocity, when the waves proceed into shallow water from deep water. The theoretical curves are then compared with the results of existing experiments.

## 1. ま え が き

第 1 報<sup>1)</sup> および第 2 報<sup>2)</sup> では、1961 年に摂動法によって求めたクノイド波に関する Laitone の理論解<sup>3)</sup> を用い、通常の波の計算に利用されるように、波の周期と水深および波高を与えて、クノイド波の波形、波速および波長を求める図表を作成し、第 3 報<sup>4)</sup> では、Stokes 波理論が適用できず、クノイド波の理論を用いなければならないといわれている水深・波長比の小さい波について実験を行ない、波形、波速、波長および波の谷から静水面までの高さを測定して、Skjelbreia<sup>5)</sup> が求めた Stokes 波の 3rd order のものや、上述の図表によって求められる Laitone のクノイド波ならびに Airy の微小振幅波のものと、どの程度の適合性があるかを検討した<sup>6)</sup>。さらに第 4 報<sup>7)</sup> では、クノイド波の理論における第 1 種完全だ円積分  $K$  の値が 3 以上の場合に Jacobi のだ円関数が近似的に双曲線関数であらわされることに注目して、クノイド波の理論式を初等関数表示し、それを hyperbolic waves と名づけ、この波の水理特性、すなわち、波形、波速、波長、圧力および水粒子速度に関する式を導くとともに、これらの第 1 近似にもとづいて hyperbolic waves のエネルギーおよびエネルギーの伝達に関する第 1 近似式を求め、さらにこの波の適用限界を示した。

この論文は、第 5 報として、クノイド波の初等関数表示である hyperbolic waves の理論式を用いて、波のエネルギーおよびエネルギーの伝達に関する第 2 近似式<sup>8)</sup> を求めた結果を示すとともに、波高・水深比が大きい場合の第 1 種完全だ円積分  $K$  と、波の周期、波高および水深との関係を与える前報で示した近似式の修正式を提案する。さらに、これらの結果を用い、hyperbolic waves の理論の応用例として、沖波波形勾

配および水深・波長比がともに小さい範囲での、水深変化にともなう波高の変化の理論曲線を求め、波高が水深の減少とともに増加する割合が、微小振幅波理論によるものより急激であるという実験事実を説明する。また、波高変化と同様に水深変化による静水面からの波の峯の高さの変化の理論曲線を求めるとともに、従来、微小振幅波理論によるものしかなかった水深変化にともなう波長や波速の変化の理論曲線をも求める。

2. Hyperbolic waves のエネルギーおよびエネルギーの伝達に関する第2近似式

(1) hyperbolic waves のエネルギーに関する第2近似式

a) 位置のエネルギー いま座標系を Fig. 1 に示すようにとると、単位面積当たりの波のもつ平均の位置のエネルギー  $E_p$  は、

$$E_p = \frac{1}{2} \rho g \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} (\eta - \delta)^2 dx \dots\dots\dots(1)$$

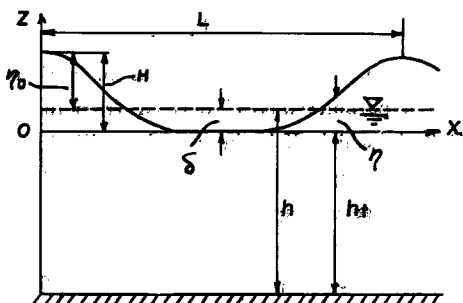


Fig. 1 Coordinate System.

であらわされる。ここに、 $L$ は波長をあらわす。一方、hyperbolic waves の波形の第2近似<sup>7)</sup>は、

$$\frac{\eta}{H} = \text{sech}^2\left(\frac{2K}{L} X\right) - \frac{3}{4} \frac{H}{h_t} \text{sech}^2\left(\frac{2K}{L} X\right) \left\{ 1 - \text{sech}^2\left(\frac{2K}{L} X\right) \right\}, \quad X = x - ct \dots\dots\dots(2)$$

であらわされるから、(2)式を(1)式に代入し、 $K \geq 3$  の条件から  $\tanh K \approx 1$  であることを考慮すると、hyperbolic waves の単位面積当たりの平均の位置エネルギーの第2近似が次式のように得られる。

$$E_p = \frac{1}{3} \rho g H^2 \frac{1}{K} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{K} + \frac{H}{h_t} \left( -\frac{3}{10} + \frac{3}{4} \frac{1}{K} \right) + \left( \frac{H}{h_t} \right)^2 \left( \frac{27}{560} - \frac{15}{288} \frac{1}{K} \right) \right\} \dots\dots\dots(3)$$

b) 運動のエネルギー 単位面積当たりの波のもつ平均の運動のエネルギー  $E_k$  は、

$$E_k = \frac{1}{2} \rho \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-h_t}^{\eta} (u^2 + w^2) dx \cdot dz \dots\dots\dots(4)$$

であらわされる。hyperbolic waves の水粒子の速度  $u$  および  $w$  の第2近似<sup>7)</sup>は、それぞれ

$$\begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{g h_t}} &= \frac{H}{h_t} \cdot \text{sech}^2\left(2K \frac{X}{L}\right) \left[ 1 - \frac{5}{4} \frac{H}{h_t} - \frac{3}{2} \frac{H}{h_t} \left\{ 2 \frac{z}{h_t} + \left( \frac{z}{h_t} \right)^2 \right\} \right] \\ &+ \left( \frac{H}{h_t} \right)^2 \text{sech}^4\left(2K \frac{X}{L}\right) \left[ \frac{5}{4} + \frac{9}{4} \left\{ 2 \frac{z}{h_t} + \left( \frac{z}{h_t} \right)^2 \right\} \right] \\ &- \frac{H}{h_t} \cdot \frac{1}{K} \left\{ 1 - \frac{H}{h_t} \left( \frac{1}{K} - \frac{1}{4} \right) \right\}, \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{w}{\sqrt{g h_t}} &= \left( 1 + \frac{z}{h_t} \right) \sqrt{3} \cdot \left( \frac{H}{h_t} \right)^{3/2} \text{sech}^2\left(2K \frac{X}{L}\right) \tanh\left(2K \frac{X}{L}\right) \\ &\times \left[ 1 - \frac{7}{8} \frac{H}{h_t} - \frac{1}{2} \frac{H}{h_t} \left\{ 2 \frac{z}{h_t} + \left( \frac{z}{h_t} \right)^2 \right\} \right] \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2} \frac{H}{h_t} \operatorname{sech}^2\left(2 \frac{KX}{L}\right) \left\{1 - 6 \frac{z}{h_t} - 3 \left(\frac{z}{h_t}\right)^2\right\} \dots\dots\dots(6)$$

であらわされるから、(2)、(5) および (6) 式を (4) 式に代入すれば、 $\tanh K \approx 1$  を考慮し、かつ  $(H/h_t)^3$  以下の項を無視して、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-h_t}^{\eta} u^2 dx \cdot dz &= \frac{1}{3} \rho g H^2 \frac{1}{K} \left\{1 - \frac{3}{2} \frac{1}{K} + \frac{H}{h_t} \left(-\frac{1}{10} - \frac{3}{4} \frac{1}{K} + \frac{3}{2} \frac{1}{K^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{H}{h_t}\right)^2 \left(\frac{623}{560} + \frac{11}{20} \frac{1}{K} + \frac{1}{K^2}\right)\right\}, \\ \frac{1}{2} \rho \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-h_t}^{\eta} w^2 dx \cdot dz &= \frac{1}{3} \rho g H^2 \frac{1}{K} \left\{\frac{1}{5} \frac{H}{h_t} - \frac{73}{140} \left(\frac{H}{h_t}\right)^2\right\} \end{aligned}$$

がえられるから、hyperbolic waves の単位面積当たりの平均の運動エネルギーの第2近似は次式のようにあらわされる。

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{3} \rho g H^2 \frac{1}{K} \left\{1 - \frac{3}{2} \frac{1}{K} + \frac{H}{h_t} \left(\frac{1}{10} - \frac{3}{4} \frac{1}{K} + \frac{3}{2} \frac{1}{K^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{H}{h_t}\right)^2 \left(\frac{331}{560} + \frac{11}{20} \frac{1}{K} + \frac{1}{K^2}\right)\right\}. \dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

c) 全エネルギー hyperbolic waves の単位時間当たりの平均の全エネルギーの第2近似  $E$  は、(3) および (7) 式より、

$$\begin{aligned} E = E_p + E_k &= \frac{2}{3} \rho g H^2 \frac{1}{K} \left\{1 - \frac{3}{2} \frac{1}{K} + \frac{H}{h_t} \left(-\frac{1}{10} + \frac{3}{4} \frac{1}{K^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{H}{h_t}\right)^2 \left(\frac{179}{560} + \frac{239}{960} \frac{1}{K} + \frac{1}{2} \frac{1}{K^2}\right)\right\} \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

となる。

(2) **hyperbolic waves** のエネルギーの伝達に関する第2近似式

単位時間に単位幅を通過して輸送される平均の波のエネルギー  $\bar{W}$  は、次式によってあらわされる<sup>9)</sup>。

$$\bar{W} = -\frac{\rho}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-h_t}^{\eta} u \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} dz dt. \dots\dots\dots(9)$$

ここに、 $T$  は波の周期、 $\varphi$  は速度ポテンシャルである。ベルヌーイの定理により、(9) 式は、

$$\bar{W} = \frac{\rho}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-h_t}^{\eta} \left\{ \frac{1}{2} (u^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} + gz \right\} \cdot u dz dt \dots\dots\dots(10)$$

と変形される。hyperbolic waves の圧力  $p$  の第2近似<sup>7)</sup>は、

$$\frac{p}{\rho g H} = \frac{\eta - z}{H} - \frac{3}{4} \left(\frac{H}{h_t}\right)^2 \left\{2 \frac{z}{h_t} + \left(\frac{z}{h_t}\right)^2\right\} \left\{2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{2K}{L} X\right) - 3 \operatorname{sech}^4\left(\frac{2K}{L} X\right)\right\} \dots\dots\dots(11)$$

であらわされるから、(2)、(5)、(6) および (11) 式を (10) 式に代入して、 $\tanh K \approx 1$  を考慮し、 $(H/h_t)^3$  以下の項を無視すると、

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-h_t}^{\eta} \frac{1}{2} u^2 dz dt &= \rho g H^2 \sqrt{g h_t} \cdot \frac{1}{K} \left\{\frac{H}{h_t} \left(\frac{4}{15} - \frac{1}{K} + \frac{1}{K^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{H}{h_t}\right)^2 \left(-\frac{1}{7} - \frac{3}{20} \frac{1}{K} + \frac{7}{4} \frac{1}{K^2}\right)\right\}, \\ \frac{\rho}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-h_t}^{\eta} \frac{1}{2} u \cdot w^2 dz dt &= \rho g H^2 \sqrt{g h_t} \cdot \frac{1}{K} \left(\frac{H}{h_t}\right)^2 \left(\frac{4}{105} - \frac{1}{15} \frac{1}{K}\right), \\ \frac{\rho}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-h_t}^{\eta} \left(\frac{p}{\rho} + gz\right) u \cdot dz dt &= \rho g H^2 \sqrt{g h_t} \cdot \frac{1}{K} \left\{\frac{2}{3} - \frac{1}{K} + \frac{H}{h_t} \left(\frac{2}{15} - \frac{2}{3} \frac{1}{K} + \frac{1}{K^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{H}{h_t}\right)^2 \left(-\frac{17}{56} + \frac{23}{240} \frac{1}{K} + \frac{5}{12} \frac{1}{K^2}\right)\right\} \end{aligned}$$

がえられるから, hyperbolic waves の単位時間に単位幅を通過して輸送される平均のエネルギーの第2近似  $\bar{W}$  は, 次式のようにあらわされる。

$$\bar{W} = \frac{2}{3} \rho g H^2 \sqrt{g h_t} \cdot \frac{1}{K} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{K} + \frac{H}{h_t} \left( \frac{3}{5} - \frac{3}{2} \frac{1}{K} + \frac{3}{K^2} \right) + \left( \frac{H}{h_t} \right)^2 \left( -\frac{49}{80} - \frac{29}{160} \frac{1}{K} + \frac{13}{4} \frac{1}{K^2} \right) \right\}. \dots\dots\dots(12)$$

**3. 第1種完全だ円積分  $K$  と波の周期, 波高および水深との関係**

第4報<sup>7)</sup>において,  $K$  と  $T\sqrt{g/h}$  および  $h/H$  との関係, 第2報<sup>2)</sup>の Fig. 2 のような図ではなくて数式で表現することを試み,  $K \geq 3$  では  $K/T\sqrt{g/h}$  と  $H/h$  との関係が Fig. 2 の実線で示され, この関係を次式のように近似的にあらわした。

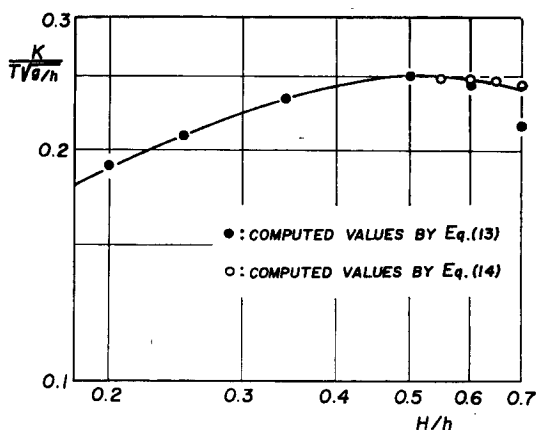


Fig. 2 Relationship between  $K/T\sqrt{g/h}$  and  $H/h$ .

$$\frac{K}{T\sqrt{g/h}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left( \frac{H}{h} \right)^{1/2} \left\{ 1 - 1.3 \left( \frac{H}{h} \right)^2 \right\}^{1/2}. \dots\dots\dots(13)$$

Fig. 2 に示した黒丸は (13) 式にもとづいて求めた値であって,  $H/h \leq 0.55$  の範囲では実線とよく一致しているが,  $H/h > 0.55$  ではやや小さい値を与える。そのため,  $H/h > 0.55$  の範囲においては,  $K/T\sqrt{g/h}$  と  $H/h$  との関係として, 次式のような近似式を与えた。

$$\frac{K}{T\sqrt{g/h}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left( \frac{H}{h} \right)^{1/2} \left\{ 1 - 0.540 \left( \frac{H}{h} \right)^{3/2} \right\}. \dots\dots\dots(14)$$

Fig. 2 に示した白丸は (14) 式を用いて求めた値であって,  $H/h > 0.55$  の範囲では実線とほぼ一致している。したがって, 第1種完全だ円積分  $K$  と波の周期, 波高および水深との関係は,  $H/h \leq 0.55$  の範囲では (13) 式,  $H/h > 0.55$  の範囲では (14) 式で近似することにする。

**4. 水深変化にともなう波高変化**

(1) hyperbolic waves の水深変化にともなう波高変化式

水深変化にともなう波高変化は, 勾配をもつ海底上での波の運動が, 同じ水深の水平な海底上での波の運動と同じであると仮定すると, 水深が変わっても単位時間に輸送される波のエネルギーが一定であるとして求めることができる。以上の関係を式であらわすと次のようになる。

$$W = \bar{W}_0. \dots\dots\dots(15)$$

ここに、添字0は深海における値であることをあらわす。この場合、海底摩擦などによるエネルギー損失や、波の屈折および傾斜した海底面による波の反射を無視している。

いま、(15)式の左辺の $\bar{W}$ として上述した hyperbolic waves の(12)式を用い、右辺 $\bar{W}_0$ として Méhauté-Webb<sup>10)</sup>の求めた Skjelbreia<sup>9)</sup>の Stokes 波の第3次近似解を用いて計算した $W$ において、 $h$ を $\infty$ とおいた次式を用いる。

$$W_0 = \frac{\rho T^3}{32\pi} \left(\frac{L_0}{T^2}\right)^4 \lambda_0^2 \left\{ 4 \left( 1 + \frac{3}{4} \lambda_0^2 \right) \right\}. \dots\dots\dots(16)$$

ここに、 $\lambda_0$ および $L_0$ は深海波の $\lambda$ および $L$ であって、次式であらわされる。

$$\frac{3}{8} \lambda_0^3 + \lambda_0 = \pi \frac{H_0}{L_0}, \dots\dots\dots(17)$$

$$\frac{L_0}{T^2} = \frac{g}{2\pi} (1 + \lambda_0^2). \dots\dots\dots(18)$$

また、 $h_c$ は第4報<sup>7)</sup>の(12)式を用いると、次式のようにあらわされる。

$$\frac{h_c}{H} = \frac{h}{H} - \frac{\delta}{H} = \frac{h}{H} \left\{ 1 - \frac{1}{K} \frac{H}{h} + \frac{1}{12K} \left( \frac{H}{h} \right)^2 \right\}. \dots\dots\dots(19)$$

(15)式の計算に(13)式を用いると、結局次式のように波高比 $H/H_0$ が沖波波形勾配 $H_0/L_0$ をパラメーターとし $h/L_0$ の関数としてあらわされる。

$$\begin{aligned} \frac{H}{H_0} &= \frac{3}{16} \left( \frac{1}{4} \right)^{1/3} \left( \frac{h}{L_0} \right)^{-1} \left( \frac{H_0}{L_0} \right)^{1/3} \left\{ 1 + \pi^2 \left( \frac{H_0}{L_0} \right)^2 \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{K} \frac{H}{h} + \frac{1}{12K} \left( \frac{H}{h} \right)^2 \right\}^{-1/3} \\ &\times \left\{ 1 - 1.3 \left( \frac{H}{h} \right)^2 \right\}^{1/3} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{K} + \frac{H}{h_c} \left( \frac{3}{5} - \frac{5}{2} \frac{1}{K} + \frac{3}{K^2} \right) \right. \\ &\left. + \left( \frac{H}{h_c} \right)^2 \left( -\frac{49}{80} - \frac{29}{160} \frac{1}{K} + \frac{13}{4} \frac{1}{K^2} \right) \right\}^{-2/3}. \dots\dots\dots(20) \end{aligned}$$

ただし、 $H/h > 0.55$ の範囲では(13)式のかわりに(14)式を用いるから、(20)式の $\{1 - 1.3(H/h)^2\}^{1/3}$ の項は $\{1 - 0.540(H/h)^{3/2}\}^{2/3}$ でおきかえられる。ここで $H/h$ は、

$$\frac{H}{h} = \frac{H}{H_0} \cdot \frac{H_0}{L_0} \cdot \left( \frac{h}{L_0} \right)^{-1} \dots\dots\dots(21)$$

と書きかえられ、 $K$ は(13)あるいは(14)式、 $h_c/H$ は(19)式であらわされる。いま $W_0$ として微小振幅波理論を用いると、(20)式の $\{1 + \pi^2(H_0/L_0)^2\}$ を1とすることができ、さらに $H/h$ が小さいとすると、それ以下の $\{ \}$ もすべて1となって次式が得られる。

$$\frac{H}{H_0} = \frac{3}{16} \left( \frac{1}{4} \right)^{1/3} \left( \frac{h}{L_0} \right)^{-1} \left( \frac{H_0}{L_0} \right)^{1/3}. \dots\dots\dots(22)$$

砕波限界としてはLaitone<sup>9)</sup>による最高波をあらわす次式を用いることにする。

$$\frac{H_b}{h_c} = 0.73 \dots\dots\dots(23)$$

(23)式を $H_b/H_0$ と $h_b/L_0$ の関係に直すため、つぎのような変形を行なう。すなわち、(19)式において $(H/h)^2$ の項を無視すると $h_c = h \{1 - (1/K)(H/h)\}$ であらわされるから、(23)式は

$$\frac{H_b}{h_b} \left( 1 - \frac{1}{K} \frac{H_b}{h_b} \right)^{-1} = 0.73 \dots\dots\dots(24)$$

となる。砕波点付近では $H/h$ がほぼ1/2となることと<sup>2)</sup>、微小振幅波理論を用いると $T = (2\pi L_0/g)^{1/2}$ であらわされることから、(13)あるいは(14)式で近似される $K$ は次式のようになる。

$$K = 0.631 \left( \frac{L_0}{h_b} \right)^{1/2}. \dots\dots\dots(25)$$

結局、碎波限界 (23) 式は、つぎのように  $H_0/L_0$  をパラメーターとして、 $H_b/H_0$  と  $h_b/L_0$  との関係であらわされる。

$$\frac{H_b}{H_0} = \frac{0.73 (H_0/L_0)^{-1} (h_b/L_0)}{1 + 1.16 (h_b/L_0)^{1/2}} \dots\dots\dots(26)$$

また、hyperbolic waves の適用限界<sup>7)</sup>は (13) 式から、

$$K = \frac{\sqrt{3}}{4} T \sqrt{\frac{g}{h}} \left(\frac{H}{h}\right)^{1/2} \left\{1 - 1.3 \left(\frac{H}{h}\right)^2\right\}^{1/2} = 3 \dots\dots\dots(27)$$

であり、変形して、 $H/H_0$  と  $h/L_0$  の関係に書きあらためると次式のようになる。

$$\frac{\pi}{8} \frac{H_0 H}{L_0 H_0} \left(\frac{h}{L_0}\right)^{-2} - 1.3 \times \frac{\pi}{8} \left(\frac{H_0}{L_0}\right)^3 \left(\frac{H}{H_0}\right)^3 \left(\frac{h}{L_0}\right)^{-4} = 3 \dots\dots\dots(28)$$

(20) 式は、右辺に (21) 式でわかるように  $H/H_0$  を含んでいるため、解析的には解けないので、最初右辺の  $H/H_0$  に、(22) 式によって求められる値を与え、(20) 式で求められた  $H/H_0$  の値を、また右辺の  $H/H_0$  として代入するという、くり返し逐次計算を電子計算機を用いて行なった。その結果を図示したの

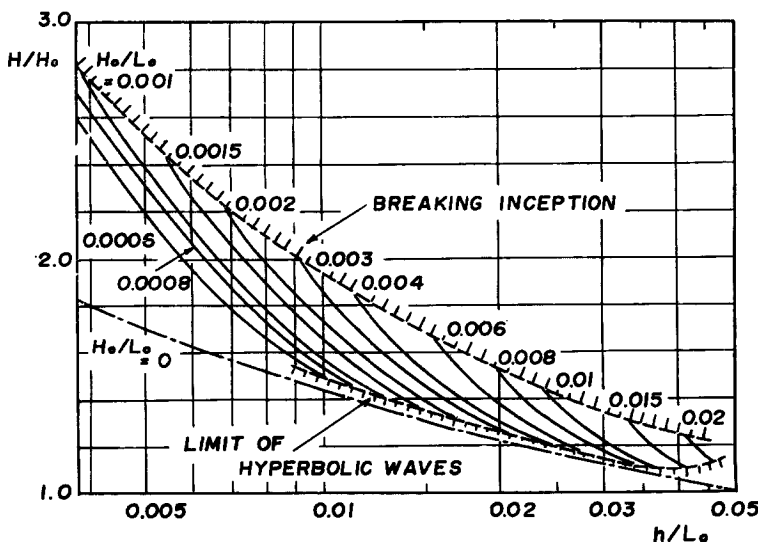


Fig. 3 Wave height change in shoaling water based on hyperbolic wave theory (2nd approximation).

が Fig. 3 である。これまで微小振幅波理論によるもの以外に得られていなかった  $H_0/L_0$  および  $h/L_0$  がともに小さい範囲での、水深変化による波高変化の理論曲線が求められたことになる。なお、それぞれの  $H_0/L_0$  に対して、(26) 式および (28) 式で示される碎波限界と hyperbolic waves の適用限界の曲線が描けるから、この2つの曲線との交点をもって、それぞれ碎波限界および適用限界とした。

Méhauté-Webb は (15) 式の左辺に、次式で示される水深・波長比の大きい場合に適用される Stokes 波の第3次近似

$$\bar{W} = \frac{\pi \rho C_h^2 \lambda^2}{8k^2 T} \frac{1}{S_h^2} \left[ 4(S_h \cdot C_h + kh) + \lambda^2 \left\{ \frac{(S_h C_h + kh)}{4S_h^6} (-20C_h^6 + 16C_h^4 + 4C_h^2 + 9) + \frac{S_h C_h}{2S_h^4} (16C_h^4 + 2C_h^2 + 9) \right\} \right] \dots\dots\dots(29)$$

を用いて波高変化を計算した<sup>10)</sup>。ここに、

$$S_h = \sinh kh, \dots\dots\dots(30)$$

$$C_h = \cosh kh \dots\dots\dots(31)$$

であり、 $k$  は  $2\pi/L$ ,  $C_3$  は波速の第3次近似であって次式であらわされる。

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{L}{T}\right)^2 &= C_3^2 = \frac{g}{k} \tanh kh \cdot (1 + B\lambda^2), \\ B &= \frac{8C_h^4 - 8C_h^2 + 9}{8S_h^4}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(32)$$

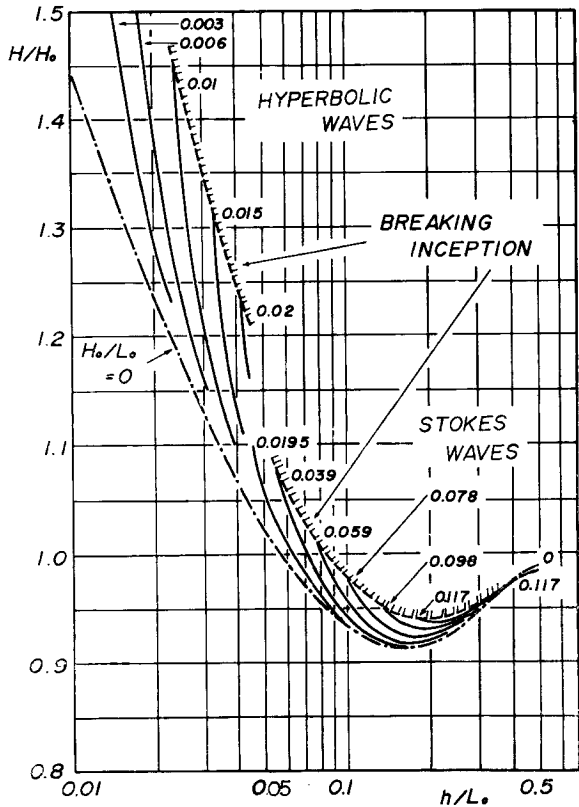


Fig. 4 Wave height change in shoaling water based on hyperbolic wave and Stokes wave theories.

また  $\lambda$  は次式であらわされる。

$$\left. \begin{aligned} \lambda^3 \cdot B_{33} + \lambda &= \frac{\pi H}{L}, \\ B_{33} &= \frac{3(8C_h^6 + 1)}{64S_h^6}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(33)$$

Méhauté-Webb は波高変化の計算結果を図示する場合に、パラメーターとして  $H_0/T^2$  を用いているので、 $H_0/T^2$  が round number であっても、 $H_0/L_0$  に換算すると round number にはならない。

いま、Fig. 3 で示される hyperbolic waves の理論式を用いた波高変化の曲線と、Méhauté-Webb<sup>10)</sup> の Stokes 波を用いた波高変化の曲線を比較するため、 $h/L_0$  が 0.01 から 0.5 までの範囲で、2つの理論曲線

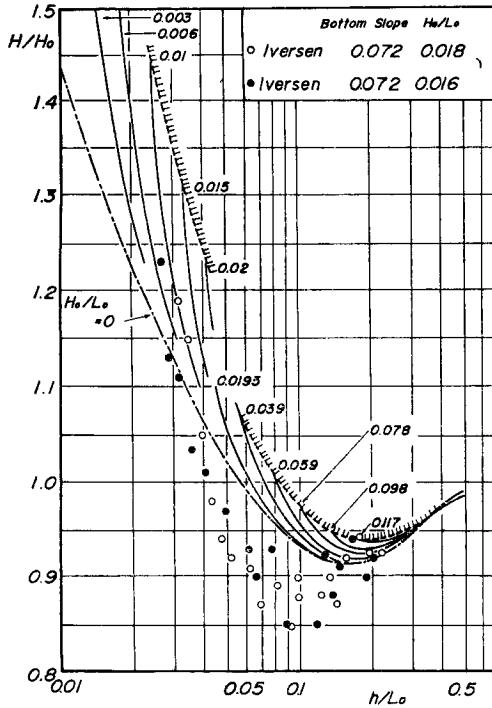


Fig. 5 Comparison between theoretical curves and experimental data of wave height change in shoaling water (1).

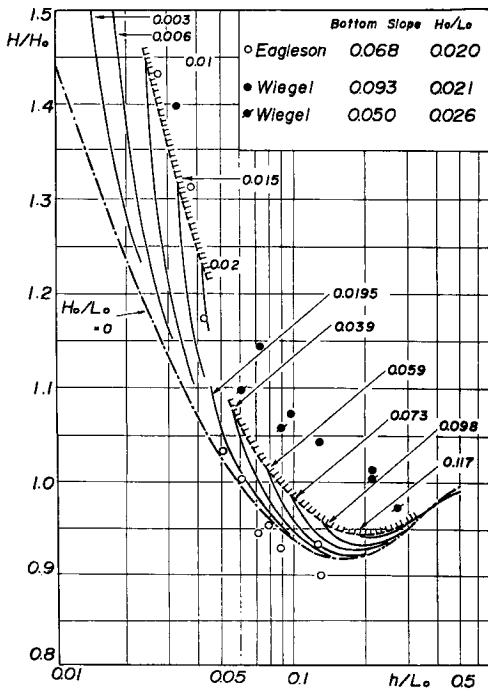


Fig. 6 Comparison between theoretical curves and experimental data of wave height change in shoaling water (2).



Fig. 7 Comparison between theoretical curves and experimental data of wave height change in shoaling water (3).

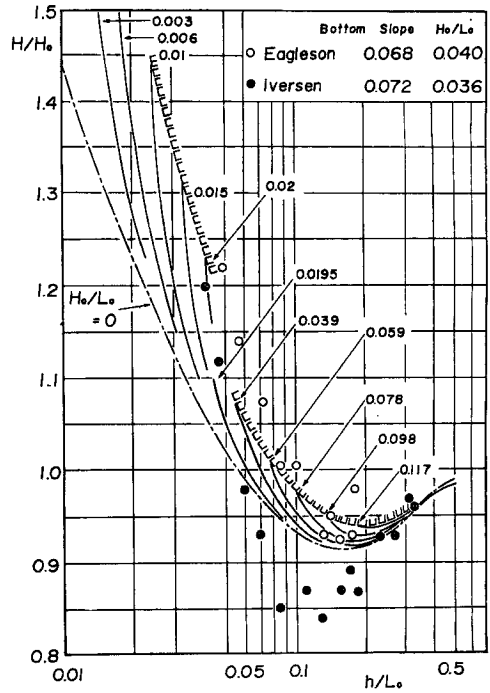
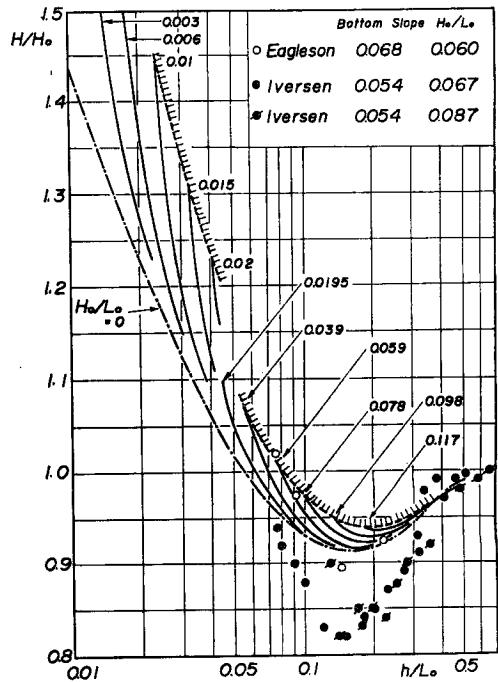


Fig. 8 Comparison between theoretical curves and experimental data of wave height change in shoaling water (4).



を図示したのが Fig. 4 である。2つの理論曲線群にはパラメーター  $H_0/L_0$  に共通した値がなく, hyperbolic waves によるものの方はその適用限界によって範囲が限られ, 他方 Stokes waves によるものは  $H/H_0$  の値が 1.1 のところで計算結果が終っているのので, 両者の相違を直接比較することができない。しかし hyperbolic waves による曲線群と Stokes 波による曲線群とは, ほぼ同じ傾向を示しているようである。

## (2) 実験値との比較

水深変化にともなう波高変化に関する従来の実験結果として, Wiegel<sup>11)</sup>, Iversen<sup>12)</sup> および Eaglson<sup>13)</sup> の結果を, 理論曲線と比較するため, Fig. 4 の理論曲線とともに図示したのが Fig. 5 ~ Fig. 8 である。Fig. 5 には  $H_0/L_0$  が 0.02 未満のもの, Fig. 6 には 0.02 から 0.03 までのもの, Fig. 7 には 0.03 から 0.04 までのもの, Fig. 8 には 0.04 以上のものがプロットしてある。水深・波長比の大きい Méhauté-Webb による Stokes 波の理論曲線が存在する領域では, Eaglson の実験結果は, 実験値自体に変動があるものの, 傾向としては理論曲線とほぼ一致しているのに対して, Iversen の実験結果は理論曲線よりかなり小さな値を示しており, 反対に Wiegel の実験結果は理論曲線より大きな値を示している。

著者らによる hyperbolic waves の理論曲線が存在する水深・波長比の小さい領域では, 従来の実験結果が少なく, 十分に検討することはできないが, 例えば, Fig. 6 の Eaglson の  $H_0/L_0=0.020$  に対する実験結果は理論曲線とよく一致しており, また Fig. 5 の Iversen の  $H_0/L_0=0.018$  および 0.016 の場合の実験結果や Fig. 7 の Eaglson の  $H_0/L_0=0.040$  に対する実験結果および Iversen の  $H_0/L_0=0.036$  に対する実験結果は, その波高変化の傾向が理論曲線とよく一致していることがわかる。従来  $H_0/L_0$  と  $h/L$  がともに小さい範囲では微小振幅波理論による理論曲線しかなく, 水深が減少するにつれて波高が急激に増加する事実は, いままで十分に説明されないままであったが, 著者らが hyperbolic waves の第 2 近似を用いて導いた水深変化による波高変化の理論曲線は, 十分に上述の実験事実を説明し得るものと言えよう。

## 5. 水深変化にともなう静水面からの波の峯高の変化

すでに, 第 1 報<sup>1)</sup> の Fig. 4 および第 3 報<sup>4)</sup> の Fig. 6 に示されているように, クノイド波の波の谷から平均静水面までの距離  $\delta$  は半波高よりも小さい。ここでは, hyperbolic waves の理論式を用いて, 沖波波形勾配および水深・波長比がともに小さい場合に, 静水面からの波の峯高が水深の変化とともにどのように変化するかを理論的に求めることにする。

hyperbolic waves の関係式を用いると, 第 4 報<sup>7)</sup> の (12) 式より, 静水面からの波の峯高の第 2 近似は, 次式のようにあらわされる。

$$\frac{\eta_0}{H} = \frac{H-\delta}{H} = 1 - \frac{\delta}{H} = 1 - \frac{1}{K} \left( 1 - \frac{1}{12} \frac{H}{h} \right) \dots \dots \dots (34)$$

(34) 式の  $K$  は,  $H/h \leq 0.55$  のときは (13) 式,  $H/h > 0.55$  においては (14) 式によって近似される。また, 周期  $T$  は近似的に  $(2\pi L_0/g)^{1/2}$  であらわされ,  $H/h$  は (21) 式のように書きなおされるから, (34) 式の右辺は結局  $H/H_0$ ,  $H_0/L_0$  および  $h/L_0$  であらわされる。 $H/H_0$  は (20) 式および Fig. 3 によって,  $H_0/L_0$  をパラメーターとして,  $h/L_0$  の関数としてすでに求められているから, (34) 式の  $\eta_0/H$  は,  $H_0/L_0$  をパラメーターとし  $h/L_0$  の関数として与えることができる。その結果を図示したのが Fig. 9 である。Fig. 9 を見てわかるように, 水深・波長比が小さい範囲では, 沖波波形勾配が 0.02 より小さい波の峯高  $\eta_0$  は, すでに半波高より大きく, 水深の減少とともにさらに増加して碎波にいたっている。

## 6. 水深変化にともなう波長および波速の変化

水深・波長比が小さい範囲での水深変化にともなう波長および波速の変化については, 微小振幅波理論による理論曲線しかない。そこで, hyperbolic waves の理論式を用いた水深変化にともなう波長および波速の変化の理論曲線を求めてみることにする。

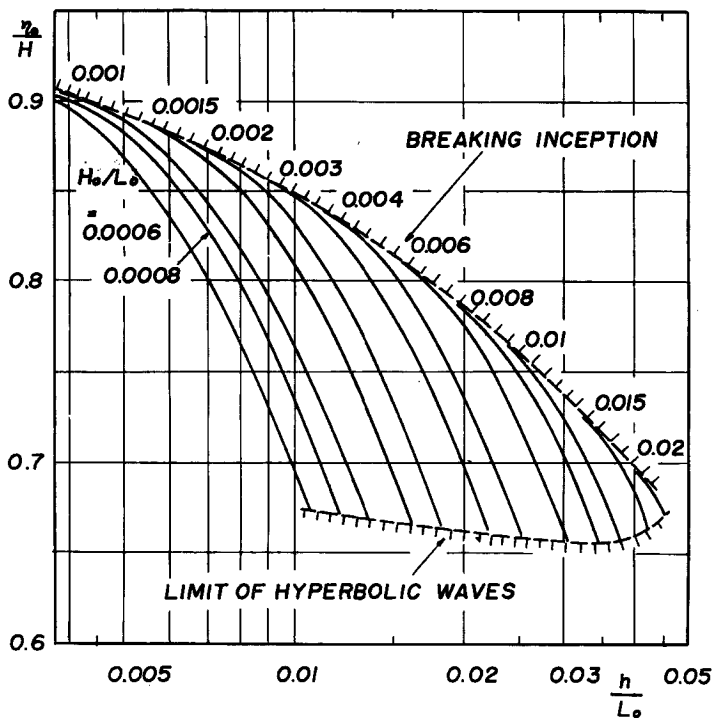


Fig. 9 Change of wave crest height above still water level in shoaling water based on hyperbolic wave theory (2nd approximation).

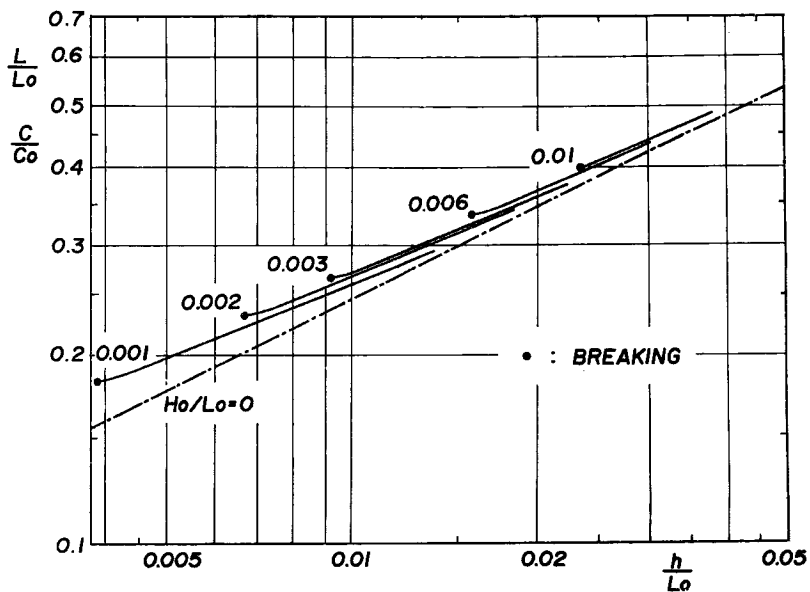


Fig. 10 Change of wave length and wave velocity in shoaling water based on hyperbolic wave theory (2nd approximation).

hyperbolic waves の波長の第2近似は、第4報<sup>7)</sup>の(25)式を用いると、次のようにあらわされる。

$$\frac{L}{h} = \left(1 - \frac{3}{2} \frac{1}{K} \frac{H}{h}\right) \frac{4K}{\sqrt{3}} \left(\frac{h}{H}\right)^{1/2} \left\{1 - \left(1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h}\right) \frac{5}{8} \frac{H}{h}\right\}^{-1} \dots\dots\dots(35)$$

右辺における $K$ は、 $H/h \leq 0.55$ では(13)式、 $H/h > 0.55$ では(14)式であらわされる。また、周期 $T$ は、Skjelbreia<sup>5)</sup>によるStokes波の第3次近似解を用いると、沖波波長との間に(17)および(18)式であらわされる関係をもっており、 $\lambda_0$ を消去すると、次式のようにあらわされる。

$$\frac{L_0}{T^2} = \frac{g}{2\pi} \left\{1 + \pi^2 \left(\frac{H_0}{L_0}\right)^2\right\} \dots\dots\dots(36)$$

(35)式に(13)式および(36)式を代入すると、波長比 $L/L_0$ が次式のようにあらわされる。

$$\frac{L}{L_0} = \sqrt{2\pi} \left(\frac{h}{L_0}\right)^{1/2} \left\{1 - \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{H_0}{L_0}\right)^2\right\} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{1}{K} \frac{H}{h}\right) \times \left\{1 - 1.3 \left(\frac{H}{h}\right)^2\right\}^{1/2} \left\{1 - \left(1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h}\right) \frac{5}{8} \frac{H}{h}\right\}^{-1} \dots\dots\dots(37)$$

ただし、 $H/h > 0.55$ の場合は $K$ として(14)式を用いるから、 $\{1 - 1.3(H/h)^2\}^{1/2}$ の項は $\{1 - 0.540(H/h)^{3/2}\}$ でおきかえられる。 $K$ は(13)式あるいは(14)式であらわされ、これらの式の中の $T$ は(36)式、 $H/h$ は(21)式のようにあらわされるから、(20)式あるいはFig. 3を用いれば、波長比 $L/L_0$ が $H_0/L_0$ をパラメーターとして、 $h/L_0$ の関数としてあらわされる。このようにして、(37)式を数値計算した結果を図示したのがFig. 10である。図中には従来の微小振幅波理論による理論曲線をも示してある。この図を見てわかるように、hyperbolic wavesの第2近似式を用いて求めた、理論曲線が示す水深の減少による波長および波速の減少の割合は、微小振幅波理論による変化の割合よりやや小さいことを示している。

## 7. 結 語

以上この論文では、第4報において、クノイド波理論の初等関数表示として求めたhyperbolic wavesの理論式にもとづき、単位面積当たりの波のもつ平均のエネルギー、および単位時間に単位幅を通過して輸送される平均の波のエネルギーの第2近似を求めるとともに、hyperbolic wavesの理論の応用として、水深・波長比が小さい領域での、水深変化による波高変化や静水面からの波の峯高、波長および波速の変化の理論曲線を求めた。波高変化については、水深・波長比の大きい場合に適用されるStokes波の第3次近似解による理論曲線や従来の実験結果と比較して、その傾向がよく一致していることを示し、水深減少に伴う波高増加の割合が微小振幅波理論によるものよりはるかに大きいという従来の実験事実を、hyperbolic wavesの理論によって説明することができた。また水深・波長比の小さい領域では、静水面からの波の峯高は、すでに半波高より大きく、水深の減少とともにさらに増加して碎波にいたること、および水深減少にともなう波長や波速の減少の割合は、微小振幅波理論による減少の割合よりもやや小さいことを明らかにした。

水深・波長比の小さい領域での、水深変化にともなう波の特性の変化に関しては、これまで実験結果が少ないので、理論の結果の妥当性を十分検討することができない。今後はこうした実験を数多く行なう必要がある。

なお、数値計算は京都大学計算センターKDC-IIによったことを付記する。

## 参 考 文 献

- 1) 岩垣雄一：クノイド波に関する研究(第1報)一波形勾配および波形について一、京大防災研究所年報、第7号、昭39.3、pp.373—386.
- 2) 岩垣雄一：クノイド波に関する研究(第2報)一波速および波長について一、京大防災研究所年報、第8号、昭40.3、pp.343—351.
- 3) Laitone, E. V.: The Second Approximation to Cnoidal and Solitary Waves, Jour. of

- Fluid Mechanics, Vol.9, 1961, pp.430—444.
- 4) 岩垣雄一, 細見昌彦: クノイド波に関する研究(第3報) —波形, 波速および波長に関する実験—, 京大防災研究所年報, 第9号, 昭41.3, pp.637—645.
  - 5) Skjelbreia, L.: Gravity Waves, Stokes' Third Order Approximation, Table of Functions, Council on Wave Research, The Engineering Foundation, 1959, pp.1—337.
  - 6) 岩垣雄一, 細見昌彦: クノイド波に関する二, 三の実験, 第13回海岸工学講演会講演集, 昭41.12, pp.1—8.
  - 7) 岩垣雄一: クノイド波に関する研究(第4報) —hyperbolic waves について(1)—, 京大防災研究所年報, 第10号B, 昭42.3, pp.283—294.
  - 8) 岩垣雄一, 酒井哲郎: 有限振幅波の shoaling について, 第14回海岸工学講演会講演集, 昭42.10, pp.283—294.
  - 9) Stoker, J.J.: Water Waves, Interscience Pub., Inc., New York, 1957, p.48.
  - 10) Le Méhauté, B. and L.M. Webb: Periodic Gravity Waves over a Gentle Slope at a Third Order of Approximation, Proc. 9th Conference on Coastal Engineering, 1964, pp.23—40.
  - 11) Wiegel, R.L.: Experimental Study of Surface Waves in Shoaling Water, Trans. Amer. Geophys. Union, Vol.31, 1950, pp.377—385.
  - 12) Iversen, H.W.: Waves and Breakers in Shoaling Water, Proc. 3rd Conference on Coastal Engineering, 1952, pp.1—12.
  - 13) Eagleson, P.S.: Properties of Shoaling Waves by Theory and Experiments, Trans. Amer. Geophys. Union, Vol.37, 1956, pp.568—572.

正 誤 表

岩垣雄一：クノイド波に関する研究（第4報）— hyperbolic waves について（1）—，  
 京都大学防災研究所年報，第10号B，昭42.3，pp.283—294.

頁	行または式番号	誤	正
288	(27)	$\frac{\dot{p}_2}{\rho g H} = \frac{\eta_2 - z}{H} - \frac{3}{4} \frac{\dot{H}}{h_t} \left\{ 2 \frac{z}{h_t} + \dots \right.$ $\approx \operatorname{sech}^2 \left( 2 K \frac{X}{L_2} \right) - \dots$ $\times \left\{ 1 - \operatorname{sech}^2 \left( 2 K \frac{X}{L_2} \right) \right\} - \frac{3}{4} \frac{\dot{H}}{h} \dots$ $\times \left( 1 + \frac{\dot{H}}{K h} \right) \left\{ 2 - \dots \right.$	$\frac{\dot{p}_2}{\rho g H} = \frac{\eta_2 - z}{H} - \frac{3}{4} \left( \frac{H}{h_t} \right)^2 \left\{ 2 \frac{z}{h_t} + \dots \right.$ $\approx \operatorname{sech}^2 \left( 2 K \frac{X}{L_2} \right) - \dots$ $\times \left\{ 1 - \operatorname{sech}^2 \left( 2 K \frac{X}{L_2} \right) - \frac{3}{4} \left( \frac{H}{h} \right)^2 \dots \right.$ $\times \left( 1 + \frac{2}{K} \frac{H}{h} \right) \left\{ 2 - \dots \right.$
290	(40)	$E_v = \frac{1}{2} \rho g \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \eta^2 dx$	$E_v = \frac{1}{2} \rho g \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} (\eta - \delta)^2 dx$
"	下 6	$E_{v1} = \frac{1}{2} \rho g H^2 \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \operatorname{sech}^4 \left( 2 K \frac{X}{L} \right) dx$	$E_{v1} = \frac{1}{2} \rho g H^2 \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ \operatorname{sech}^2 \left( 2 K \frac{X}{L} \right) - \frac{1}{K} \right\}^2 dx$
"	下 5	$= \frac{1}{2} \rho g H^2 \frac{\tanh K}{K} \left( 1 - \frac{1}{3} \tanh^2 K \right)$	$= \frac{1}{2} \rho g H^2 \frac{\tanh K}{K} \left( 1 - \frac{1}{3} \tanh^2 K - \frac{2}{K} + \frac{1}{K \tanh K} \right)$
"	(41)	$E_{v1} = \frac{1}{3} \rho g H^2 \frac{1}{K}$	$E_{v1} = \frac{1}{3} \rho g H^2 \frac{1}{K} \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{K} \right)$
291	(43)	$E_{v1} L_1 = \frac{1}{3} \rho g H^2 \frac{L_1}{K}$ $= \frac{1}{2} \rho g H^3 (1 - \dots) \left( \dots \right)^{3/2} \left\{ \dots \right\}$	$E_{v1} L_1 = \frac{1}{3} \rho g H^2 \frac{L_1}{K} \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{K} \right)$ $= \frac{1}{2} \rho g H^3 (1 - \dots) \left( \dots \right)^{3/2} \left\{ \dots \right\} \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{K} \right)$
"	上 13	$\frac{1}{2} \rho \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-h_t}^{\eta} \dots = \dots - \frac{3}{K}$	$\frac{1}{2} \rho \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-h_t}^{\eta} \dots = \dots - \frac{3}{2} \frac{1}{K}$
"	(46)	$E_{k1} \approx \dots - \frac{3}{K}$	$E_{k1} \approx \dots - \frac{3}{2} \frac{1}{K}$
"	(47)	$E_{k1} L_1 = \dots - \frac{3}{K} - \frac{2}{K} \left( \dots \right)$	$E_{k1} L_1 = \dots - \frac{3}{2} \frac{1}{K} - \frac{2}{K} \left( \dots \right)$
292	下 1	$\dots \approx -\rho g \sqrt{g h_t} H^2 \frac{1}{K} \cdot \frac{1}{35} \left( \frac{H}{h_t} \right)^2$	$\dots \approx +\rho g \sqrt{g h_t} H^2 \frac{1}{K} \left\{ \frac{4}{105} \left( \frac{H}{h_t} \right)^2 - \frac{1}{15} \frac{1}{K} \left( \frac{H}{h_t} \right)^2 \right\}$
293	(55)	$W_1 = \dots + \frac{3}{10} \left( \frac{H}{h_t} \right)^2$ $- \dots - \frac{6}{5} \frac{1}{K} \left( \frac{H}{h_t} \right)^2 \left\{ \dots \right\}$ $\approx \dots \left( \dots \right) H^2 \left\{ 1 + \dots + \frac{3}{10} \left( \frac{H}{h} \right)^2 \right\}$	$W_1 = \dots + \frac{2}{5} \left( \frac{H}{h_t} \right)^2$ $- \dots - \frac{13}{10} \frac{1}{K} \left( \frac{H}{h_t} \right)^2 \left\{ \dots \right\}$ $\approx \dots \left( \dots \right) H^2 \frac{1}{K} \left\{ 1 + \dots + \frac{2}{5} \left( \frac{H}{h} \right)^2 \right\}$