

# 浅海重複波の質量輸送に関する研究

野 田 英 明

## A STUDY ON MASS TRANSPORT IN BOUNDARY LAYER DUE TO STANDING WAVES

By *Hideaki* NODA

### Synopsis

This paper deals with the mass transport in the laminar boundary layers developed on smooth and horizontal bottoms by standing waves in shallow water.

By theoretical approach, the laminar boundary layer equations are applied to solving the oscillatory motion in the boundary layers caused by the standing waves. Approximate solutions, obtained by the aid of the perturbation method describe the velocity of the 2nd order approximation in the vicinity of the bottom and are applied to deriving the mass transport velocities in this layer.

The theoretical results are compared with experimental data on the mass transport velocities in standing waves in shallow water.

### 1. 結 言

著者は、ここ数年来、茶崎漁港の埋没防止に関する研究を続けてきたが、埋没の原因は港内のきわめてかぎられた場所に砂が堆積するいわゆる砂堆であることを現地観測によって明らかにした。しかしこうした砂堆が静かな港内でどうして形成されるかは明確でなかったが、その後の模型実験によって港内の定常波すなわち静振が重要な役割をはたすこと、および静振の腹の位置に砂堆が発生することを確かめた。

定常波による砂堆発生機構については、すでに、Lettau<sup>1)</sup>、野満<sup>2)</sup> および速水<sup>3)</sup> によって考察され、砂堆は定常波の4倍節の起伏をなし、定常波の腹および節に山を生じると説明されている。しかし茶崎漁港の模型実験<sup>4)</sup> では砂堆は定常波の腹に発生するのみで、上の説とは一致しない。

この疑問を解くためには、定常波にもとづく底面付近での流れの特性を明確にし、砂礫の運動機構を力学的に解明しなければならない。そこで、著者は定常波による砂堆発生機構を究明する第一段階として、浅海重複波にともなう底面付近での流れの特性を明らかにしようと試みた。

従来、波動運動にともなう層流境界層の発達に関しては、線型理論にもとづく Stokes の解<sup>5)</sup> があり、さらに、進行波の場合には非線型境界層方程式にもとづいて、Grosch<sup>6)</sup> や岩垣・土屋・坂井・陳<sup>7)</sup> が近似的に解いている。これらの解は境界条件の一つである境界層外縁における速度に対して微小振幅波理論を適用しているが、ここでは有限振幅波理論を適用して解くことを試みた。

一方、こうした研究とは別の方法で境界層の発達を考察した Longuet-Higgins<sup>8)</sup> は重複波の場合でも、境界層内では質量輸送が存在することを示した。

本論文は、浅海重複波にもとづく底面境界層内の流れが層流の場合について、境界層方程式のせつ動解を求め、層内における流速の第2次近似解を計算し、さらに、この流速分布から、Longuet-Higgins の方法

によって、浅海重複波にもとづく境界層内の質量輸送速度を算出し、実験によって理論と比較し、その適合性について考察した。

2. 浅海重複波による層流境界層理論

(1) 従来の非回転性浅海重複波理論

重複波に関する研究はかなり古くから行なわれてきたが、その研究方法は二つに大別されよう。その一つはトロコイド波理論であり、他の一つは流体の非回転運動にもとづく理論である。前者の代表的な研究として、Sainflou<sup>9)</sup>の重複波理論をあげることができるが、このトロコイド波は無渦運動ではないので厳密な解とはいいがたい。一方、後者としては Stokes に始まる非回転性有限振幅重複波があり、その後多くの研究が行なわれている。とくに、Penny および Price<sup>10)</sup>は深海重複波に対して精密な計算を行なっている。また浅海重複波に関しては、Gourret<sup>11)</sup>(1935), Miche<sup>12)</sup>(1944), 岸<sup>13)</sup>(1957), Tadjbakhsh および Keller<sup>14)</sup>(1960) や合田<sup>15)</sup>(1966) がそれぞれ精密な計算を行ない、興味深い理論的考察を行なっている。いまこうした非回転性の浅海重複波理論を近似の程度によって分類すると **Table 1** のようになる。

Table 1 Standing wave theory in shallow water (Irrotational motion).

Small amplitude theory	1st approximation	Airy
Finite amplitude theory	2nd approximation	Gourret, Miche, Penny and Price, Kishi
	3rd approximation	Tadjbakhsh and Keller
	4th approximation	Goda

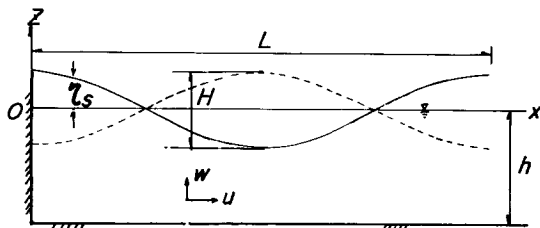


Fig. 1 Illustrating diagram of notation.

つぎに、上述の諸理論にもとづいて後述の境界層理論に必要な浅海重複波の特性とくに波形と水粒子速度を第2次近似の形で列挙するとつぎのようである。いま、**Fig. 1** のように、 $z$ 軸を鉛直壁に沿って上向きに、 $x$ 軸を静水面にとり、 $H$ を重複波の波高、 $L$ を波長、 $T$ を周期、 $h$ を水深とし、 $t$ を時間とすると、第2次近似では、周期  $T$ 、波長  $L$  および水深  $h$  の間に、

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh kh \dots\dots\dots(1)$$

の関係が存在する。ここに、 $k=2\pi/L$  であり、 $g$ は重力の加速度である。

微小振幅波理論による波形  $\eta_s$  および、点  $(x, z)$  における水平および鉛直方向の速度成分  $(u, w)$  はそれぞれ、

$$\frac{\eta_s}{H/2} = \cos kx \sin \omega t \dots\dots\dots(2.1)$$

$$\frac{u}{C} = -\pi \left( \frac{H}{L} \right) \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \sin kx \cos \omega t \dots\dots\dots(2.2)$$

$$\frac{w}{C} = \pi \left( \frac{H}{L} \right) \frac{\sinh k(h+z)}{\sinh kh} \cos kx \cos \omega t \dots\dots\dots(2.3)$$

である。ここに、 $\omega=2\pi/T$  であり、 $C=L/T$  である。

一方、有限振幅波理論による波形は、第2次近似まで示すと、つぎのようである。

a) Miche の解

$$\frac{\eta_s}{H/2} = \cos kx \sin \omega t + \frac{\pi}{8} \left( \frac{H}{L} \right) \coth kh \left[ 1 - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 kh \right. \\ \left. - \left( 1 + \frac{3}{2} \operatorname{cosech}^2 kh \right) \cdot \cos 2\omega t \right] \cos 2kx \dots\dots\dots(3.1)$$

b) 岸の解

$$\frac{\eta_s}{H/2} = \cos kx \sin \omega t + \frac{\pi}{8} \left( \frac{H}{L} \right) \coth kh \left[ 1 + \left( 1 - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 kh \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2 \sinh^2 kh + 3}{2 \sinh^2 kh} \cdot \cos 2\omega t \right) \cos 2kx \right] \dots\dots\dots(3.2)$$

c) Tadjbakhsh および Keller の解

$$\frac{\eta_s}{H/2} = \cos kx \sin \omega t + \frac{\pi}{8} \left( \frac{H}{L} \right) \coth kh \left[ -\frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 kh \right. \\ \left. - \left( 1 + \frac{3}{2 \sinh^2 kh} \right) \cdot \cos 2\omega t \right] \cos 2kx \dots\dots\dots(3.3)$$

以上の各式から明らかなように、有限振幅波理論（第2次近似）の波形は $(H/L)$ のorderで、各式に若干の相違がみられる。岸の解は $x$ 軸と平均水面とが一致しないため、これらの式中の $h$ は補正を必要とする。これについては、岩垣・山口<sup>16)</sup>の論文に詳しく説明されているので、ここでは省略する。

一方 Tadjbakhsh および Keller の解は平均水面と $x$ 軸が一致するように解かれている。こうした平均水面のちがいや近似の程度によって相違がおこると考えられるが、それらの適合性は明確でない。

一方、水粒子の速度成分 $(u, w)$ は上述の有限振幅波理論のいずれも第2次近似では全く一致し、その結果は

$$\frac{u}{C} = -\pi \left( \frac{H}{L} \right) \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \sin kx \cos \omega t \\ - \frac{3\pi^2}{8} \left( \frac{H}{L} \right)^2 \frac{\cosh 2k(h+z)}{\sinh^4 kh} \sin 2kx \sin 2\omega t \dots\dots\dots(4.1)$$

$$\frac{w}{C} = \pi \left( \frac{H}{L} \right) \frac{\sinh k(h+z)}{\sinh kh} \cos kx \cos \omega t \\ + \frac{3\pi^2}{8} \left( \frac{H}{L} \right)^2 \frac{\sinh 2k(h+z)}{\sinh^4 kh} \cos 2kx \sin 2\omega t \dots\dots\dots(4.2)$$

である。底面境界層を計算する場合には、底面 $z=-h$ における速度成分 $(u_b, w_b)$ が重要であって、これらはそれぞれ

$$\frac{u_b}{C} = -\pi \left( \frac{H}{L} \right) \frac{1}{\sinh kx} \sin kx \cos \omega t \\ - \frac{3\pi^2}{8} \left( \frac{H}{L} \right)^2 \frac{1}{\sinh^4 kh} \cos 2kx \sin 2\omega t \dots\dots\dots(5.1)$$

$$w_b/C=0 \dots\dots\dots(5.2)$$

となる。

## (2) 水平な底面における層流境界層の発達

底面が水平な水槽における重複波の場合を取り扱おう。流体が非圧縮性でかつ、その運動が非定常な場合の2次元層流境界層方程式は、 $x$ 軸を底面にとり、 $z$ 軸を水槽一端の鉛直壁にそって上向きにとると、それぞれの方向における境界層内の速度成分 $u$ および $w$ は、一般に次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial u_\infty}{\partial t} + u_\infty \frac{\partial u_\infty}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

ここに、 $t$  は時間、 $p$  は圧力、 $\nu$  は流体の動粘性係数、 $\rho$  は流体の密度であり、 $u_\infty$  は境界外縁における  $x$  方向の速度成分で、重複波の場合 (5.1) 式で示される底面速度  $u_b$  に等しいものとする。

いま、長さの代表値として  $L$  および  $\delta = (\nu T / 2\pi)^{1/2}$  を、また、速度のそれとして  $C = L/T$  を選び、(6) 式の各量を、

$$u = Cu^*, \quad w = \omega \delta w^*, \quad p = \rho C^2 p^*, \quad u_\infty = Cu_\infty^*, \quad kx = x^*, \quad \omega t = t^*, \quad z/\delta = z^*, \quad kh = h^*$$

のように表わし、(6) 式を無次元化すると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} &= -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \\ \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} &= 0 \\ -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} &= \frac{\partial u_\infty^*}{\partial t^*} + u_\infty^* \frac{\partial u_\infty^*}{\partial x^*} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

となる。問題を、定常解を求めることに限定すれば、(7) 式の満足すべき境界条件は

$$\left. \begin{aligned} z^* = 0 \quad \text{で} \quad u^* = w^* = 0 \\ z^* \rightarrow \infty \quad \text{で} \quad u^* = u_\infty^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

である。ここで、 $u_\infty^*$  に (5.1) 式を適用すると、

$$u_\infty^* = \left(\frac{H}{L}\right) \alpha_1(x^*) \cos t^* - \left(\frac{H}{L}\right)^2 \alpha_2(x^*) \sin 2t^* \quad \dots\dots\dots(9)$$

であり、ここに、

$$\alpha_1(x^*) = -\frac{\pi}{\sinh h^*} \sin x^* \quad \dots\dots\dots(10)$$

$$\alpha_2(x^*) = \frac{3\pi^2}{8 \sinh^4 h^*} \cos 2x^* \quad \dots\dots\dots(11)$$

である。

いま、 $u \equiv u(x, z, t; \varepsilon)$  とおき、これを微小量  $\varepsilon = H/L \ll 1$  に関して Taylor 展開し、

$$u(x, z, t; \varepsilon) = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots$$

とする。運動を静止の状態に対するせつ動と考えるならば、静止の状態では  $\varepsilon = 0$  であるから

$$u(x, z, t; 0) = u_0 = 0$$

でなければならない。これは  $w$  についてもいえる。したがって、 $\varepsilon = H/L$  による (7) 式のせつ動解を

$$u^* = \varepsilon u_1^* + \varepsilon^2 u_2^* + \dots$$

$$w^* = \varepsilon w_1^* + \varepsilon^2 w_2^* + \dots$$

として、(7) 式に代入し、(7) 式において、 $\varepsilon$  の 1 次および 2 次の係数について両辺の各項ごとに成立する関係を求め、 $u_1^*, u_2^*, \dots$  および  $w_1^*, w_2^*, \dots$  を決定するならば、(7) 式のせつ動解を求めることができる。また、境界層外縁の速度  $u_\infty^*$  は (9) 式より

$$u_\infty^* = \varepsilon u_{\infty 1}^* + \varepsilon^2 u_{\infty 2}^* + \dots$$

であり、ここに、

$$\left. \begin{aligned} u_{\infty 1}^* &= \alpha_1(x^*) \cos t^* \\ u_{\infty 2}^* &= \alpha_2(x^*) \sin 2t^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

である。

記述の簡単のために、無次元量を表わす(\*)を省略する。さて、(7)式において、 $u_1$ に対して成立する関係は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} &= \frac{\partial u_{\infty 1}}{\partial t} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

であって、この場合の境界条件は  $z=0$  で、 $u_1=w_1=0$ ;  $z \rightarrow \infty$  で  $u_1=u_{\infty 1}$  である。(13)式は線型方程式であって、その解は

$$u_1 = \alpha_1(x) \{ \cos t - e^{-\eta} \cos(t-\eta) \} \dots\dots\dots (14)$$

$$w_1 = -\frac{d\alpha_1}{dx} \left\{ \sqrt{2} \eta \cos t + \exp(-\eta) \cos(t-\eta-\pi/4) - \cos(t-\pi/4) \right\} \dots\dots\dots (15)$$

で与えられる。ここに、 $\eta = z/\sqrt{2}$  である。

つぎに、 $u_2$ に対する方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} &= - \left( u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) + \frac{\partial u_{\infty 2}}{\partial t} + u_{\infty 1} \frac{\partial u_{\infty 1}}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

であり、(16)式の第1式右边に対し、(12)、(14)および(15)式を用いると、 $u_2$ に対する方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} &= \frac{1}{2} \alpha_1 \frac{d\alpha_1}{dx} \left[ \left( 1 + \frac{z}{\sqrt{2}} \right) \exp\left(-\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(2t - \frac{z}{\sqrt{2}}\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{z}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(2t - \frac{z}{\sqrt{2}}\right) - \beta \cos 2t \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} \alpha_1 \frac{d\alpha_1}{dx} \left[ (\sqrt{2}z+4) \exp\left(-\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \right. \\ &\quad \left. + (\sqrt{2}z-2) \exp\left(-\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) - 2 \exp(-\sqrt{2}z) \right] \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

となる。ここに  $\beta = 4\alpha_2/\alpha_1 \frac{d\alpha_1}{dx}$  である。(17)式から明らかのように、 $u_2$ には時間に関する項と関係しない項が存在する。したがって、Schlichting<sup>17)</sup>と同様に  $u_2$ を時間に関する  $u_{2p}$ と無関係な  $u_{2s}$ とに分け

$$u_2 = u_{2p} + u_{2s} \dots\dots\dots (18)$$

とする。(17)および(18)式に対する境界条件は、 $z=0$ で  $u_{2p}=u_{2s}=0$ 、 $z \rightarrow \infty$ で  $u_{2p}=u_{\infty 2}$ 、 $\partial u_{2s}/\partial z=0$ である。これらの境界条件を満足する(17)式の解は若干の計算により求められ、境界層内の速度に対する第2次近似解は、結局

$$\begin{aligned} u^* &= -\varepsilon \frac{\pi}{\sinh h^*} \sin x^* \{ \cos t^* - \exp(-\eta^*) \cos(t^* - \eta^*) \} \\ &\quad + \varepsilon^2 \left[ -\frac{3\pi^2}{8 \sinh^4 h^*} \cos 2x^* \{ \sin 2t^* - \exp(-\sqrt{2}\eta^*) \sin(2t^* - \sqrt{2}\eta^*) \} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi^2}{4 \sinh^2 h^*} \sin 2x^* \left\{ \exp(-\sqrt{2}\eta^*) \cos(\sqrt{2}\eta^*) - \exp(-\eta^*) \cos(\eta^*) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{2}\eta^* \exp(-\eta^*) \sin\left(\eta^* + \frac{\pi}{4}\right) \right] \sin 2t^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\pi^2}{4 \sinh^2 h^*} \sin 2x^* \left\{ -\exp(-\sqrt{2}\eta^*) \sin(\sqrt{2}\eta^*) + \exp(-\eta^*) \sin(\eta^*) \right. \\
 & + \left. \sqrt{2}\eta^* \exp(-\eta^*) \cos\left(\eta^* + \frac{\pi}{4}\right) \right\} \cos 2t^* \\
 & + \frac{\pi^2}{8 \sinh^2 h^*} \sin 2x^* \left\{ -3 + \exp(-2\eta^*) + 8 \exp(-\eta^*) \sin \eta^* \right. \\
 & + \left. 2 \exp(-\eta^*) \cos(\eta^*) - 2\sqrt{2}\eta \exp(-\eta^*) \cos\left(\eta^* + \frac{\pi}{4}\right) \right\} \dots\dots\dots(19)
 \end{aligned}$$

となる。以上の結果を用いると、もちろん、底面摩擦応力を求めることもできる。しかしここでは、境界層の速度分布についてのみ考察しよう。

Fig. 2 は  $\varepsilon=0.02$  および  $\sinh h^*=1.18$  に対する、 $x^*=\pi/2$  での  $u^*/\varepsilon\pi/\sinh h^*$  と  $\eta^*$  との関係を  $t^*$ ごとに示すもので、 $\eta^*\approx 5$  で境界層内の速度がほぼ境界層外縁の速度の99%になるから、境界層の厚さは  $\eta^*\approx 5$  と考えられよう。

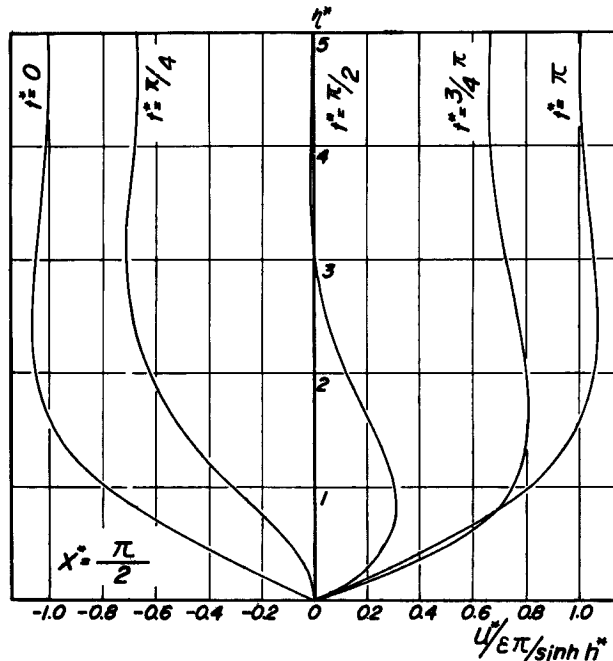


Fig. 2 Vertical distributions of velocity in the vicinity of bottom.

(3) 底面境界層内における質量輸送速度

質量輸送速度を Longuet-Higgins<sup>9)</sup> にならって定義するとつぎのようである。すなわち、2次元流れの場合、点  $(x, z)$  における時間  $t$  での水平および鉛直方向の速度成分をそれぞれ、 $u$  および  $w$  とすれば、これらを前節と同様に微小量  $\varepsilon=H/L$  のべき級数として、

$$\left. \begin{aligned}
 u(x, z, t) &= \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots\dots \\
 w(x, z, t) &= \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots\dots
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

と表わす。いま波の一周期平均を—で表わすと、一般に、

$$\bar{u}_1 = \bar{w}_1 = 0$$

であり、これらは時間  $t$  に関する周期性を表わしている。

つぎに、一個の水粒子の速度を  $U(x, z, t)$  および  $W(x, z, t)$  で表わし、 $t=0$  において点  $(x_0, z_0)$  にあった水粒子の時間  $t=t$  における位置を  $(x_0 + \Delta x, z_0 + \Delta z)$  とすると、Fig. 3 から明らかなように、その変位  $(\Delta x, \Delta z)$  はそれぞれ

$$\Delta x = \int_0^t U dt, \quad \Delta z = \int_0^t W dt \quad \dots\dots\dots(21)$$

によって与えられる。したがって、時間  $t$  における点  $(x_0 + \Delta x, z_0 + \Delta z)$  の位置での水粒子速度は

$$U(x_0 + \Delta x, z_0 + \Delta z, t) = u(x_0 + \Delta x, z_0 + \Delta z, t)$$

で与えられる。上式を Taylor 級数に展開すれば、

$$U = u(x_0, z_0, t) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \Delta z \frac{\partial u}{\partial z} + \dots\dots\dots(22)$$

$$= u + \frac{\partial u}{\partial x} \int_0^t U dt + \frac{\partial u}{\partial z} \int_0^t W dt + \dots\dots\dots(22)$$

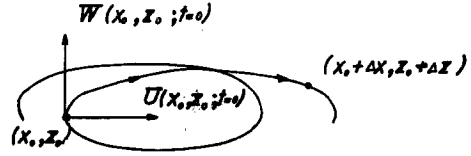


Fig. 3 Illustratin diagram of notation.

と表わされ、 $W$ についても同様の式がえられる。 $U$ および $W$ についても、

$$\left. \begin{aligned} U &= \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + \dots\dots\dots \\ W &= \varepsilon W_1 + \varepsilon^2 W_2 + \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

とすれば、これを (22) 式に代入して、

$$\varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + \dots\dots\dots = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 \left( u_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x} \int_0^t U_1 dt + \frac{\partial u_1}{\partial z} \int_0^t W_1 dt \right) + \dots\dots\dots(24)$$

がえられる。したがって、 $U_1$  に対する方程式は

$$U_1 = u_1, \quad (W_1 = w_1) \quad \dots\dots\dots(25)$$

であり、 $U_2$  に対するそれは、

$$U_2 = u_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x} \int_0^t u_1 dt + \frac{\partial u_1}{\partial z} \int_0^t w_1 dt \quad \dots\dots\dots(26)$$

となる。いま波の一周期平均をとると、

$$\bar{U}_1 = \bar{u} = 0$$

$$\bar{U}_2 = \bar{u}_2 + \overline{\int_0^t u_1 dt \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x}} + \overline{\int_0^t w_1 dt \cdot \frac{\partial u_1}{\partial z}} \quad \dots\dots\dots(27)$$

となり、結局  $\bar{U} = \varepsilon^2 \bar{U}_2$  が一周期平均の質量輸送速度を与えることになる。

前節と同様に  $C=L/T$  を用いて (27) 式を無次元化すると、

$$\bar{U}_2^* = \frac{1}{2\pi} \left\{ \bar{u}_2^* + \int_0^{2\pi} u_1^* dt^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x^*} + \int_0^{2\pi} w_1^* dt^* \frac{\partial u_1^*}{\partial z^*} \right\} \quad \dots\dots\dots(28)$$

となる。ここに、 $\bar{u}_2^* = \int_0^{2\pi} u_2^* dt^*$  である。

ところで、重複波の場合、非回転性の有限振幅波理論による速度成分は (4.1) および (4.2) 式で与えられるが、これを (28) 式に代入すると  $\bar{U}_2^* = 0$  となり、potential theory では重複波にともなう質量輸送が存在しないことになる。

一方、底面境界層に着目すると、(14)、(15) および (19) 式を (27) 式に代入して、結局

$$\bar{U}_2^* = \frac{\pi^2}{8 \sinh^2 h^*} \sin 2x^* K(\eta^*) \quad \dots\dots\dots(29)$$

がえられる。ここに、

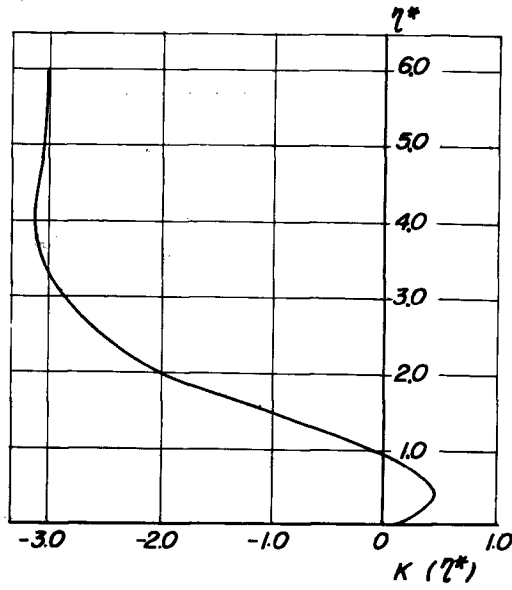


Fig. 4 Relationship between  $K(\eta^*)$  and  $\eta^*$

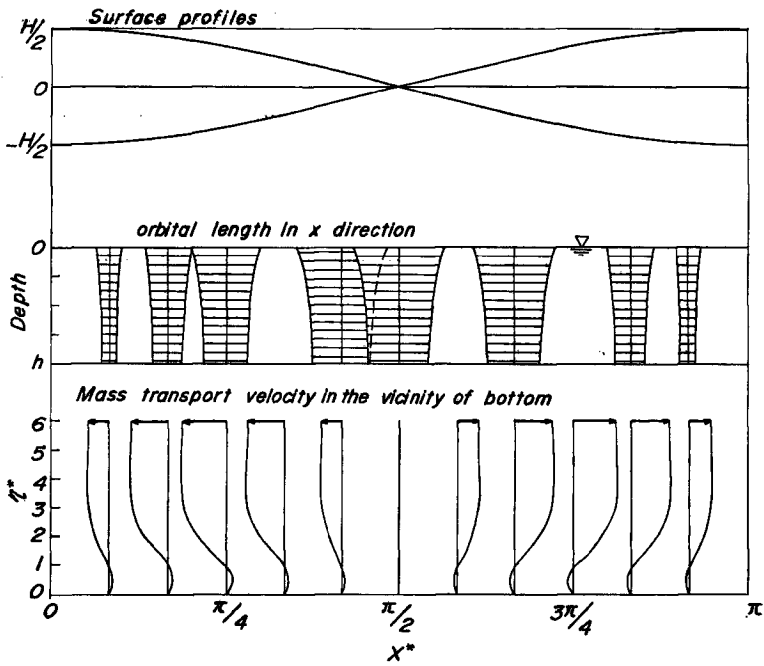


Fig. 5 Schematic discription of mass transport in standing waves.



$$K(\eta^*) = -3 + 8 \exp(-\eta^*) \sin \eta^* + 3 \exp(-2\eta^*) \dots \dots \dots (30)$$

である。

(29) 式から明らかなように、底面境界層内では質量輸送が存在するが、 $x^* = n\pi/2$ , ( $n=0, 1, 2, \dots$ ), すなわち、重複波の節および腹では、 $\bar{U}_z^* = 0$  となって質量輸送が存在しないこと、また  $n\pi < x^* < (n + \frac{1}{2})\pi$  の領域と  $(n + \frac{1}{2})\pi < x^* < (n+1)\pi$  のそれでは質量輸送の方向がことなることがわかる。

Fig. 4 は  $K(\eta^*)$  と  $\eta^*$  との関係を示すもので、この図から、 $\eta^* \approx 0.9$  を限界として、その上と下では質量輸送の方向もことなることがわかる。この結果は Longuet-Higgins がいわゆる conduction equation から導いた結果と一致している。

以上の結果を要約すると、Fig. 5 のようになる。この図には、波形、水粒子の水平軌道長および底面境界層内における質量輸送速度を示してある。この図から明らかなように、 $x^* = (n+1)\pi/2$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) の位置では水粒子の周期的移動はもっとも大きい、質量輸送は存在しない。一方  $x^* = n\pi$  の位置では水粒子は鉛直方向に周期的運動をするのみで、水平方向の質量輸送は存在しない。質量輸送速度が最大となる位置は  $x^* = \pi/4, 3\pi/4, \dots$  の位置であることがわかる。

### 3. 重複波にともなう質量輸送に関する実験

#### (1) 実験装置および方法

前述したように、重複波の場合、質量輸送がおこるのは境界層内のみである。しかし波動運動にともなう底面境界層の厚さは非常に小さく、この層内での流速分布を Euler 流に測定することは技術的にほとんど不可能であろう。したがって、現在一般に考えられる方法は Lagrange 流のもので、これには二つのものがある。その一つは流体と同じ比重をもつ固体粒子を運動している流体中に投入し、その粒子の運動を追跡する方法で、他の一つは固体粒子のかわりに染料を用い、その流れを追跡する方法である。

本実験では前者の方法によって、底面境界層内の質量輸送速度を測定した。

実験に用いた水槽は Fig. 6 に示す長さ 3.0 m, 幅 30 cm, 深さ 1.0 m の片面ガラス張鋼製水槽で、その一端は鉛直壁とし、これから 2.50 m のところにフラッター式造波機を取付けた。なお水槽底面は水平でかつ滑面とするため 5 mm 厚のガラスを敷いた。

実験に用いた波の特性は、水深  $h=40$  m, 周期  $T=1.45$  sec (波長  $L=250$  cm) と一定にし、波高を変えて行なった。

いま、実験に用いた重複波の特性から、これに対する底面境界層の厚さ  $\delta_e$  および質量輸送速度を前述の

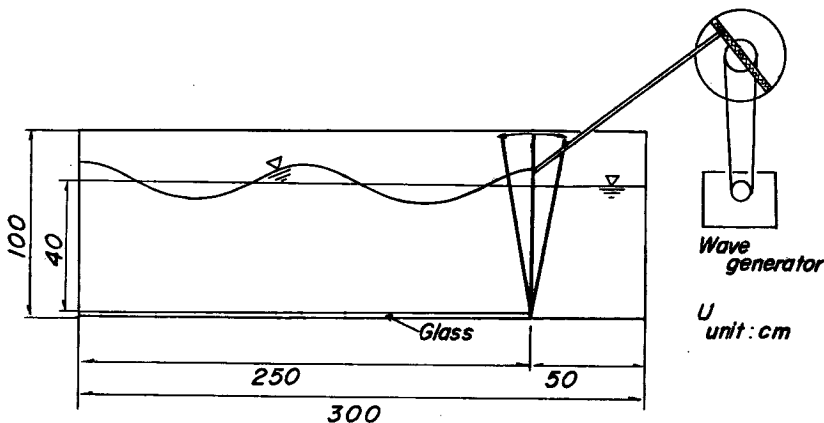


Fig. 6 Schematic view of standing wave tank.

理論にもとづいて計算するとつぎのようである。すなわち、 $h=40$  cm,  $T=1.45$  sec. および  $L=250$  cm とし、 $\nu=0.01$  cm<sup>2</sup>/sec とすると、底面境界層の厚さ  $\delta_c$  は前節で明らかにした関係

$$[\eta^*]_{z=\delta_c} = \delta_c / \sqrt{2} \delta = 5$$

より、 $\delta_c=0.34$  cm と計算される。

つぎに、境界層全体にわたる平均の質量輸送速度  $\bar{U}_m$  は (29) 式より、

$$\bar{U}_m^* = \frac{1}{5} \int_0^5 \bar{U}_z^* d\eta^* = -\frac{19\pi^2}{80 \sinh^2 h^*} \sin 2x^*$$

となるから、普通の表式にもどし、上の数値を代入すると、

$$\bar{U}_m = -0.0046 H^2 \sin kx \quad (\text{cm-sec}) \dots\dots\dots(31)$$

となる。したがって、境界層全体における波の一周期に対する変位は  $\bar{U}_m T$  によって与えられる。

(31) 式から、 $\bar{U}_m$  は波高の2乗に比例して大きくなるのがわかる。なお、境界層内において、質量輸送の方向が変わる高さ  $\delta_s$  は Fig. 4 から明らかなように

$$[\eta^*]_{z=\delta_s} = 0.9$$

であるから、本実験においては  $\delta_s=0.061$  cm となる。Fig. 7 は  $h=40$  cm,  $L=250$  cm および  $T=1.45$  sec の場合の  $x=3L/8$  における  $\bar{U}_m$  および  $\bar{U}_m T$  と  $H$  との関係を示すものである。なお、この場合、従来の理論によると、碎波高は  $H_b=17.5$  cm である。

質量輸送速度を測定するために用いた固体粒子は直径 3 mm および比重 1.10 のナイロン球と、直径 0.13 mm および比重 1.15 の塩化ビニール粒である。上述のように、ナイロン球の直径は 3 mm であるので、この場合には (31) 式で示される境界層全体の平均の質量輸送速度を与えると考えられる。ナイロン球を用いた実験では  $5T \sim 10T$  の時間間隔で、ナイロン球の位置を、ストロボ・フラッシュを用いて撮影し、その結果から変位  $\bar{U}_m T$  を算出した。実験に用いた重複波の波高は  $H=5.0$  cm,  $6.7$  cm,  $8.7$  cm および  $12$  m の4種類である。重複波の波高は一周期以上の時間、写真機のシャッターを開放して撮影した波形から読みとった。Fig. 8 は造波機を駆動してのちの波高の変化を示す一例で、重複波の腹の位置においた電気抵抗式波高計によってえられる波高と、写真撮影によるそれを比較したもので、その差はほとんどとめられないことから、写真撮影によって波高を測定した。また、造波機駆動後ほぼ10分を経過すると、波高はほぼ一定になるのがみられる。したがって質量輸送に関する実験は波高がほぼ一定になったのちに行った。

つぎに、 $\eta^*=0.9$  ( $\delta_s=0.061$  cm) 以下の領域ではその上の領域と質量輸送の方向が逆になる。これを検証するために、非常に粒径の小さい塩化

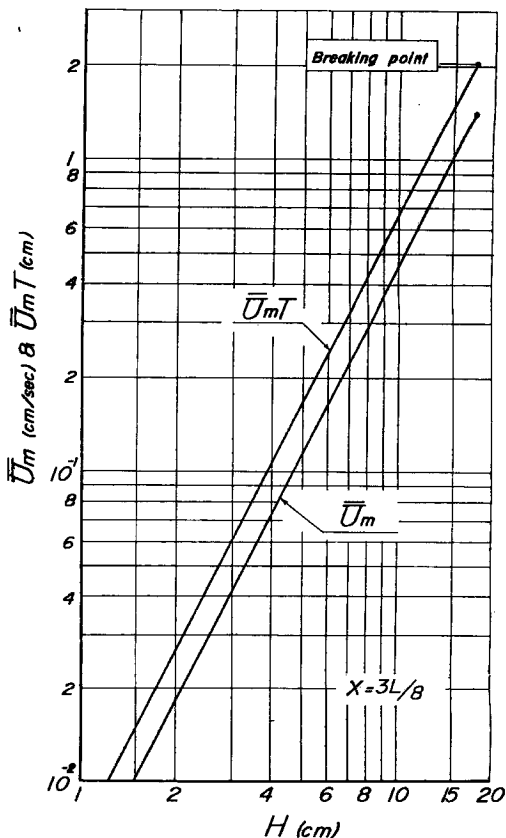


Fig. 7 Relationship between  $\bar{U}_m$ ,  $\bar{U}_m T$  and  $H$ .

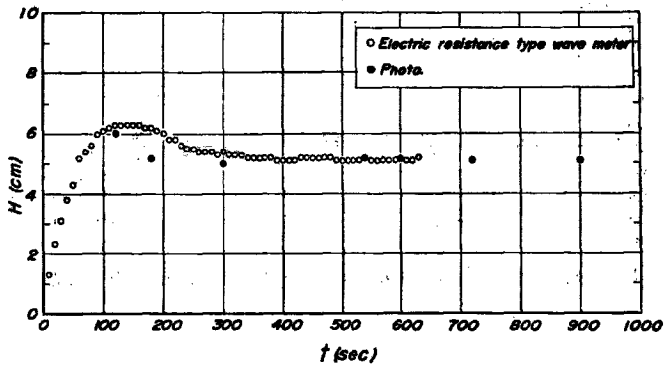
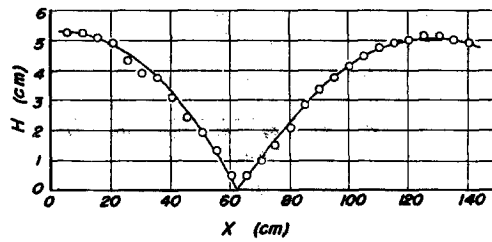
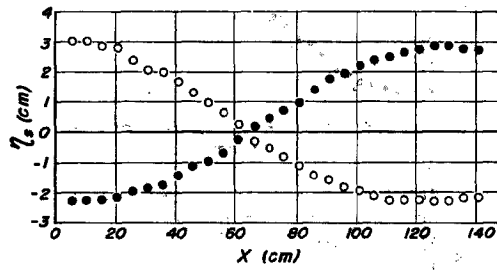
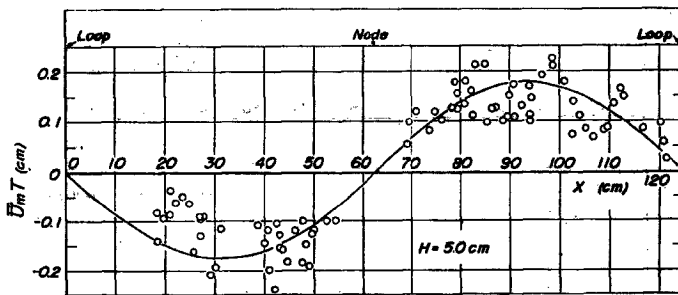


Fig. 8 Time variation of standing wave height.



(a)



(b)

Fig. 9 Experimental result of particle displacement ( $H=5\text{cm}$ ).

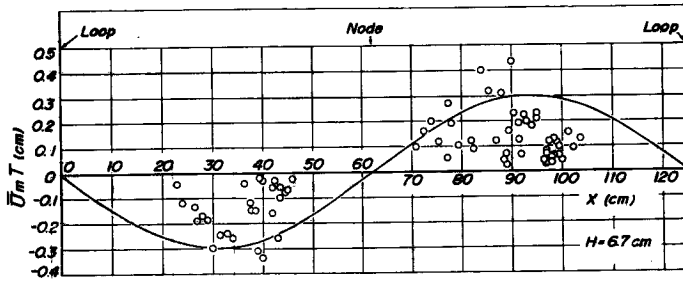
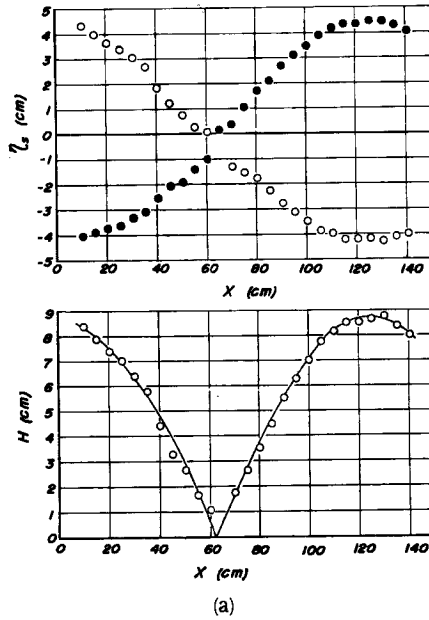
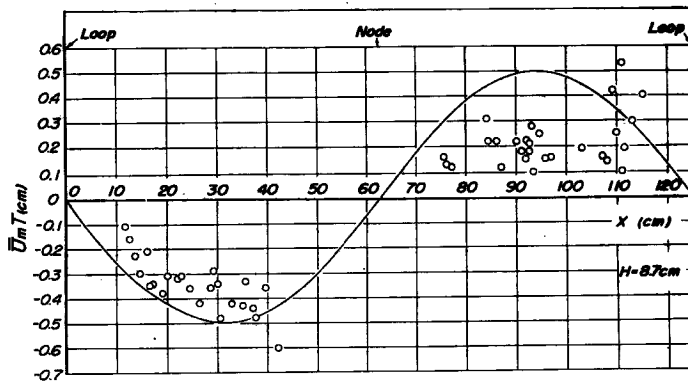


Fig. 10 Experimental result of particle displacement ( $H=6.7$  cm).



(a)



(b)

Fig. 11 Experimental result of particle displacement ( $H=8.7$  cm).

ビニール粒子を水槽底面全体に薄く敷並べて、その移動の様相を実験によって確めた。

## (2) 実験結果と考察

前述したように、ナイロン球による実験は5～10周期の変位を測定することになるので、これから、波の一周期に対する変位  $\bar{U}_m T$  をその平均値として求めることができる。

Fig. 9 (a) および (b) は、 $H=5\text{ cm}$  の場合の実験結果を示すもので、波形と平均変位  $\bar{U}_m T$  を、鉛直壁からの距離を横軸にとって示したものである。なお、この図において、 $x=0$  は鉛直壁(腹の位置)であり、 $x=62.5\text{ cm}$  は節の位置および  $x=125\text{ cm}$  は腹の位置を示し、図中の実線は(31)式から計算した結果である。また Fig. 10 は  $H=6.7\text{ cm}$  の場合の実験結果を示すものである。さらに Fig. 11 (a) および (b) は  $H=8.7\text{ cm}$  の場合、Fig. 12 は  $H=12\text{ cm}$  の場合の実験結果である。

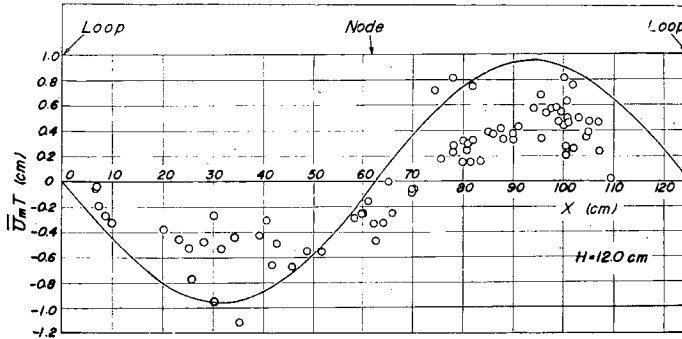


Fig. 12 Experimental result of particle displacement ( $H=12\text{ cm}$ ).

これらの図から明らかなように、底面境界層内におけるナイロン球の移動速度は理論値にくらべ、やや小さくなる傾向がわかる。これは、ナイロン球の比重が水の比重とは全く同じにならないためと考えられる。この点については実験にあたり、ナイロン球に小さな孔をうがち、その孔の中に空気を閉込めてできるだけ水の比重に近いものとしたが、この点についてはなお問題があり、ナイロン球と底面との摩擦なども影響していると考えられる。しかし、その移動方向は理論結果と一致することおよびかなりのばらつきはみられるが、変位の order は一致することなどから、実験精度を向上すれば、さらにより結果を求めうることが期待できる。今後はさらに波高を大きくし、底面境界層が乱れた状態に対する質量輸送についても、染料を用いる方法と併用して検討していきたい。

つぎに、 $\eta^*=0.9$  以下ではそれ以上の領域と質量輸送の方向が逆になることはすでに述べた。この層の厚さは  $0.061\text{ cm}$  ときわめて小さく、普通の方法では実験的にこれを確かめることが不可能に近い。そこで、ここでは、水槽底面に  $0.13\text{ mm}$  の塩化ビニール粒(白色)を一面に敷き(その厚さはほぼ  $0.3\text{ mm}$ )、これの移動方向をある時間間隔ごとに写真撮影する方法で調べた。Photo.1 は  $H=3.3\text{ cm}$  に対する実験結果であって、写真の両端は重複波の腹の位置、中央は節の位置である。写真は実験開始直後  $20\text{ min}$ 、 $40\text{ min}$  および  $59\text{ min}$ 、後に撮影したもので、 $H=5.3\text{ cm}$  の場合には塩化ビニール粒による砂れんが実験開始後数分で発達することが観察されたが、長時間経過しても砂れんは消失しないことが写真から明らかである。また、腹の位置では粒子はほとんど移動しないこと、腹と節の間ではもっとも移動がはげしく時間が経過するとともに黒い底面が現われること、および節の位置に向って、その両側から粒子が集まってくるなどがわかる。もちろん節の位置に集まった粒子は静止しているのではなく、周期運動を繰返しているのは砂れんの模様からも確かめられよう。

Photo. 2 は  $H=8.0\text{ cm}$  に対する同様の写真であって、この場合には、節の付近での砂れんはみられず、また、節の位置へ粒子が集中する時間も非常に速くなることわかる。

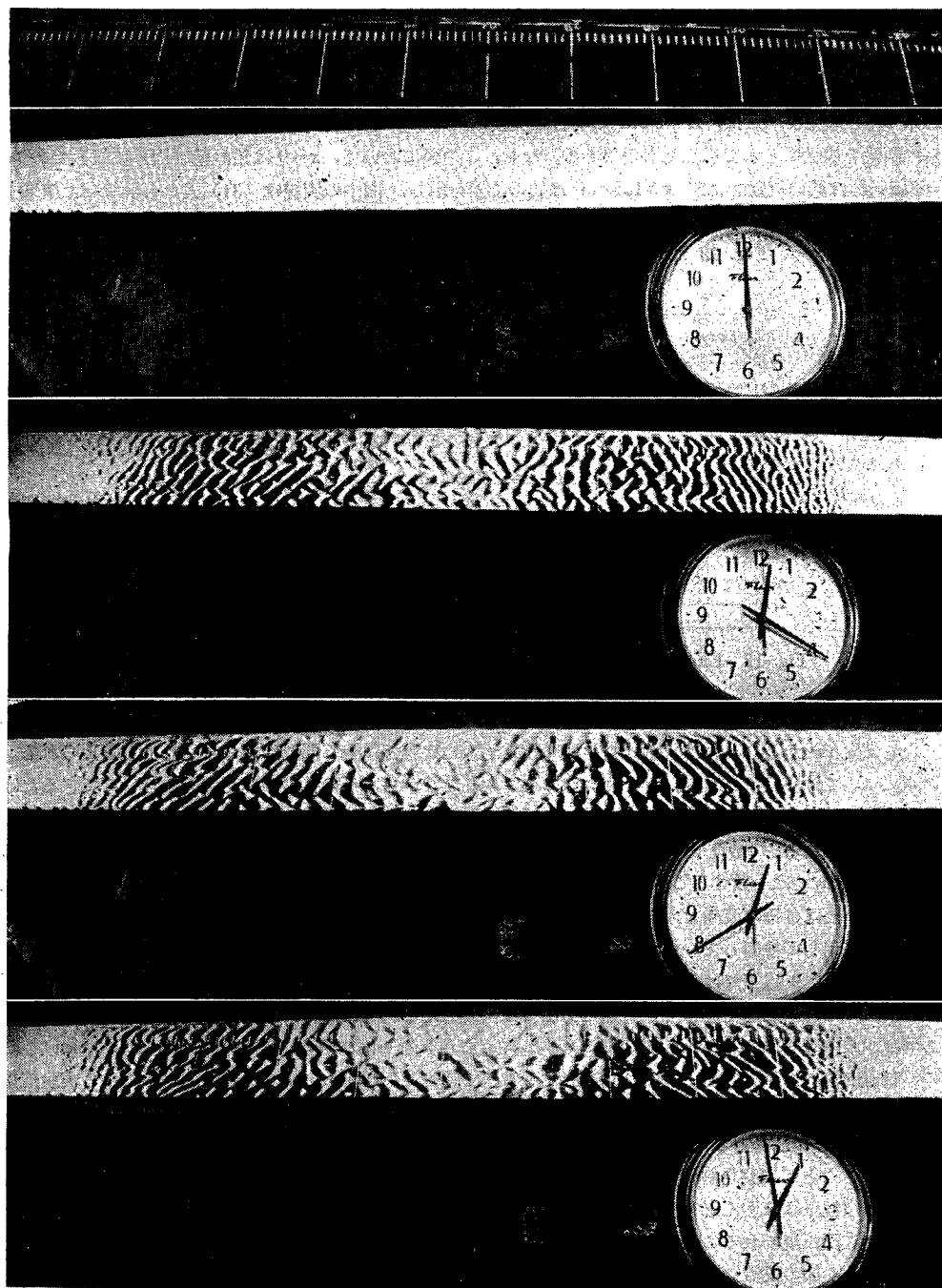


Photo. 1 Direction of mass transport in the vicinity of bottom ( $H=3.3$  cm).

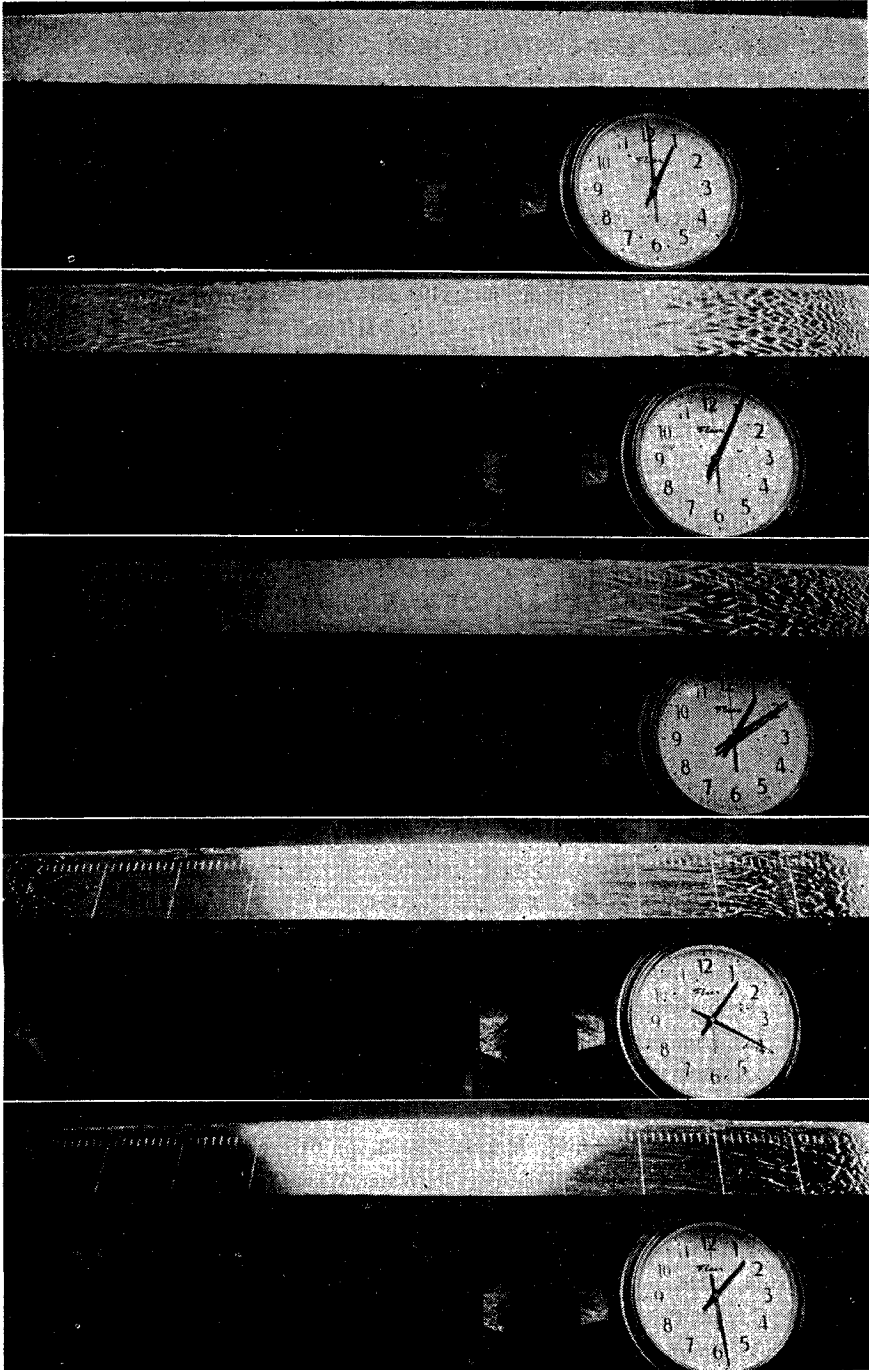


Photo. 2 Direction of mass transport in the vicinity of bottom ( $H=8.0$  cm).

以上の結果はナイロン球の移動方向すなわち節から腹の方向への移動とは全く逆で、底面境界層の下層部分にはその上層部分とは全く逆方向の質量輸送が存在するという理論結果を実証している。

こうした質量輸送が、海底を形成する底質の特性と関連して、底質を腹の位置から節のそれえ、あるいは逆に節の位置から腹の位置の方向へ移動させるものと考えられるが、その定量的関係については、まだ明確にできなかった。しかし、こうした現象を確証できたことはきわめて興味深いものといえよう。

#### 4. 結 語

定常波による底質の運動機構を明確にするために、定常波にともなう底面付近の流れの特性について若干考察してきた。その結果を要約すると、

(1) 層流境界層を仮定すると、その流速分布は(19)式によって与えられる。実験によって、この流速分布を求めることはできなかったが、この結果から導かれる質量輸送速度については、実験結果とかなりよい一致を示した。

(2) 底面境界層内における質量輸送は境界層内のある高さを限界として、その上下の領域で、その方向がことなる。実験結果もまたこれを定性的にはあるが、実証した。

(3) 質量輸送の方向が、重複波の腹から節の方向へ、あるいは節から腹の方向へと変化する現象は、底質の移動方向を定めるのにきわめて重要であると考えられる。

以上、重複波の場合には境界層内において質量輸送が存在することを理論的および実験的に確かめたが、しかし、これは底面境界層が層流の場合であって、境界層内の流れが乱流の場合についてはいまだ研究がなされていない。今後、実験精度の向上とともに、こうした乱流領域における質量輸送や底質の移動との関連といった問題も検討していきたい。

最後に、この研究にあたり、終始御指導をいただいた岩垣雄一教授、実験に協力していただいた当海岸災害研究室の芝野照夫技官および大学院学生川嶋康弘君に深謝の意を表する。

#### 参 考 文 献

- 1) Lettau, H.: Stehende Wallen Als Ursache um Gestaltenden Vorgange in Seen, Ann. d. Hydro. und Mar. Meteor. 60 Jahrg. 1932, pp.385.
- 2) 野満隆治: 定常波による湖海の砂堆と砂漣, 地球物理, 第7巻, 昭18, pp.61—79.
- 3) 速水頌一郎: 泊港湾の漂砂に関する研究, 鳥取県漂砂対策調査報告書, 昭25.4, pp.35—50.
- 4) Noda, H.: Model Study on the Filling-up of a Fishery Harbor by Drifting Sand, Proc. of 10th Conference on Coastal Eng., Tokyo, Vol.1, 1966, pp.564—594.
- 5) Lamb, H.: Hydrodynamics, 6th. ed., Cambridge, 1957, p.622.
- 6) Grosch, C.E.: Laminar Boundary Layer under a Wave, Physics of Fluids, Vol.5, No. 10, 1962, pp.1163—1167.
- 7) 岩垣雄一・土屋義人・坂井順行・陳活雄: 海底摩擦による波高減衰機構に関する研究—層流境界層の場合—, 京都大学防災研究所年報, 第9号, 昭41.3, pp.647—665.
- 8) Longuet-Higgins, M.S.: Mass Transport in Water Waves, Phil. Trans. of Royal Soc., London, Series A, No.903, Vol.245, 1953, 535—581.
- 9) Sainflou, G.: Essai sur les Diques Maritimes Verticales, Annales des Ponts et Chaussees, Vol.98, No.4, 1928.
- 10) Penny, W.C. and Price, A.T.: Finite Periodic Stationary Gravity Waves. in a Perfect Liquid., Phil. Trans. of Royal Soc., London, Series A., Vol.244, 1952, pp.254—284.
- 11) Gourret, M.: Sur Mouvement Approche des Clapotis, Application au Calcul des Diques Maritimes Verticales, Annales des Ponts et Chaussees, Vol.105, No.16, 1935.



- 12) Miche, M.: Mouvements Ondulatoires de la mer en Profondeur Constante ou Décroissante, Annales des. Ponts et Chaussées, Vol.121, No.3, 1944, pp.25—61.
- 13) 岸力: Clapotis in Shallow Water, Journal of Research of PWRI, Vol.2, Research Paper 5, 1957, 10p.
- 14) Tadjbakhsh, I and J.B. Keller: Standing Surface Waves of Finite Amplitude, J.F.M. Vol.8, 1960, pp.442—451.
- 15) 合田良実・柿崎秀作: 有限振幅波ならびにその波圧に関する研究, 運輸省港湾技術研究所報告, 第5巻, 10号昭41.9, 50pp.
- 16) 岩垣雄一・山口正隆: Stokes 波とクノイド波の適用限界について, 第13回海岸工学講演会講演集, 昭42.10, pp.8—16.
- 17) Schlichting, H.: Boundary Layer Theory, Translated by Kestin, J., McGraw-Hill, New York, 1955, pp.180—197.