

横越流ぜきの越流特性について

中川 博次・中川 修

STUDIES ON THE FLOW BEHAVIOURS OVER THE SIDE WEIRS

By *Hiroji* NAKAGAWA and *Osamu* NAKAGAWA

Synopsis

The discharge characteristics on the side weirs under supercritical flow condition are investigated herein. The discharge capacity is researched by experiment using the side weirs with various height and lengths. The existing discharge formulae are examined by the authors' data. It is shown that the discharge capacity under supercritical flow condition is estimated with higher accuracy by the same treatment as Prantl-Meyer flow. The water surface profiles are analysed by the modified method of characteristics, proved that propagation of shock waves has a difference between the main flow and branched flow.

1. ま え が き

横越流ぜきによる流量配分機能の研究は、古くから河川の放水路計画や下水の管渠ならびにダムの余水吐の設計、さらに堤防の越水機構などに関連して、流量配分比、流量変化に伴なう主流特性の解明に主眼が向けられてきたが、越流に伴なって流れは複雑な三次元性状を示し、またせき区間で流れのせん移形態が変化する場合もあって、越流量に関しても明確な理論的表示を与えることは不可能であった。

本研究はせきの高さおよび長さを種々変化させた横越流刃形ぜきについてその越流特性を実験的に考察し、その測定結果にもとづいて従来の横越流量諸公式の問題点を検討するとともに、とくに主流が射流状態の場合について、Prandtl-Meyer Flow としての取り扱いを適用して横越流量推定の方法を確立し、あわせて特性曲線法による主流水面形の解析を試みたものである。

2. 実験方法と測定結果の概要

実験水路は幅 20cm, 高さ 20 cm, 長さ 10 m の合成樹脂製の一樣長方形断面水路であり、水路の中程に設けられた切欠き部に横越流刃形ぜきが構成されるように鋼板を水路壁にビス止めすることによって、せき高を 3 および 5 cm, せき長を 20, 30, 40, 50 および 60 cm に変えられるようにしてある。水路こう配は全実験を通して一定で 1/1000 とした。実験の種目ならびに主要測定結果を一括して **Table 1** に示す。

3. 越流区間での水理特性に関する考察

本研究で対象とする流れの状態はすべて上流接近水路での常流状態から、せき上流端付近で限界水深となり、越流区間では射流となって流下するものである。

(1) せき上流端平均水深 h_0

Table 1 Experimental data on the supercritical flow.

No. of run	Height of weir W (cm)	Length of weir L (cm)	Initial flow rate Q_0 (l/s)	Divided discharge ΔQ (l/s)	Mean depth at upstream end section h_0 (cm)	Mean depth at downstream end section h_2 (cm)	Initial Froude number F_{r0}
20-3-1	3	20	5.5	0.44	4.28	4.58	0.993
2			8.2	0.73	5.30	4.70	1.075
3			12.6	1.45	6.83	5.57	1.130
4			16.0	2.30	8.15	6.35	1.100
5			21.0	3.35	9.58	7.37	1.132
6			24.7	4.15	10.56	8.04	1.150
7			29.7	5.30	11.77	8.94	1.176
20-5-2	5	20	8.2	0.35	6.03	6.26	0.894
3			12.6	0.90	7.35	7.11	1.040
4			16.0	1.25	8.27	7.15	1.075
5			21.0	2.18	10.01	8.49	1.062
6			24.7	2.90	10.86	8.85	1.107
7			29.7	3.90	12.04	9.87	1.131
30-3-1			3	30	5.5	0.43	4.55
2	8.2	0.98			5.29	4.10	1.076
3	12.6	2.06			6.86	5.01	1.122
4	16.0	3.16			8.08	5.60	1.112
5	21.0	4.65			9.70	6.46	1.110
6	24.7	5.60			10.43	7.02	1.171
7	29.7	7.25			11.70	7.67	1.186
30-5-2	5	30	8.2	0.40	5.90	6.21	0.915
3			12.6	0.95	7.19	6.28	0.977
4			16.0	1.62	8.40	6.63	1.050
5			21.0	2.98	10.04	7.57	1.052
6			24.7	3.72	10.79	8.06	1.140
7			29.7	5.15	12.07	8.76	1.134
40-3-1			3	40	5.5	0.50	4.37
2	8.2	1.20			5.48	3.76	1.021
3	12.6	2.80			7.35	4.72	1.010
4	16.0	4.13			8.17	5.24	1.094
5	21.0	6.08			9.76	5.96	1.100
6	24.7	7.25			10.33	6.44	1.189
7	29.7	9.25			12.15	7.32	1.120
40-5-2	5	40	8.2	0.45	5.91	5.99	0.912
3			12.6	1.20	7.07	5.89	1.071
4			16.0	2.26	8.54	6.40	1.024
5			21.0	3.98	10.14	7.03	1.039
6			24.7	5.02	10.84	7.54	1.106
7			29.7	6.50	11.84	8.08	1.169
50-3-1			3	50	5.5	0.58	4.28
2	8.2	1.42			5.32	3.80	1.068
3	12.6	3.20			6.92	4.28	1.106
4	16.0	4.95			8.17	4.76	1.094
5	21.0	7.05			9.62	5.30	1.124
6	24.7	8.45			10.31	5.69	1.192
7	29.7	10.80			11.53	6.22	1.212
50-5-2	5	50	8.2	0.50	5.80	5.98	0.938
3			12.6	1.35	7.26	5.67	1.029
4			16.0	2.60	8.40	6.02	1.050
5			21.0	4.56	10.22	6.64	1.027
6			24.7	5.95	11.23	6.98	1.048
7			29.7	7.80	12.03	7.56	1.137
60-3-1			3	60	5.5	0.60	4.26
2	8.2	1.55			5.31	3.59	1.071
3	12.6	3.55			6.76	4.01	1.109
4	16.0	5.47			8.10	4.35	1.116
5	21.0	7.90			9.55	4.90	1.137
6	24.7	9.70			10.34	5.19	1.187
7	29.7	12.20			11.42	5.68	1.229
60-5-2	5	60	8.2	0.50	5.82	6.09	0.931
3			12.6	1.46	7.19	5.55	1.045
4			16.0	2.84	7.75	5.83	1.186
5			21.0	5.10	10.00	6.21	1.062
6			24.7	6.60	10.86	6.56	1.104
7			29.7	8.65	11.85	6.95	1.163

水路境界面の不連続な変化によって擬似鞍形点が発生する場合には、その急変流性状から境界不連続面での平均水深 h_0 は平行流としての 限界水深 h_{e0} より低くなる。水面形解析に当ってはこの断面での水理量あるいは h_{e0} の発生位置を初期条件として与える必要があるから、ここでは h_0 と h_{e0} との関係を実験結果をもとにして検討する。 h_0 の大きさはその断面での水流の圧力分布特性に支配されるものであり、影響要素としてせき高 W 、せき長 L 、水路幅 B および初期流量 Q_0 が考えられるから、

$$f(h_0, W, L, B, Q_0, g) = 0 \dots\dots\dots (1)$$

の関係が成立し、流量 Q_0 を限界水深 h_{e0} で表わして (1) 式を無次元化すると、

$$h_0/h_{e0} = \varphi(W/h_{e0}, W/L, W/B, L/B) \dots\dots\dots (2)$$

の関係が得られる。実験資料をもとにしてこれらの無次元要素間の関係を見出すを試みたが、わずかに Fig. 1 に示すような h_0 と W との間に比例関係を求めたにすぎない。図によれば h_0/h_{e0} は 0.87 から 1.00 の範囲の変化を示し、一般に初期流量が大きいほど水深比は小さくなる傾向を示すが、せき長 L の影響は Q_0 が大きい場合を除いては顕著ではない。

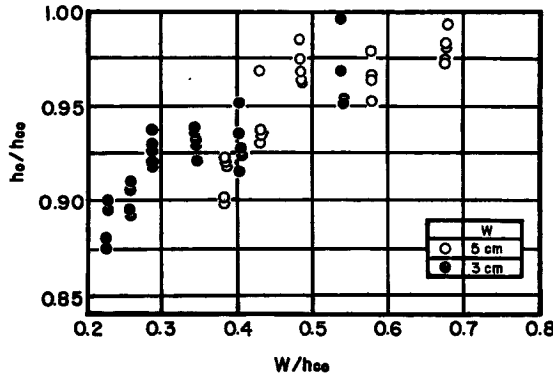


Fig. 1 Variation of brink depth with weir height.

(2) 擬似鞍形点の発生条件

せき上流端付近で流れが常流から射流に遷移する場合の水面形と等流水深曲線および限界水深曲線との位置関係は Fig. 1 に示すとおりである。すなわち、せき上流端での不連続な流量変化によって等流水深曲線が急変し、限界水深曲線と等流水深曲線との位置関係が逆転する場合にのみ擬似鞍形点の発生が認められる

せきより上流の接近水路での等流水深を h_{n0} 、限界水深を h_{e0} 、せき上流端での流出による変化を考慮した等流水深を h_{n1} ($h_{n1} < h_{n0}$) とすると、長方形一様断面水路についてそれぞれ次式の関係が成立する。

$$\sin\theta = \frac{Q_0^2}{C^2 R_0 B^2 h_{n0}^2} \dots\dots\dots (3)$$

$$\cos\theta = \frac{\alpha Q_0^2}{g B^2 h_{e0}^3} \dots\dots\dots (4)$$

$$\sin\theta = \frac{Q_0^2}{C^2 R_1 B^2 h_{n1}^2} - \frac{\alpha q_0 Q_0}{g B^2 h_{n1}^2} \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 Q_0 ：初期流量、 B ：水路幅、 C ：Chézy 係数、 α ：エネルギー補正係数、 q_0 ：せき上流端での流量変化率 $-(dQ/dx)_{x=0}$ 、 R ：径深であり、せき上流端で限界水深が発生すると仮定すると、

$$q_0 = \mu \sqrt{g(h_{e0} - W)} \dots\dots\dots (6)$$

で表示される。ここで μ は越流係数、 W はせき高である。

いま (5) 式に (4) 式および (6) 式の関係代入し、 $\alpha = 1$ 、 $\cos\theta \approx 1$ とすると次式が得られる。

$$i \left(\frac{h_{n1}}{h_{c0}} \right)^3 + \mu \left(\frac{h_{c0}}{B} \right) \left(1 - \frac{W}{h_{c0}} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{h_{n1}}{h_{c0}} \right) - \frac{g}{C^2} \left(1 + 2 \frac{h_{c0}}{B} \right) = 0 \dots\dots\dots (7)$$

擬似鞍形点が発生するための条件は $h_{n1}/h_{c0} < 1$ であるから、(7) 式から次式の関係を得る。

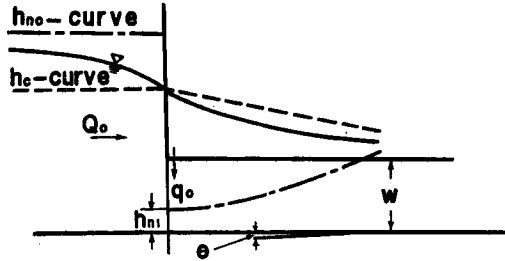


Fig. 2 Quasi-saddle point.

$$1 - \frac{W}{h_{c0}} \geq \left\{ \frac{g}{C^2} \left(1 + \frac{2h_{c0}}{B} \right) - i \right\}^{\frac{2}{3}} \dots\dots\dots (8)$$

$\mu = 0.586$ (De Marchi 公式) として計算された (8) 式の関係を図示したのが Fig. 3 の曲線であり、水路抵抗が大きく、また流量に比して水路幅が大きい場合には、限界水深に比べてかなり低いせきを設けなければ擬似鞍形点が発生しないことになる。せき高が 5 cm および 3 cm の場合の実験で得られたせき上流端水深と流量との関係曲線と限界水深曲線との交点の水深をもってせき上流端で擬似鞍形点が発生する下限値として、そのときの W/h_{c0} の値を Fig. 3 に図示したが、いずれも実測値は計算値より低くなることが示された。この違いはせき上流端で限界水深の発生を仮定したこととともに、後述のように越流水深が小さい場合の越流係数が平均値として 0.586 よりかなり小さくなるという事実によって説明される。

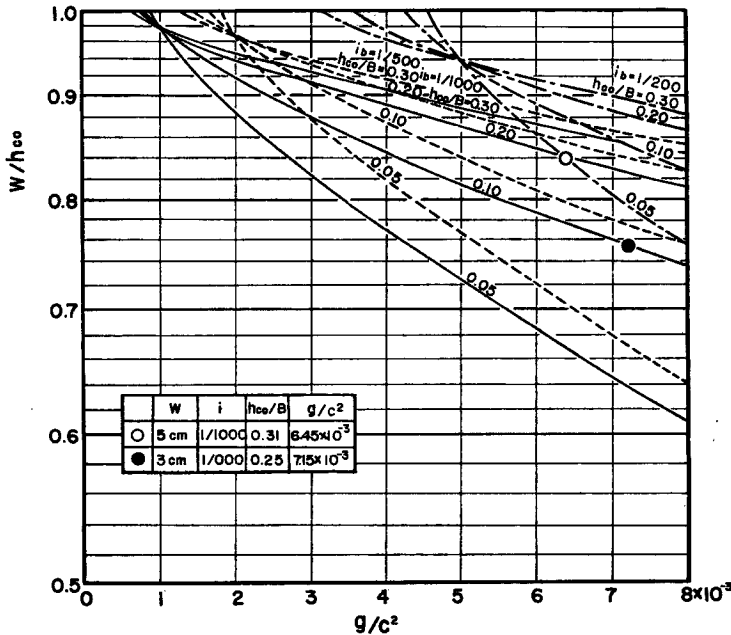


Fig. 3 Maximum height of weir to occur the quasi-saddle point.

(3) 比エネルギーの変化

従来の実用的水面形解析法ないしは越流量推定法を展開するための有力な一つの手法は、越流部での主流の比エネルギーが変化しないとの仮定に立脚し、直接積分によって水面形方程式を求め、また分水量を初期水理量のみで表わすことである。この仮定を立証するための実験も2, 3行なわれているが、ここでは筆者の測定結果にもとづいて比エネルギーの変化を考察する。

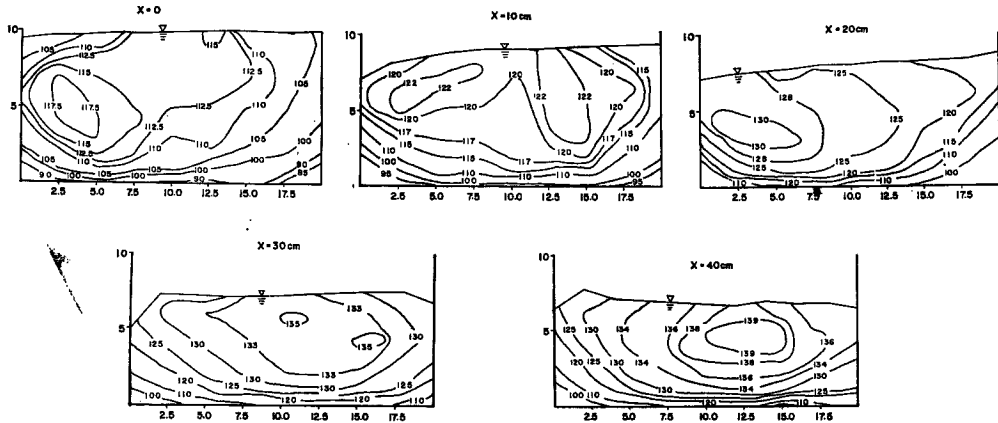


Fig. 4 Isovels of u -components in the overflow reach.

主流の流下方向成分の等流速線図の一例を Fig. 4 に示す。流下方向成分に関するエネルギー補正係数 α は

$$\alpha = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{u}{U_m} \right)^3 dA \dots\dots\dots (9)$$

であり、Fig. 4 から計算された α の値および植村の実験²⁾ ならびに筆者の多孔板型底部分水工に関する実験にもとづく計算値を流量配分比に対して図示したのが Fig. 5 である。流量配分工の全区間にわたって射流状態である場合には、 α は κ の大きさにほとんど無関係に一定値を示し、したがって流量が場所的に変化しても流下方向流速の分布形状はほとんど変化しないことが認められる。一方、主流が全区間で常流状態を呈する場合には、 α は流量配分比すなわち流出量の増加とともに直線的に増加し、流速分布形に流量変化の影響が敏感に現われるものと判断される。なお、流量配分工の形式によって α の値に差異が認められない事実は、流れの状態と流量変化率が同じであれば、水路境界面のいかなる位置から分水しても断面平均のエネルギーの分布が変らないものとして注目される。

横越流ぜきでは流下方向流速のみならずそれと直角方向の流速成分 v あるいは w も無視しえない大きさのものとなる。この場合の比エネルギー H は

$$H = \frac{1}{Q} \int_A \left\{ h + \frac{1}{2g} (u^2 + v^2 + w^2) \right\} u dA \dots\dots\dots (10)$$

で表わされ、エネルギー補正係数 α' は次式で与えられる。

$$\alpha' = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{u}{U_m} \right)^3 \left\{ 1 + \left(\frac{v}{U_m} \right)^2 + \left(\frac{w}{U_m} \right)^2 \right\} dA \dots\dots\dots (11)$$

鉛直速度成分はせきのごく近傍に限られ、また非静水圧分布にその影響が現われるところからこの影響は無視して検討をすすめた。本研究での流速測定は40-5-5に限られ、従来の測定資料も流下方向成分に限られているので、ここでは40-5-5の測定資料と w が u に比して無視しうると考えられる底部分水工上の射流に関する流速測定結果を用いて α' を計算し、Table 2 にその結果を示した。この α' の値を用いて計算された

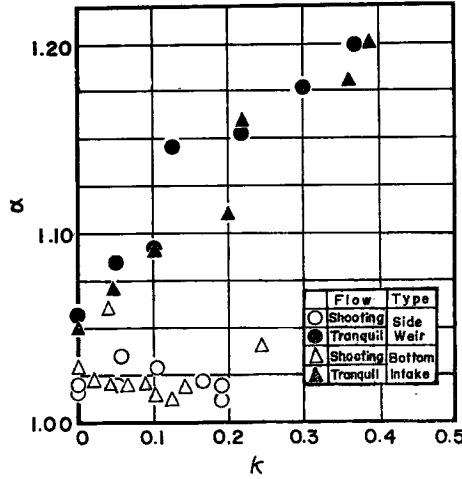


Fig. 5 Variation of energy correction factor against discharge distribution ratio.

各断面での比エネルギーの値も示しているが、射流状態では流下方向に比エネルギーが減少することが認められる。なお横越れ流せきに関する α' の平均値を用いて本研究でのすべての実験条件に対するせき下流端断面での比エネルギー H_2 と初期断面での H_0 とを計算し、その比を初期フルード数 F_{r0}' に対して図示したのが Fig 6 であり、比エネルギーの減少率はフルード数が大きくなるとともに増大することが示され、射流状態では比エネルギー一定の関係は厳密には成立しない。

Table 2 Variation of α' and specific energy.

Type	No. of run	x (cm)	κ	α	α'	H_2 (cm)	H_2/H_0
Side weir	40-5-5	0	—	1.016	1.047	15.81	1.000
		10	—	1.004	1.010	—	—
		20	0.100	1.016	1.020	15.02	0.950
		30	0.143	1.042	1.040	15.12	0.956
		40	0.190	1.020	1.020	14.69	0.929
Bottom rack	C-1	0	—		1.031	5.25	1.000
		12.5	0.041		1.050	5.21	0.992
		27.5	0.239		1.018	5.10	0.972
	C-16	0	—		1.035	9.27	1.000
		20	0.064		1.020	9.10	0.983
		30	0.103		1.014	9.09	0.981
		40	0.140		1.011	9.05	0.977

(4) 水面形の縦断変化

Fig. 7 にせき高および初期流量が一定でせき長のみを変化させた場合の断面平均水深の縦断変化を示すが、せき長はほとんど水面形の変化に影響しないことが認められ、次に考察するように越流量表示および越流係数 μ の値に問題があることを除いては、次の De Marchi の水面形方程式はほぼ満足すべき表示を与えるものといえる。

$$L = \frac{3B}{2\mu} \left\{ \phi \left(\frac{d_t}{E} \right) - \phi \left(\frac{d_0}{E} \right) \right\} \dots\dots\dots(12)$$

$$\phi = \left(2 - \frac{W}{E}\right) \sqrt{\frac{E}{d} - 1} - 3 \sin^{-1} \sqrt{1 - \frac{d}{E}} \dots \dots \dots (13)$$

ここに μ : 越変係数, E : せき頂より測ったエネルギー水頭, d : せき頂を基準とする越流水深であり, 添字 0 および 1 はそれぞれせきの上流端および下流端での値を表わす。

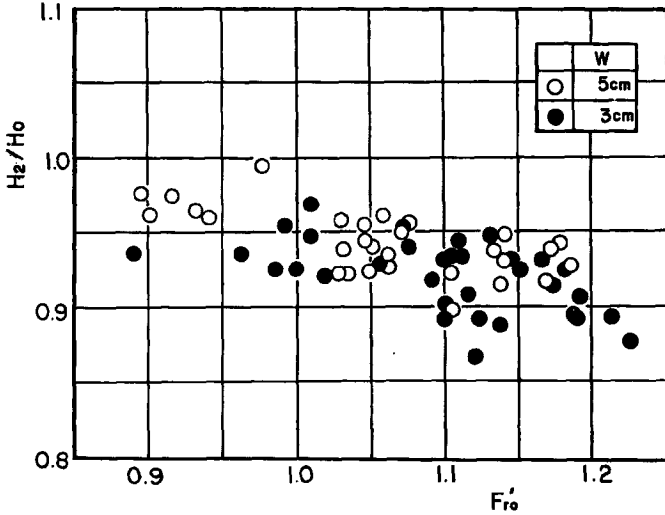


Fig. 6 Variation of specific energy in the overflow reach.

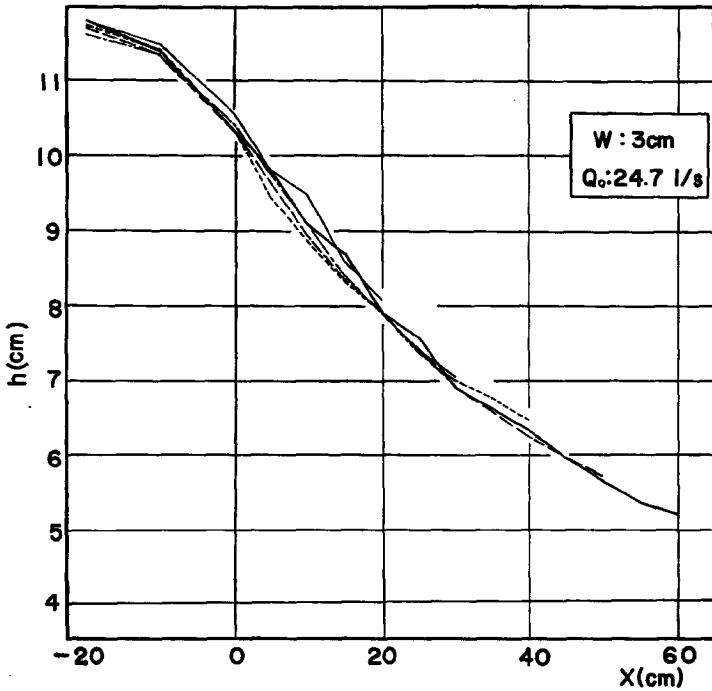


Fig. 7 Water surface profile in the overflow reach ($W=3\text{cm}$, $Q_0=24.7\text{l/s}$).

4. 横越流量公式に関する考察

(1) De Marchi 公式⁹⁾

与えられたせきおよび水路の形状条件および水理条件に対して横越流ぜきから流出する全越流量を推定するための実験的研究は古く今世紀の初頭から数多くの研究者によって行なわれてきたが、従来は通常のせき公式に含まれる諸係数をせき上での遷移流況の種類に応じて経験的に修正する方法がとられてきた。せき区間での流れの状態が射流となる水面形を初めて実験で見出したのは Coleman および Smith であり、彼等の提案した越流量公式が広く用いられてきたが、それにはせき区間での平均流速やせき下流端水深などの未知量が含まれており、またその適用範囲も限られたものであったために実用上の問題が多かった。

De Marchi は一様な長方形断面水路に横越流ぜきが設置されたとき、水路内の流れのもつ比エネルギーがせき区間で変化しないという仮定にもとづいて、(12) 式で表わされる水面形方程式を理論的に得た。この場合単位せき長当りの越流量を

$$q = -\frac{dQ}{dx} = \frac{2\sqrt{2g}}{3} \mu d^{\frac{3}{2}} \dots\dots\dots(14)$$

で表わし、 $\mu = \text{一定} = 0.623$ としているが、これによればせき上流端水理条件のみを与えることによって流出部での水面形と越流量とを同時に解析することができる。

いま実験で得られたせき区間での縦断平均水面形から 流下距離 5 cm ごとの平均越流水深 d_m を求め、 $\mu = 0.623$ として (14) 式から計算された各区間越流量をせき総長にわたって加算したものを理論総越流量 ΔQ_T とし、これと実測値 ΔQ_E とを比較したのが Fig. 8 であり、横軸にはせき長 L と水路幅 B との比

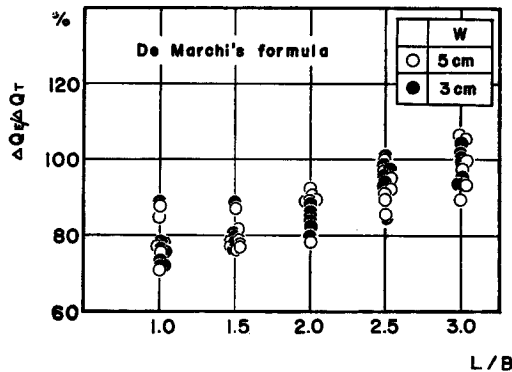


Fig. 8 Comparison of theoretical and experimental discharge capacity (De Marchi's formula).

をとっている。図から明らかなように、 L/B が大きくなるとともに本公式の適用精度は高くなるが、初期流量の大きさによるばらつきが大きく、 $L/B = 3.0$ の場合にも推定誤差は最大 $\pm 10\%$ に達する。

$L/B < 2.0$ の範囲では ΔQ_T は ΔQ_E より $10 \sim 30\%$ 大きい値を示し、また $L/B > 3.0$ の範囲については本実験の範囲内ではその変化を論じることは困難であるが、岩佐らの $L/B = 4$ の場合の実験⁹⁾ によって $\Delta Q_E / \Delta Q_T$ が 100% 以上となることが確かめられている。本実験ではせき高および初期流量の大きさと $\Delta Q_E / \Delta Q_T$ との間に相関関係を見出すことはできなかったが、 L/B の同一値に対しても点のばらつきが大きいところから、射流状態の流れに対して (14) 式の越流量表示を与えることには問題があるものと考えられる。

いま初期流量およびせき高が一定でせき長の異なる場合の越流量の測定結果を用いて、流下距離 10cm 区

間ごとの越流量を求め、その分布特性を示したのが Fig. 9 である。図から境界不連続点に近いせきの最上流区間および下流端付近を除いて、せき上での流出量は流下方向に余り変化しないことが示され、一方平均水深は流下方向に著しい減少を示すことから、(14) 式の表示が実際現象を忠実に表わすものでないことが確認された。

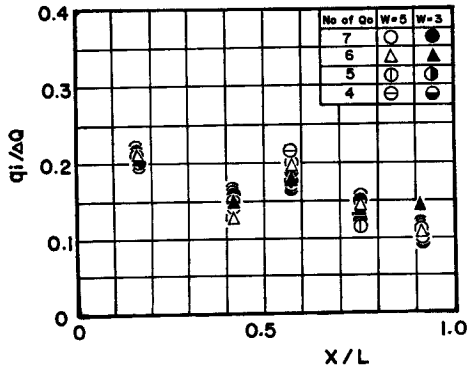


Fig. 9 Discharge distribution along the side weir.

実験的考察によって次式で表わされる修正を行なった。

$$1 - \kappa = \eta_{2c} \sqrt{2.5 - 1.5\eta_{2c}} \dots\dots\dots(16)$$

この関係が満足されることは筆者らの行なった測定結果を図示した Fig. 10 によっても明らかである。いませき長が ∞ の場合の流量配分比 κ_{∞} は、 $\eta_{2c} = W - h_{c0}$ とすると (16) 式から

$$1 - \kappa_{\infty} = \eta_{2c} \sqrt{2.5 - 1.5\eta_{2c}}$$

となり、実験によって κ と κ_{∞} の比が L/B の関数となることを確かめた。すなわち

$$\frac{1 - \kappa}{1 - \kappa_{\infty}} = 1 - 10^{-\frac{L}{8B}} \dots\dots\dots(17)$$

したがってせき長 L からの越流総量 ΔQ は

$$\frac{\Delta Q}{Q_0} = \frac{W}{h_{c0}} \sqrt{2.5 - 1.5 \frac{W}{h_{c0}}} (1 - 10^{-\frac{L}{8B}}) \dots\dots\dots(18)$$

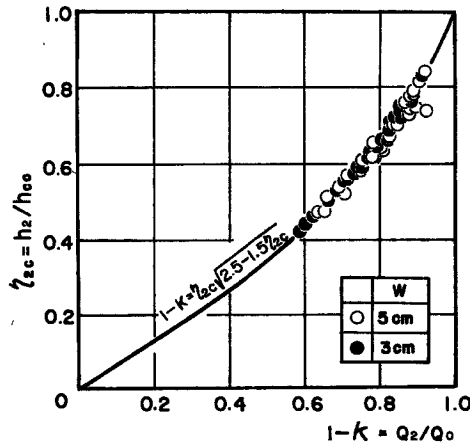


Fig. 10 Correlation of discharge rate and depth of flow.

(2) Frazer 公式⁵⁾

Frazer は横越流ぜきを有する場合に発生する3種の遷移流況すなわち、A. 常流→限界水深→射流、B. 常流→常流、C. 常流→限界水深→射流→跳水→常流について適用される越流量公式を半理論的に導いた。本研究で対象としたA. の流況に関しては De Marchi と同様、水路内の流れの比エネルギーが不変であり、せき上流端で限界水深が発生するという条件から次式の関係を得た。

$$1 - \kappa = \eta_{2c} \sqrt{3 - 2\eta_{2c}} \dots\dots\dots(15)$$

ここに κ : 流量配分比, η_{2c} : せき下流端水深 h_2 と上流端での限界水深 h_{c0} との比である。実際には比エネルギー関係は (15) 式で厳密には表示しえず、

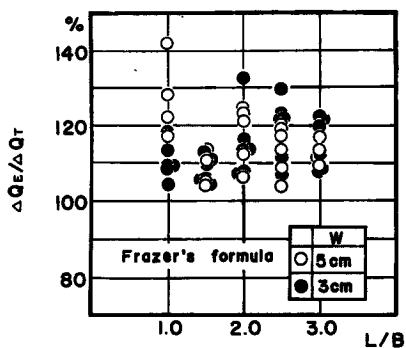


Fig. 11 Comparison of theoretical and experimental discharge capacity. (Frazer's formula).

の側壁が急にとり除かれた状態であるから、その点から連続的な衝撃波が発生し、あたかも気体の超音速流における角を曲がる流れ、すなわち Prandtl-Meyer flow と同様な流れの特色を示す。すでに嶋らは射流分岐水路の流量配分比についてこの解析方法を適用しているが、ここではせきのある場合についてその取り扱い方を検討し、越流量に関する理論値と実験値とを比較考察することを試みた。

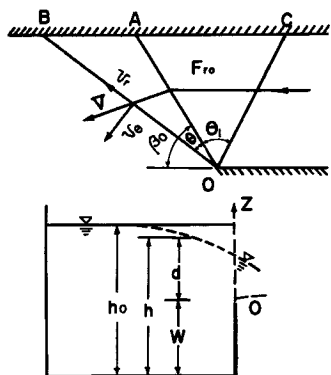


Fig. 12 Definition sketch.

を導入して補正する。すなわち

$$p = \rho g \lambda (d - z) \dots\dots\dots(22)$$

ここで d はせき頂を基準とした水深である。いま鉛直方向に速度分布が一様であると考え、 E をせき頂から測られたエネルギー水頭とすると、ベルヌーイの定理により

$$E = \frac{B}{Q} \int_0^d \left\{ \frac{v_r^2 + v_\theta^2}{2g} + \lambda(d - z) + z \right\} u dz = \frac{v_r^2 + v_\theta^2}{2g} + \frac{(1 + \lambda)}{2} d \dots\dots\dots(23)$$

が得られる。ここに B は水路幅、 u は水路軸方向の流速成分である。連続の条件は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot v_r \cdot d)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(v_\theta \cdot d)}{\partial \theta} = 0 \dots\dots\dots(24)$$

で与えられるが、この場合超音速流の性質から v_r, v_θ および d は r に無関係で θ のみの関数となるから、

(24) 式は

$$v_\theta \frac{dd}{d\theta} + \left(v_r + \frac{dv_\theta}{d\theta} \right) d = 0 \dots\dots\dots(24)'$$

となり、(18) 式によって計算された理論越流量と実測越流量の大きさを比較したのが Fig. 11 である。明らかにすべての実験条件に対して理論値は実験値よりかなり小さくなることが示された。Fig. 10 で(16) 式の関係が満足することが認められたから、(17) 式の関係がごく限られた範囲内では適用されないことを示している。

5. 二次元解析による越流量の考察

4. で考察したように既往の横越流量公式は射流状態の流れのみに関してもその推定精度が低く、あるいはその適用範囲が限られることがわかった。越流区間を射流で流下する場合はせき上流端でそのせき頂より上の

(1) 越流量式の誘導

Fig. 12 のようにせき上流端のせき頂を原点とする円柱座標系をえらび、半径、切線および鉛直方向の流速成分をそれぞれ v_r, v_θ, v_z とすると、摩擦およびこう配の影響を無視した運動方程式は

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \dots\dots(19)$$

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} = - \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \dots\dots(20)$$

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = - g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \dots\dots(21)$$

(21) 式で鉛直方向加速度を無視すると、圧力に関する静水圧分布式 $p = \rho g(d - z)$ がえられるが、せき頂から流出する流れについては静水圧分布の仮定が成立せず、ここでは圧力係数 λ

となる。また (19) および (20) 式も同様にして

$$\frac{dv_r}{d\theta} - v_\theta = 0 \dots\dots\dots(19)'$$

$$v_\theta \frac{dv_\theta}{d\theta} + v_r v_\theta = -\lambda g \frac{dd}{d\theta} \dots\dots\dots(20)'$$

(23) 式を θ について微分し, (24)' 式とより $dd/d\theta$ を消去すると

$$\left(v_r + \frac{dv_r}{d\theta}\right) \left(1 - \frac{v_\theta^2}{c^2}\right) = 0 \dots\dots\dots(25)$$

が得られる。ここに $c = \sqrt{g(1+\lambda)d/2}$ である。

(25) 式の解の一つは平行流を示し, 他の解は

$$v_\theta = \pm c \dots\dots\dots(26)$$

で, これと $d = 2c^2/g(1+\lambda)$ および(19)' 式の関係を用いて (23) 式に代入すると,

$$v_r^2 + 3\left(\frac{dv_r}{dr}\right) = 2gE$$

が得られ, これを v_r について解くと

$$v_r = \sqrt{2gE} \sin \frac{\theta + \theta_1}{\sqrt{3}} \dots\dots\dots(27)$$

$$v_\theta = \sqrt{\frac{2gE}{3}} \cos \frac{\theta + \theta_1}{\sqrt{3}} \dots\dots\dots(28)$$

が得られる。ここに θ_1 は積分常数であって, $\theta = 0$ で $F_r = F_{r0}$ なる条件より定まる。すなわち (27),

(28) 式を (23) 式に代入すると

$$d = \frac{4E}{3(1+\lambda)} \cos^2 \frac{\theta + \theta_1}{\sqrt{3}} \dots\dots\dots(29)$$

したがって $F_r^2 = v_r^2 + v_\theta^2 / \frac{gd}{2} (1+\lambda)$ とすれば,

(23) 式より

$$d(1+\lambda)/2E = 2/(2+F_r^2)$$

したがって (29) 式より

$$\frac{2}{2+F_r^2} = \frac{2}{3} \cos^2 \frac{\theta + \theta_1}{\sqrt{3}} \dots\dots\dots(30)$$

の関係が求められる。

越流量 ΔQ はせき長を L , 初期マッハ角を β_0 とすると

$$\Delta Q = (v_\theta \cdot d)_{\theta=\beta_0} \cdot L \dots\dots\dots(31)$$

であるから, これに (28) 式および (29) 式の関係を用いて, さらに $\theta = 0$ で $d = d_0$ なる条件を用いると結局越流量は次式で表われる。

$$\Delta Q = \frac{2\sqrt{g}Ld_0^{\frac{3}{2}}}{(1+\lambda)} \left(\cos \frac{\beta_0 + \theta_1}{\sqrt{3}}\right)^3 \left(\cos \frac{\theta_1}{\sqrt{3}}\right)^{-3} \dots\dots\dots(32)$$

したがって初期越流水深 d_0 , 初期流量 Q_0 およびせき長 L が与えられると, β_0 および θ_1 は初期フルード数 F_{r0} によって定まるから, 圧力係数を実験によって定めることにより越流量を理論的に求めることができる。

(2) 理論値と実験値との比較

i) 二次流成分の分布 上述の理論的考察ではせき頂標高より下の流れは何ら越流に関係せず, 水路軸方向の成分のみをもつものとして取り扱われた。このような取り扱い方の可否を検討するために, 流向流速の測定結果より越流区間の各断面における水路軸と直角方向の流速成分 v を求め, その等流速線を画いた結果

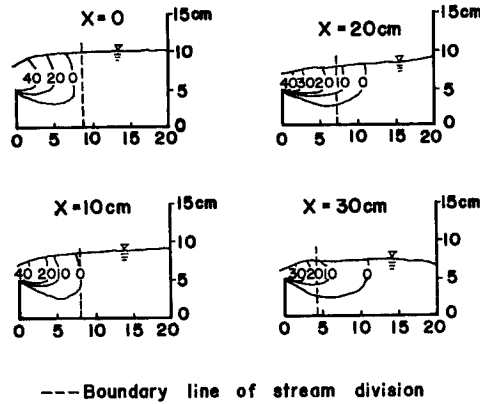


Fig. 13 Isovels of v -components in the overflow reach.

を Fig. 13 に示す。図から明らかなように下層流内では二次流成分は無視しうるほど小さく、したがって下層流は流出にはほとんど関与せず上述の解析に当っての仮定が正しいことが立証される。また上流端断面ではせき近傍に卓越した成分が現われ、流下距離とともにその分布がせき頂付近より次第に水路内側に拡がっていく傾向にあるが、各断面での分流境界線を境にして主流側での等流速線間隔が疎になることが注目される。主流方向成分の分布は Fig. 4 に示すように、せき近くでの顕著な水面こう配の形成によって下層流内でも次第にその卓越した領域がせきに接近する傾向を示すが、流下方向および横断方向の水面こう配が小さくなる越流区間の中程から下流では水路中央部に最大流速点が移行することが認められた。

ii) 圧力係数 λ せきを越える水脈内の流線の方向を実験で明確につかむことが困難であるところから直接測定によって越流水脈内の圧力分布を得ることは断念し、ここではせきに沿った越流水深の変化を測定し、その平均値を (29) 式に代入することによって各実験条件ごとの値を求めることにした。上述の理論的取り扱いによれば、水路軸方向と平行な衝撃波面はせき頂面と一致するから、せき上での越流水深は流下方向に変化せずに一定となり、したがって単位幅当りの越流量も流下方向に変わらないはずである。ただせきと反対側の側壁で反射した波の影響がせき上に現われ出すと、流下距離とともに越流水深が減少するから、反射波の影響が現われない $L=20\text{ cm}$ および 30 cm の場合についてのみ越流水深を測定した。その結果を Fig. 14 に示すが、図で縦軸はせき上流端から 5 cm 区間ごとの越流水深 d_w のせき全長にわたる平値 d_{wm}

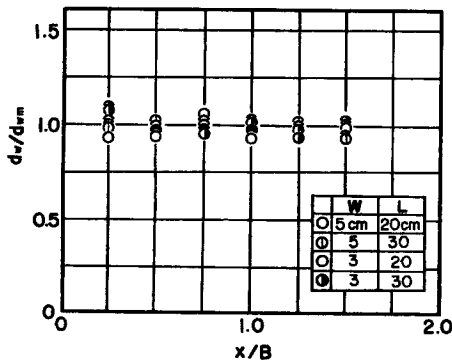


Fig. 14 Variation of the overflow depth on the weir.

に対する比がとられている。上流端断面では境界が不連続なためにせき上水深は極端に小さな値を示したがその他の点ではほとんど全区間にわたって越流深の変化は認められない。このような特性は越流量の分布特性にも現われることはすでに Fig. 9 に示したとおりである。

次にこの平均越流水深を使って (29) 式より求められた λ の計算値を流量配分比 κ に対して図示したのが Fig. 15 である。 κ の増加につれてわずかに λ が大きくなる傾向がみられるが、全測点は $0.60\sim 0.85$ の範囲にあって全体のばらつきは少なく、 λ の平均値として 0.751 が得られた。

iii) 越流量に関する考察 せき上で λ は一定値

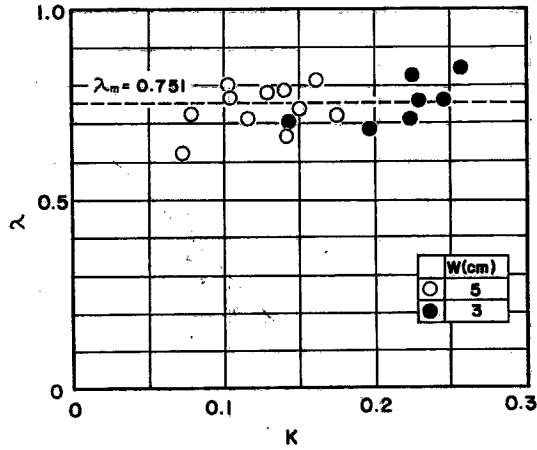


Fig. 15 Correlation of pressure coefficient and discharge distribution ratio.

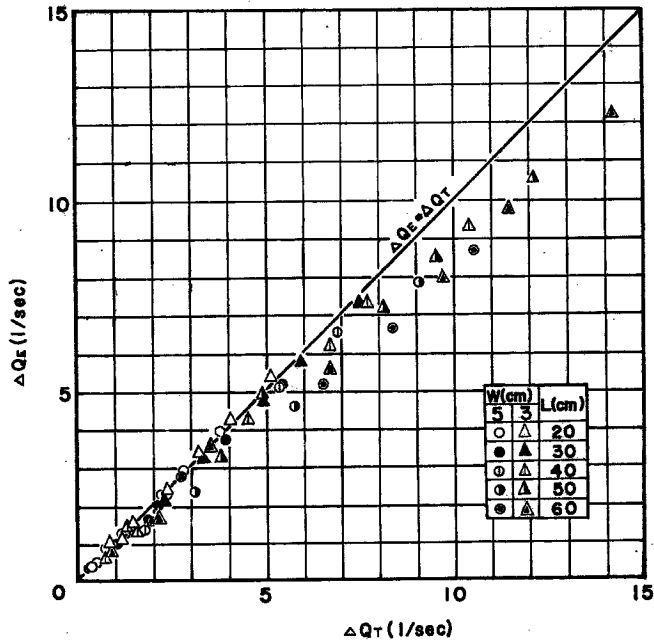


Fig. 16 Comparison of theoretical and experimental discharge capacity (theory of supersonic flow).

0.751をとるものとして、(32)式にこの値と初期値とを代入して計算されたせきからの越流量の理論値と実験値とを比較したものが Fig. 16 である。図によれば、 $L \leq 30\text{cm}$ すなわち $L/B \leq 1.5$ の範囲では実験値 ΔQ_E と理論値 ΔQ_T とはきわめて良好な一致を示し、この流量推定法による最大推定誤差はわずか4%にすぎない。しかしながら $L/B > 2.0$ になると、反射波の影響によって実際の越流水深は次第に減少していくから、実験値は理論値より小さくなることが示される。またせき上流断面での平均水深 h_0 を基準としたフルード数 F_{r0} が1に近い場合には、越流区間での主流は常流状態を示すことが多く、せき頂での

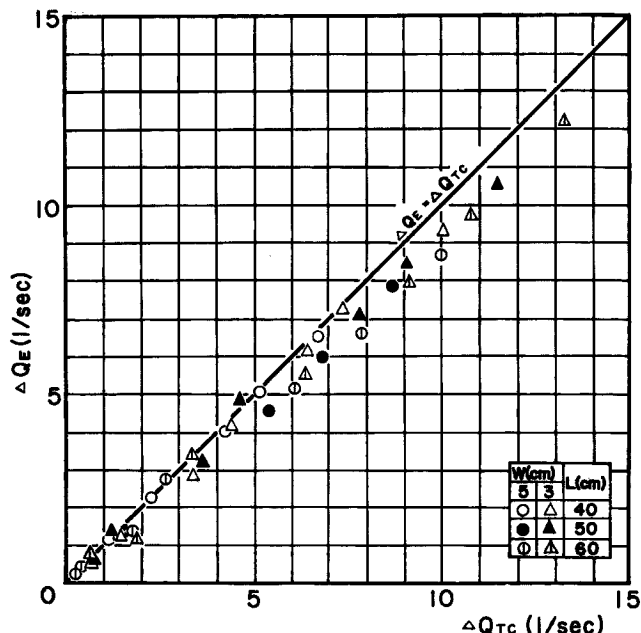


Fig. 17 Comparison of theoretical and experimental discharge capacity (with consideration of reflected waves).

擾乱の影響が下流へ及ばないことから、実験値が理論値に比べてかなり大きくなる。

いま $L/B > 2.0$ の範囲について、せき上流端に発生した不連続衝撃波が直線的に反対側の側壁に達し、そこで反射して次々に衝撃波の干渉をうけてせき上に到達するまでの水面形および速度成分の変化を特性曲線法⁷⁾によって求め、上で得られた理論越流量を補正した値 ΔQ_{ro} を実験値と比較したのが Fig. 17 である。このような反射波の影響を考慮した場合にもなお理論値は実験値よりやや大きくなるが、この原因として比エネルギーが流下方向に変化しないと仮定が実際現象に十分忠実でないこととともに、次節で述べるように主流内での衝撃波面上の屈折によってせきでの実際の水面降下量はより増大するためと考えられる。このような反射波の影響を考慮した二次元解析を行なうことによって長さが十分大きいせきの場合にも満足すべき流量推定精度が得られるものと考えられる。

6. 水面形の解析

(1) 解析法に関する考察

これまでの流量解析ではせき上流端に発生する擾乱の影響はせき区間の主流にまで直接及ぶものとして取り扱ってきた。したがってその擾乱特性はせき頂を基準とする水理量に支配され、せき頂面での擾乱波高と横断方向流速の理論式から導かれた(32)式の越流量公式は反射波の影響がせき上に及ばない限り、正しい表示を与えるものである。しかしながら、せき面から離れた水路内部の点における衝撃波の特性は明らかにその点での全水深にわたる平均水理量に支配されるのであって、越流区間での水面形を解析するにはこの点を考慮した取扱いが必要である。

いま Fig. 13 の二次流成分の分布図で二次流の卓越した領域が各断面でせき頂面を通り水路底に平行な線と分流境界線とで囲まれた領域にはほぼ一致するという実験的事実から、分岐流内ではせき頂面を基準とする水理量によって支配される衝撃波面が形成され、主流については分流境界線上での水面の連続性を考慮し

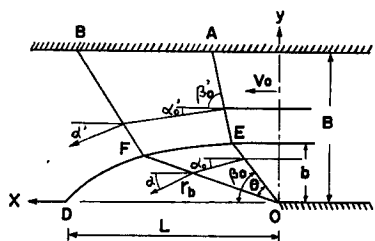


Fig. 18 Definition sketch.

て、2つの衝撃波面間の水面高は分岐流のそれと同じであり、伝播速度のみが全水深を基準とする大きさで表わされるものとするのが合理的である。Fig. 18 でせき上流端での側壁面から分流境界線までの距離 b は、連続の条件から

$$\Delta Q = b d_0 V_0 = \sqrt{g} L d_0^{\frac{3}{2}} \left(\cos \frac{\beta_0 + \theta_1}{\sqrt{3}} \right)^3 \left(\cos \frac{\theta_1}{\sqrt{3}} \right)^{-3}$$

の関係が成立するから

$$\frac{b}{L} = \frac{1}{F_{r0}} \left(\cos \frac{\beta_0 + \theta_1}{\sqrt{3}} \right)^3 \left(\cos \frac{\theta_1}{\sqrt{3}} \right)^{-3} \dots \dots \dots (33)$$

で与えられる。ここに V_0 はせき上流端断面での平均流速を表わす。分流境界線 ED については分岐流に関する流線の式 $(1/r)(dr/d\theta) = v_r/v_\theta$ に、 $\theta = 0$ で $r_b = b \operatorname{cosec} \beta_0 = b F_{r0}$ の関係と (27) および (28) 式を代入して解くと、

$$r_b = b F_{r0} \left(\cos \frac{\theta + \theta_1}{\sqrt{3}} \right)^{-3} \left(\cos \frac{\theta_1}{\sqrt{3}} \right)^3$$

が得られ、これに (33) 式の関係代入すると、

$$r_b = L \left(\cos \frac{\beta_0 + \theta_1}{\sqrt{3}} \right)^3 \left(\cos \frac{\theta + \theta_1}{\sqrt{3}} \right)^{-3} \dots \dots \dots (34)$$

で表わされる。

初期衝撃波面 OE は E 点で屈折し、 $\sin \beta_0' = \sqrt{g h_0} / V_0$ なるマッハ角で与えられる衝撃波面 EA が形成される。初期衝撃波面 OE からの微小偏角 θ を与えた場合の第 2 の衝撃波面 OF もまた F 点で屈折する上述の仮定によって EABF 領域内の水深 h は OEF 領域内の水深に等しいから、流線の変向角 α' は衝撃波理論によって次式で与えられる⁹⁾。

$$\alpha' = \sqrt{3} \tan^{-1} \sqrt{\frac{3h/2H}{1-(3h/2H)}} - \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{3h/2H}{1-(3h/2H)}} - \alpha_1' \dots \dots \dots (35)$$

ここに α' : 初期流向からの流線の変向角度、 H : 比エネルギー、 $\alpha_1' : h = h_0$ で $\alpha' = 0$ なる条件で定まる積分定数である。またマッハ角 β' は次式で表わされる。

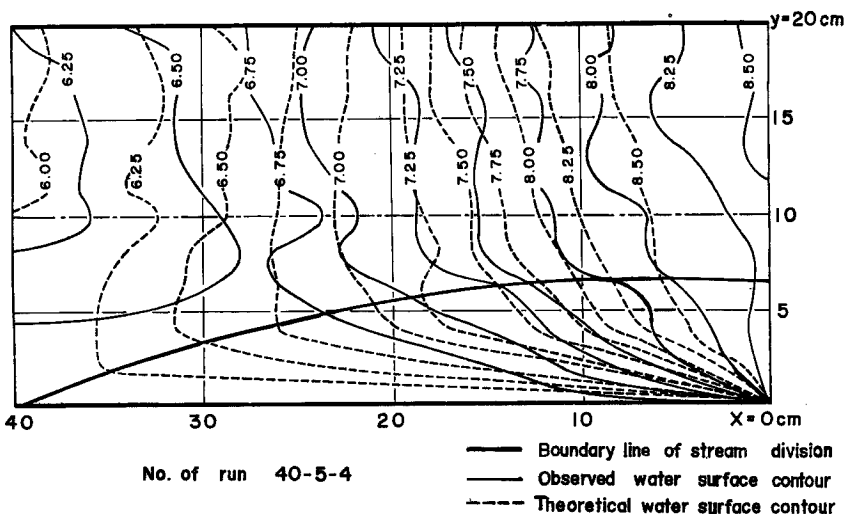


Fig. 19 Comparison of theoretical and observed water surface contours (Run 40-5-4).

$$\beta' = \sin^{-1} \left[2 \left(\frac{H}{h} - 1 \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \dots \dots \dots (36)$$

(2) 特性曲線法による水面形解析

(1) で述べた諸条件に基づき特性曲線法を用いて計算された衝撃波角および波高の変化から、水面の平均的な二次元変化を求め、それを用いて等水深線図を画いたのが Fig. 19 であり、実測等水深線を比較のため併せ図示した。実測結果ではせき上流端付近より平均水面の低下がみられ、せき端部での擾乱の影響が上流にまで及ぶことを示しているが、せき区間内での水面変化の状態は上述の解析法が妥当なことを表わしている。とくに分岐流と主流とにおける擾乱の伝播特性の相違が実測水面形の変化からも歴然としているのは注目されよう。また擾乱波面の屈折点が図中に示された分流境界線とほぼ満足すべき一致を示しているのは、上述の解析に当たっての仮定が満足されることを裏付けている。しかしながら、この水面形計算では主流における流量の連続性および分岐流側のせき頂より下の流れの影響を考慮していない点に問題があると考えられ、今後の研究にまつところが多い。

7. あとがき

本報告では射流状態での横越流ぜきからの越流量ならびに水面変化についての二次元解析を試み、実験によってその妥当性を検討したが、これまでの考察によって明らかにされた事項を列挙すれば次のとおりである。

(1) せき上流端で常流から射流に遷移する流れを得るためのせき高の限界値を水路抵抗および水路幅の無次元量で表わし、水路抵抗や水路幅が大きき場合にはせき高は限界深さに比べかなり小さくなることを示した。

(2) せきの上下流端の間での流れの比エネルギーの減少率は初期フルード数の大きさに比例することが明らかとなり、射流状態では比エネルギー一定の関係が厳密には成立しないことを確かめた。

(3) 横越流量に関する De Marchi 公式を検討した結果、越流量表示式および越流係数の値に問題があり、その流量推定誤差は10~30%に達することが示された。Frazer 公式についても同様な結果が得られたが、これによって一次元解析法による流量推定精度の限界が明らかとなった。

(4) Prandtl-Meyer flow としての二次元解析によってせきからの越流量を最大誤差4%の範囲内で推定することができる。

(5) 分岐流および主流での擾乱の伝播速度を変えた取扱いによって、せき区間での水面形の変化を満足すべき精度で解析することができる。

今後、常流状態での横越流特性についての実験的研究を行ない、横越流量の二次元解析法を確立したいと考えている。

最後に本研究を進めるに当たり、御懇篤なる御教示を賜わった岩垣雄一教授ならびに岩佐義朗教授に深甚の謝意を表するとともに、本研究は文部省科学研究費(特定研究)によるものであることを付記する。

参 考 文 献

- 1) 植村忠嗣: 横越流ぜきによる取水分水に関する研究, 京都大学修士論文, 昭38. 3.
- 2) 岩佐義朗, 中川博次: 底部取水工を有する開水路流れの特性について, 第9回水理講演会講演集, 土木学会水理委員会, 昭40. 2.
- 3) De Marchi: Saggio di teoria del fuzionamento degli stramazzi laterali, L'Energia Elettrica, Milano, Vol. 11, No. 11 pp. 849—860, Nov. 1934.
- 4) 岩佐義朗, 植村忠嗣: 横越流ぜきによる分流について, 土木学会関西支部年次学術講演会講演概要, 昭37. 11.

- 5) Frazer, W.: The behavior of side weirs in prismatic rectangular channels, Proc. ICE., Vol.66, 1957. pp.55—62.
- 6) 嶋祐之, 富永正照：射流分岐水路の流量配分比について, 土木学会論文集, 第55号, 昭33.9.
- 7) Ippen, A. T.: Mechanics of supercritical flow, high velocity flow in open channel, a symposium, Trans, ASCE, Nov., 1949, pp.1290—1317.
- 8) 同上