

# Sand Waves に関する研究

—Sand Waves の波高に関する—考察—

田 中 祐 一 朗

## STUDY ON SAND WAVES

—An consideration on the wave height of sand waves—

By Yuichiro TANAKA

### Synopsis

Wave propagation in one-dimensional erodible bed channels is discussed by using the quasi-steady approximation for shallow-water equation. This analysis starts from the assumption that sand waves of propagating without the variation of the from may exist. As the result of this analysis, an equation which decides the wave height of sand waves for low flow regime is obtained.

This expression well explains qualitatively the actual phenomena as follows. In the case of initiation of ripples with low Froude number, the wave height is very small by the effect of the critical tractive force. In dune regime, that develops suitable scale according to the flow condition. And in the case of transition, the wave height again decreases by the effect of the critical Froude number.

Numerical comparison of computed wave height and measured one shows good agreement in dune regime. But in ripples, the former is larger than the later. This cause must be discussed by further studies.

### 1. 緒 言

移動床水路に形成される sand waves は河川水理学上の各種の問題に関与して複雑な影響を及ぼしており、その機構の解明が広く要望されている。このため従来から多くの研究が行なわれているが、現象が複雑なせいもあって、残された問題が非常に多い。

前報において著者は水路の横断方向の水面振動を考慮ることにより、sand waves の波長を平均的な水量である程度表示することができた<sup>1)</sup>。しかし移動床水路での抵抗の問題を考慮する場合、これに及ぼす sand waves の形状抵抗は支配的な影響を与え、とくにその波高は相当粗度と極めて密接な関係があることが実験的に知られている<sup>2)</sup>。そこでまずこの問題を考察するに当たって、何らかの方法で sand waves の形状特性が把握される必要がある。

Sand waves の波高を与えるものとしてはすでに S. Yalin の研究<sup>3)</sup>がある。彼は谷付近における掃流力  $\tau_B$  は限界掃流力  $\tau_c$  に等しく、また流水の掃流力  $\tau_0$  と  $\tau_B$  の比は sand waves の波高  $H$  と水深  $h$  の比の関数になるとして、実験資料によりその関数形を決定している。しかしこのような考えはいかにも強引であり、またその結果から  $H/h < 1/6$  となるが、このような条件は実状に合わない場合も多く、彼の方法はそのままでは受け入れ難い。

そこで本論文は一般の河床変動の手法すなわち hydraulic model によって sand waves の形状特性を考察することを目的として試みた一つの解析を示すものである。

## 2. 変形せずに伝播する波動解について

Sand waves も河床変動の一形態である。したがって基礎方程式が現象を忠実に記述しているならば、これを解くことによってその形状が求められる筈である。こうした考え方からすでに微小変動法によって sand waves の発生、発達を論じた松梨の研究<sup>4)</sup>があり、また最近これとほぼ同様な方法で M. H. Gradowczyk<sup>5)</sup> が興味ある研究を発表している。

これらの研究によると、中立に安定な解の存在条件は水流の不安定限界の条件すなわち roll wave の発生条件とほぼ一致している。したがって一般に sand wave が存在する領域は不安定領域であって、最初に与えられた微小な変動は時間と共に増大することになり、このような領域では中立に安定な解は存在しないことになる。しかし実際の現象をよく観察してみると、平衡状態に達した後では個々の sand wave は生成、発達、消滅および他のものとの統合を繰り返して複雑に変化しているが、少なくとも統計的な平均という意味では安定な変形せずに伝播する wave が存在するように思われる。これは実測資料を統計的に処理してみると<sup>6)</sup>、そのスペクトルに顕著なピークが見られ、卓越した波の存在が認められることから分るだろう。

また Kennedy<sup>7)</sup> は「sand waves の波高が徐々に増大していくと、非線型効果が生じ、十分発達した dune や anti-dune では平衡な波高が存在する。この条件は dune では流水と流砂の間の遅れ  $\delta$  が波長  $L$  に等しく、anti-dune では  $\delta$  が 0 となることである」と述べている。彼の議論では  $\delta$  の物理的意味が明確でなく、十分な説明を与えたとはいえないが、平衡な波高の存在を示唆したことは注目すべきである。

以上のように、河床変動の基礎式から中立に安定な解およびその存在性が導けないのは非線型効果が導入されていないことや、また流砂量式として現在用いられているものは平均的なものであって、時間と場所の関数として与えられておらず、非平衡の問題に適用するには無理があるなど、基礎式自体がまだ十分に現象の細部まで記述していないことによるものではないかと考えられるが、これらの点は未だ十分解明されていない。そこで逆説的であるが、前提条件としてこのような変形せずに播伝する波動解の存在を仮定したらどうなるかという方向で以下の論議を進めていくことにしよう。

## 3. Sand waves 上の流れ

著者は先年 sand waves のスペクトル解析を行なって、二、三の問題について論じた<sup>8)</sup>。これは sand waves を不規則波として Fourier 級数に展開することにより、多くの三角関数の重畳として考えようとするものである。そこでまずその基本単位として一つの定まった正弦関数を与えた場合の様子を調べておくことも重要と思われる。前述のような変形せずに伝播する波動関数の関数形としては種々のものが考えられるが、上述の意味からここでは次のような sin 関数を与えることにする。

すなわち、Fig. 1 のように記号をとると河床形状は

$$z = -i_0 x + z_0 \sin \theta \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、

$$\theta = \frac{2\pi}{L}(x - \omega t) \quad \dots\dots\dots (2)$$

で表わされる。また同図よりエネルギー水頭は次のようになる。

$$H_e = z + h + \frac{u^2}{2g} \quad \dots\dots\dots (3)$$

一般に今考えているような場合には、時間的变化は緩慢で加速度項は省略できるから、(3)式より水流の運動方程式として次式を得る。

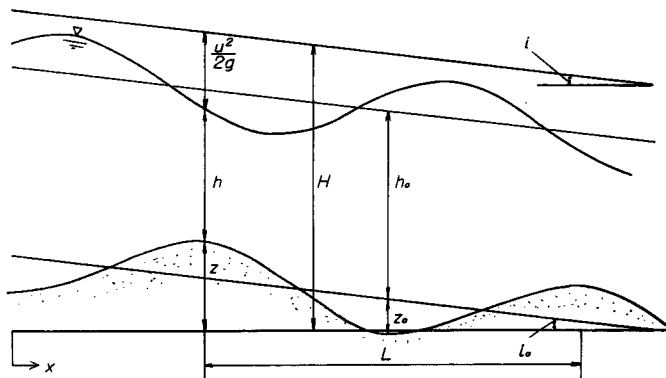


Fig. 1 Definition sketch.

$$i = -\frac{\partial H_c}{\partial x} = -\frac{u}{g} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (4)$$

一方向常流の場合の水流の連続式は

$$h \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

と与えらる。以上の諸式から水流に関する基礎式として次式を得る。

$$i - i_0 + i_0 \varepsilon_1 \cos \theta + (1 - F^2) \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに、

$$\varepsilon_1 = \frac{2\pi z_0}{i_0 L} \quad \dots\dots\dots (7)$$

いま (9) 式の解として  $h$  を次のように置くことにする。

$$h = h_0 \{1 + \varepsilon_2 \sin(\theta - \alpha)\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

Chezy 式によると、

$$i = \frac{q^2}{C^2 h^3}, \quad q^2 = C^2 i_0 h_0^3 \quad \dots\dots\dots (9)$$

となる。そこで

$$|\varepsilon_2| \ll 1 \quad \dots\dots\dots (10)$$

と仮定して  $\varepsilon_2$  の高次の項を省略すると、(8)、(9) 式より次の 2 つの式が得られる。

$$i = i_0 \left(\frac{h_0}{h}\right)^3 = i_0 \{1 - 3\varepsilon_2 \sin(\theta - \alpha)\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$F^2 = F_0^2 \left(\frac{h_0}{h}\right)^3 = F_0^2 \{1 - 3\varepsilon_2 \sin(\theta - \alpha)\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

(11)、(12) 式を (6) 式に代入すると次のようになる。

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{i_0 \{3\varepsilon_2 \sin(\theta - \alpha) - \varepsilon_1 \cos \theta\}}{1 - F_0^2 \{1 - 3\varepsilon_2 \sin(\theta - \alpha)\}} \quad \dots\dots\dots (13)$$

一方、(8) 式より

$$\frac{\partial h}{\partial x} = i_0 \frac{h_0}{z_0} \varepsilon_2 \cos(\theta - \alpha) \quad \dots\dots\dots (14)$$

となる。(13)、(14) 式を等置して  $\varepsilon_2$  の高次の項を省略すると次式を得る。

$$\varepsilon_1 \cos \theta = \frac{h_0}{z_0} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdot (F_0^2 - 1) \cos(\theta - \alpha) + 3\varepsilon_2 \sin(\theta - \alpha) \quad \dots\dots\dots (15)$$

(15) 式の左辺を加法定理で展開して両辺を比較することにより次の2つの式が得られる。

$$\varepsilon_1 \cos \alpha = \frac{h_0}{z_0} (F_0^2 - 1) \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots\dots\dots(16)$$

$$\varepsilon_1 \sin \alpha = -3\varepsilon_2 \dots\dots\dots(17)$$

(16), (17) 式より

$$\tan \alpha = \frac{3}{k} \dots\dots\dots(18)$$

ここに

$$k = \frac{2\pi h_0}{i_0 L} (1 - F_0^2) \dots\dots\dots(19)$$

を得る。また (15), (19) 式より

$$\varepsilon_2 = -\frac{\varepsilon_1}{k} \cos \alpha = -\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{k^2 + 9}} \dots\dots\dots(20)$$

を得る。 $F_0$  が1の近傍を除いて  $k$  はかなり大きく、その範囲では  $k^2 \gg 9$  だから (20) は近似的に次のように書ける。

$$\varepsilon_2 = -\frac{z_0}{h_0(1 - F_0^2) \left(1 + \frac{9}{2k^2}\right)} \dots\dots\dots(21)$$

(21) は前に仮定した (10) の条件を満足しており、これで解 (8) 式が決定できたことになる。

$F_0$  が1の近傍を除いて  $\tan \alpha = 0$  としてよいから、(1), (8), (21) を用いて水面波形は近似的に次のように表わされる。

$$H_w = z + h = (-i_0 x + h_0) + z_0 \left\{ 1 - \frac{1}{(1 - F_0^2) \left(1 + \frac{9}{2k^2}\right)} \right\} \sin \theta \dots\dots\dots(22)$$

(1) と (22) 式を比較するとその波形は  $F_0 \leq 1$  によって位相が異なることが分る。(18) 式より  $\alpha$  は  $F_0 < 1$  のときは第1, 第3象限にあり,  $F_0 > 1$  のときは第2, 第4象限にあることが分る。これを図示したものが Fig. 2 である。図中の記号の関係から

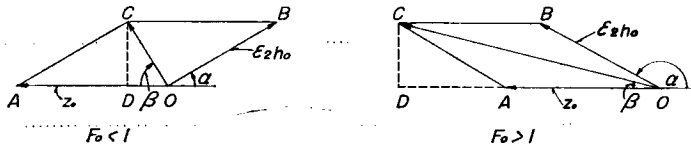


Fig. 2 The phase lag between bed wave and water wave.

$$\tan \beta = \frac{3k}{9 - F_0^2(k^2 + 9)} \dots\dots\dots(23)$$

と求められる。この角  $\beta$  が sand wave と水面波との位相差を表わすものである。以上のことをまとめるに次のようである。

$$F_0 < 1 : k \rightarrow \infty, \alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow \pi$$

$$F_0 > 1 : k \rightarrow -\infty, \alpha \rightarrow \pi, \beta \rightarrow 0$$

これは常流では位相差は  $\pi$  に近く、射流ではそれが0に近いことを示し、これまでの経験的事実とよく一致している。

4. Sand waves の波高について

(8), (11) および (10) の条件から  $u_*$  は次のように求められる。

$$u_* = (ghi)^{1/2} = u_{*0} \{1 - \varepsilon_2 \sin(\theta - \alpha)\} \dots\dots\dots (24)$$

現在では非平衡の状態に適用できる流砂量式が見出されていないため、平衡の場合のそれを適用できるものと仮定し、この場合限界掃流力を導入した Brown 型のものを用いることにすると、(24) 式を用いて、

$$q_B = q_{B0} \{1 - \varepsilon_2 \sin(\theta - \alpha)\} \left\{ 1 - \frac{2\varepsilon_2}{1 - \tau_c/\tau_0} \sin(\theta - \alpha) \right\}^m \dots\dots\dots (25)$$

となる。一般に流砂がかなり存在するときは  $\tau_c/\tau_0 \ll 1$  だから (25) は次のように簡単になる。

$$q_B = q_{B0} \{1 - A\varepsilon_2 \sin(\theta - \alpha)\} \dots\dots\dots (26)$$

ここに、 $q_{B0} = Ku_{*0}(u_{*0}^2 - u_{*c}^2)^m$

$$A = 1 + \frac{2m}{1 - \tau_c/\tau_0} \dots\dots\dots (27)$$

である。また流砂の連続式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial q_B}{\partial x} + (1 - \lambda) \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \dots\dots\dots (28)$$

ここに  $\lambda$  は砂の空隙率である。

いま解として河床形状を (1) のように仮定したことから次の関係式が導かれる。

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\omega \left( \frac{\partial z}{\partial x} + i_0 \right) \dots\dots\dots (29)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \dots\dots\dots (30)$$

(29), (30) に (28) を代入するとそれぞれ

$$\frac{\partial q_B}{\partial x} = \omega(1 - \lambda) \left( \frac{\partial z}{\partial x} + i_0 \right) \dots\dots\dots (31)$$

$$\frac{\partial^2 q_B}{\partial x \cdot \partial t} = -\omega^2(1 - \lambda) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \dots\dots\dots (32)$$

となる。

ここで伝播速度  $\omega$  を求める必要がある。Simons �ら<sup>9)</sup>は流砂の連続式 (28) において、 $\delta = x - \omega t$  と変数変換して積分を行なうことにより次式を得ている。

$$q_B = (1 - \lambda)\omega z + c_1 \dots\dots\dots (33)$$

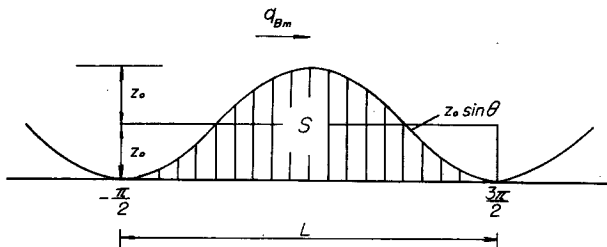


Fig. 3 Definition sketch.

ここに  $c_1$  は積分定数である。ripple や dune のようにクレストで水流が剝離するような場合は谷での流砂量は 0 と考えられる。そこで Fig. 3 のように座標をとると、 $z=0$  で  $q_B=0$  となり、したがって  $c_1=0$  となる。いま一波长だけ移動する時間内の平均流砂量を  $q_{Bm}$  とすると (33) 式より

$$q_{Bm} = \frac{1}{L} \int_0^L q_B dx = (1 - \lambda) \frac{\omega}{L} S \dots\dots\dots (34)$$

ここに  $S$  は

$$S = \int_0^L z dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} z_0 \sin \theta d\theta = z_0 L \dots\dots\dots (35)$$

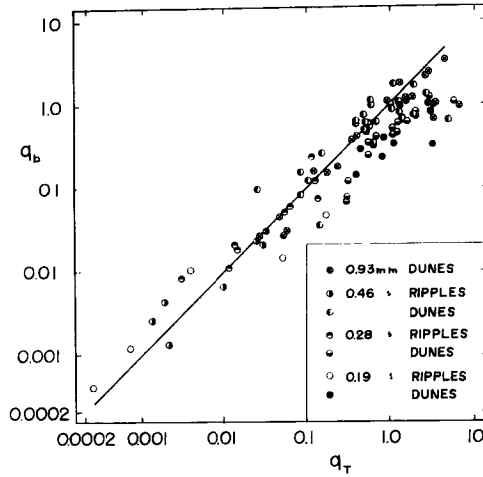


Fig. 4 Comparison with the computed bed-load and measured one.

となる。したがって (34), (35) より伝播速度は

$$\omega = \frac{q_{Bm}}{(1-\lambda)z_0} \dots\dots\dots(36)$$

と求められる。Fig. 4 は Simons らが ripple および dune の領域の場合、(36) の関係を実測と比較したものである<sup>9)</sup>。この場合実測の  $\omega$  と  $z_0$  より計算される流砂量  $q_b$  を縦軸に、実測の流砂量  $q_T$  を横軸にとってあり、両者はよく一致している。

(25), (36) 式を (31), (32) 式に代入するとそれぞれ次のようになる。

$$-Aq_{B0}\epsilon_2 \cos(\theta-\alpha) = q_{Bm} \cos \theta \dots\dots\dots(37)$$

$$-Aq_{B0}\epsilon_2 \sin(\theta-\alpha) = q_{Bm} \sin \theta \dots\dots\dots(38)$$

ここで  $q_{B0} = q_{Bm}$  と考えられるから、(37), (38) 式より

$$A^2\epsilon_2^2 = 1 \dots\dots\dots(39)$$

を得る。(39) 式に (21), (27) 式を代入し、sand wave の波高を  $H$  とすると、 $H = 2z_0$  だから、

$$\frac{H}{h_0} = \left| \frac{2}{2m+1-\tau_c/\tau_0} (1-F_0^2) \left(1 - \frac{\tau_c}{\tau_0}\right) \left(1 + \frac{9}{2k^2}\right) \right| \dots\dots\dots(40)$$

となる。このようにあらかじめ変形せずに伝播する波動解の存在を仮定して出発した解析であるが、 $\epsilon_2$  または  $H$  が決定されるということはこのような解の存在が可能であることを示すものと思われる。

(40) 式における  $m$  の値をどのようにとるべきかを調べるために、Simons<sup>10)</sup> らの実験資料によって  $q_{B*}$  と  $\tau_* - \tau_{c*}$  との関係を調べたものが Fig. 5 である。この図によると ripple とそれ以外の領域のものとはかなり明瞭な相異がある。そこで図中の折線のように近似することにより、二つの領域で  $m$  の値を変えることにした。

ripple :  $m = 6.9$

dune 等 :  $m = 2.1$

以上のようにして決定した  $m$  を用いて (40) 式の妥当性を調べたものが Fig. 6 である。 $F_0$  が 1 の近傍を除くと  $(1+9/2k^2)$  の項の影響は小さいので、これを省略した計算値を横軸に、また実測の  $H/h_0$  を縦軸にとってある。dune の領域のものとはかなり良い一致を見るが、ripple のものは殆んど線の下側にある。これは計算の途中で用いた  $\tau_c/\tau_0 \ll 1$  という仮定が ripple 付近では成立し難く、近似の精度が低下していることによるものと思われる。またその他に次のような理由も考えられる。第一は芦田ら<sup>11)</sup>が述べているよう

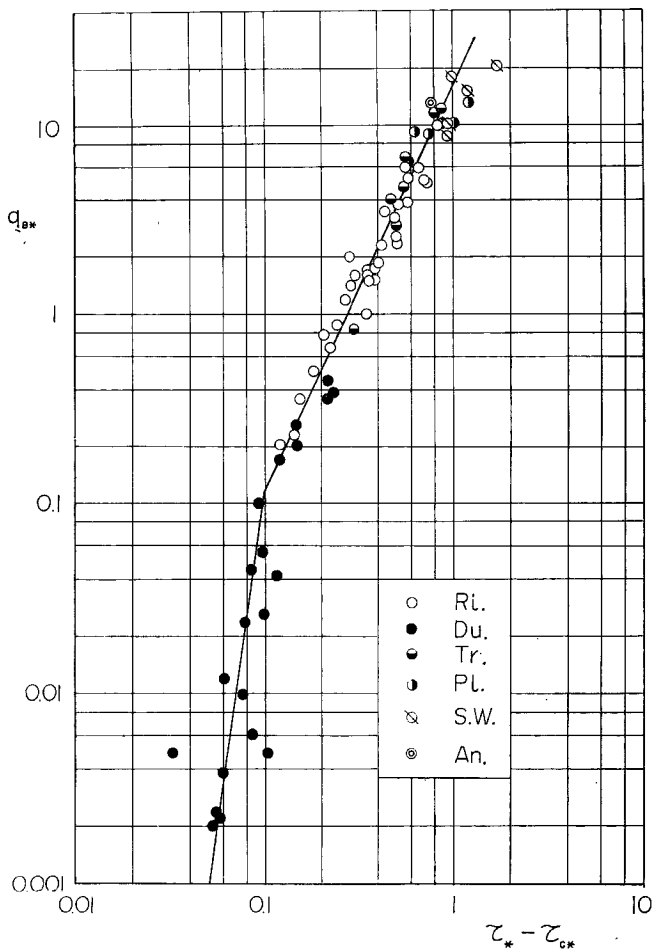


Fig. 5 Relation between  $q_{B*}$  and  $\tau_* - \tau_{c*}$ .

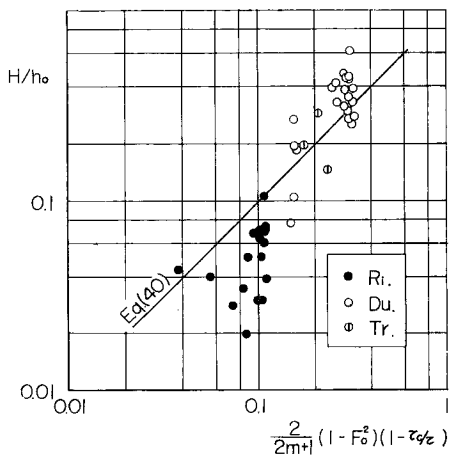


Fig. 6 Comparison with experimental data and Eq. (40).

に, ripple はその発達速度が極めて緩慢で, 平衡に達するまでには長時間を必要とする。このためいま用いた資料は未だ十分発達して平衡状態に達していないのではないと思われる。今一つの原因は ripple のように波高の小さいものは, その影響が底面近くに限定され, 水面にまでは及ばない。このため水深  $h_0$  の代りにその影響域を表わす別の量, 例えば境界層厚に相当するような量を用いるべきではないかとも考えられるが, これらの点については今後の研究に待たねばならない。

以上のように (40) 式は定量的には未だ若干の問題を残しているが, 定性的には次のように極めて興味ある説明を与えている。すなわち, 限界掃流状態に近い場合は Froude 数は一般に 1 に比べて非常に小さく, また  $9/2k^2$  も同様である。したがってこの場合は S. Yalin<sup>3)</sup> が求めたように (40) 式は

$$\frac{H}{h_0} = \frac{1}{6} \left( 1 - \frac{\tau_c}{\tau} \right) \dots\dots\dots(41)$$

の形となる。これは限界掃流力の作用によって sand wave の波高は小さくなり, いわゆる初期の plane bed の状態である。

ripple および dune の場合は (40) 式で規定されるまで波高は大きくなる。しかし transition の領域になると Froude 数は次第に 1 に接近するため, 波高は再び減少を始める。これが transition または flat bed と呼ばれる領域である。以上のことは相当粗度が ripple および dune の領域で急激に大きな値をとることに対応しており, 実際現象をかなりうまく説明しているものと思われる。

なお (40) 式はその誘導の過程において, (36) 式を用いている関係上, その適用は low flow regime に限定されることは明らかである。

## 5. 結 語

以上本研究は hydraulic model によって sand waves の形状特性, とくに波高についての考察を加えることを目的として, 変形せずに伝播する波動解の存在を仮定することから出発してごく大雑把な検討を行ってきた。その結果を要約すると次のようである。

(1) 以上の解析では仮定したような解の存在性についての十分な証明を与えたとは云えないが, このような解が存在する可能性はあるものと思われる。

(2) low flow regime において, 十分に発達した sand waves の波高は (40) 式で与えられる。

(3) 使用した流砂量式の妥当性などにより, (40) 式は定量的な意味では未だ十分でない。とくに ripple の領域では適合性が悪いが, この原因については残された問題である。

(4) (40) 式は初期の plane bed かつ transition までの sand wave の波高の発達, 減少については定性的にかなり合理的な説明を与えている。

(5) (40) 式は限界掃流状態に近い場合は S. Yalin がすでに求めた (41) 式とほぼ一致する。

最後に本研究を行なうに当り, 終始御指導を頂いた芦田和男教授に心から感謝の意を表する次第である。

## 参 考 文 献

- 1) 田中祐一郎: Sand waves 上の流れについて, 京大防災研究所年報, 第11号B, 昭43. 3, pp. 14—22.
- 2) 樫東一郎: 砂漣をともなう掃流作用について, 土木学会誌, 40—8, 昭38. 8, pp. 281—289.
- 3) S. Yalin: Geometrical properties of sand waves, Proc. ASCE, Vol. 90, HY 5, 1964, pp. 105—118.
- 4) 松梨順三郎: 開水路における移動床の不安定性について—微小振動法による理論的解析—, 土木学会論文集, 61号, 昭34. 3, pp. 47—53.
- 5) M. H. Gradowczyk: Wave propagation and boundary instability in erodible-bed channels, J. Fluid Mech, Vol. 33, Part. 1, 1968, pp. 93—112.



- 6) 芦田和男, 田中祐一郎: 砂漣に関する実験的研究(3), 京大防災研究所年報, 第10号B, 昭42.3, B, pp.121—132.
- 7) J. F. Kennedy: The mechanics of dune and anti-dune in erodible-bed channels, J. Fluid Mech, Vol.16, Part.4, 1963, pp.521—544.
- 8) K. Ashida and Y. Tanaka: A statistical study of sand waves, Proc. 12th. IAHR Congress, 1967, Vol.2, pp.103—110.
- 9) D. B. Simons, E. V. Richardson & C. F. Nordin: Unsteady movement of ripples and dunes related to bed-load transport, Proc. 11th. IAHR Congress, 1965, Vol.3, 3.29.
- 10) D. B. Simons and E. V. Richardson: Summary of alluvial channel data from flume experiments, Geological survey professional paper, 462—I, 1966.
- 11) 芦田和男, 奈良井修二: 河床変動のスペクトル特性について, 第12回土木学会水理講演会講演集, 昭43.2, pp.107—112.