

# 河道配列の統計則に関する基礎的研究

石原藤次郎・高棹琢馬・瀬能邦雄

## BASIC STUDY ON STATISTICAL LAWS OF CHANNEL DISTRIBUTION IN RIVER BASINS

By *Tojiro* ISHIHARA, *Takuma* TAKASAO and *Kunio* SENO

### Synopsis

The geometric structure of channel distribution in a river basin is a basic characteristic for the mathematical analysis of flood runoff as intensive hydrologic phenomena and for the quantitative evaluation of long range variations in configuration of river basin and runoff pattern in physical geography.

This paper treats with the stochastic process of the formation of channel distribution in a river basin under the action of external agency through the mathematical analysis of a model obtained in terms of the concept of stream orders in quantitative geomorphology, the theory of geometric network and the probabilistic approach.

The mathematical analysis discloses the probabilistic characteristics of geometric quantities composing the channel distribution, and it is concluded that the channel distribution converges to three statistical laws under the equilibrium condition.

The present approach will be a real contribution to the theoretical procedure in quantitative geomorphology and will play an important role in macroscopic water problems.

### 1. は し が き

流域地形の諸特性を定量的に把握することは、出水現象の解明に当り重要な事項の一つであることはいうまでもない。

複雑な流域地形の特性を定量的に把握・表現しようとする学問、すなわち計量地形学 (quantitative geomorphology) の分野では Horton から Strahler にいたる人達によって数多くの注目すべき成果をあげてきた。これらの成果のうち、出水現象との関連においてとくに重要なものとして、河道数、河道長、集水面積および河道こう配に関して経験的に得られた4つの地形則がある。これらは Horton<sup>2)</sup> の提案による河道位数 (stream orders) の概念を基礎として得られたものである。この河道位数とは、流域最上流端の河道すなわち水源の細流を位数1とし、同一位数  $u$  の二つの河道が合流してつくる河道を位数  $u+1$  とする (ある位数の河道にそれより小さい位数の河道が合流しても位数は変わらない) ものである (Fig. 1 参照)。この4つの地形則とはつぎのようなものである。

$$(a) \text{ 河道数則} \quad N_u = R_0^{k-u} \dots\dots\dots (1)$$

$$(b) \text{ 河道長則} \quad \bar{L}_u = \bar{L}_1 \cdot R_0^{u-1} \dots\dots\dots (2)$$

$$(c) \text{ 集水面積則} \quad \bar{A}_u = \bar{A}_1 \cdot R_0^{u-1} \dots\dots\dots (3)$$

$$(d) \text{ 河道こう配則} \quad \bar{S}_u = \bar{S}_1 \cdot R_0^{1-u} \dots\dots\dots (4)$$

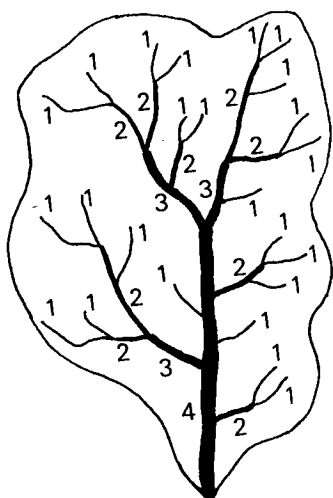


Fig. 1 Designation of stream orders.

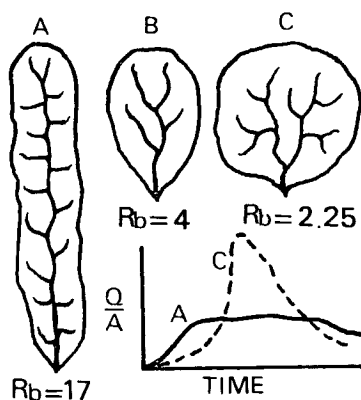


Fig. 2 Hypothetical basins of extreme and moderate bifurcation ratios, with schematic hydrographs.

ここに、 $N_u$  は位数  $u$  の河道数、 $\bar{L}_u$ 、 $\bar{A}_u$ 、 $\bar{S}_u$  はそれぞれ位数  $u$  の河道の平均的な長さ、集水面積、こう配を表わす。 $k$  は流域最下流河道の位数である。また、

$$R_b = \frac{N_u}{N_{u+1}}, \quad R_L = \frac{\bar{L}_{u+1}}{\bar{L}}, \quad R_a = \frac{\bar{A}_{u+1}}{\bar{A}_u}, \quad R_s = \frac{\bar{S}_u}{\bar{S}_{u+1}}$$

はそれぞれ、分岐比、河道長比、集水面積比、河道こう配比と名づけられており、一流域においては、すべての位数についてほぼ一定値をとることが確かめられている<sup>3)</sup>。なお、分岐比  $R_b$  については、その大小によってある程度出水の緩急を判定できるとされているが、定性的な議論にとどまっている<sup>4)</sup> (Fig. 2 参照)。

以上に列挙した4つの地形則は流域地形の巨視的な特性を定量的に表現している点で注目すべきであるが、それらは経験的に得られたものであり、その意味で普遍性をもつかどうか、さらには流域地形がどのように形成されていくかを知ることができない。

こうした地形則の理論的な裏づけを行なうことはわれわれ研究者にとって興味のある問題であるが、河道長、集水面積、河道こう配のような物理量に関する問題は取扱いが容易でなく、現段階ではこの三つの量に関する地形則については理論的裏づけはできない。しかし河道数則のように単なる数に関する問題は比較的取扱いが容易であり、理論的な考察が可能である。

一方、出水現象を解明しようとする立場からみると、河水の流下合流過程の場である河道網の分布状況の把握、表現に関して河道数則だけでははなはだ不十分である。

本研究は、河道網のトポロジーモデルを想定し、河道網の形成過程のランダム性を考慮することにより、河道網の分布状況に内在するさらに詳しい普遍的な法則性を確率論的に見出すとともに、従来の河道数則にも理論的裏づけを与え、それらの理論的に得られた結果の実証的検討を京都府由良川水系に対して行なったものである。

## 2. 河道網分布に関する確率論的考察

### 2.1. 河道網の形成過程に関する考察

流域地形は構造地形の上に浸食地形が形成されたものである。構造地形は地殻変動などの大規模な内的営力によって生じたものである。それが風化、あるいは雨水等による外的営力によって浸食され、現在の地形ができ上がったものといえる<sup>5)</sup>。ところで内的営力は通常その頻度がきわめて小さく、河道網を形成する営力はほとんど外的営力によるものと考えられる。長期にわたって見たとき、外的営力は一流域に対して時間

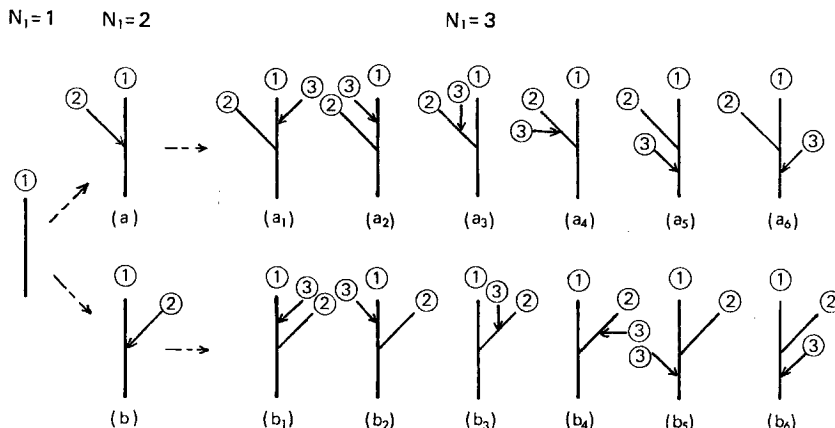


Fig. 3 Illustration showing the first three steps of development of a drainage system and the distinguishable cases at each step.

的、空間的に一様と考えてよいであろう。結局、河道網の形成過程は一様な外的営力働く確率過程と考えられる。

### 2.2. 河道網のモデル化とその可能性の集合

まず、河道網の発達段階を Fig. 3 のように模式的に考えよう。すなわち、ある位数1の河道が発生したとする。その河道①に別の位数への河道②が流入する場合を考えると、左から流入する場合 (a) と右から流入する場合 (b) の2通りが可能である。さらに (a) の配列状態に位数1の河道③が流入する場所は、河道②の左右、および河道①が合流点によって分割された二つの河道区分のそれぞれの左右であり、合計6ヶ所となることわかる。(b) の場合も同様である。

このように位数1の河道に発生順序による区別を与えてやると、位数1の河道数  $N_1=2$  のときは (a)、(b) の2通り、 $N_1=3$  のときは  $(a_1), (a_2), \dots, (a_6)$  と  $(b_1), (b_2), \dots, (b_6)$  の計  $2 \times 6 = 12$  通りの異なった河道配列状態が可能である。この異なった配列数の一般的な増加の仕方を考察してみよう。Fig. 3 からわかるように位数1の河道がある河道区分に合流すると、その河道区分は新しい流入によってできた合流点によって、二つに分割され、かつ新しく流入した河道も一つの河道区分となる。すなわち、新しい1つの河道の流入によって河道区分は常に2つ増加する。したがって、さらにつぎの河道が流入する異なった場所は、その増加した2つの河道区分それぞれの左右を考慮すると4つ増加したことになる。たとえば、 $N_1=4$  となるときは  $N_1=3$  のときの異なった配列  $(a_1), (a_2), \dots, (a_6), (b_1), (b_2), \dots, (b_6)$  のそれぞれに対して、 $6+4=10$ ヶ所の河道④が流入する異なった場所があるわけであり、したがって、それぞれ10通りの異なった配列ができ、それは結局、 $12 \times 10 = 120$ 通りの異なった配列を生じ得ることを意味する。以上の考察により、位数1の河道数  $N_1=n$  のときの異なった配列の総数  $Y_n$  は、一般的に、

$$Y_n = \left. \begin{array}{l} \prod_{r=2}^n (4r-6) \quad (\text{for } n \geq 2) \\ = 1 \quad (\text{for } n = 1) \end{array} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

と表わせることがわかる。

この  $Y_n$  は位数1の河道に発生順序による区別を与えたとき、位数1の河道数  $N_1=n$  の場合に起り得る異なった配列の可能性の集合の要素の総数を表す。前項の考察によれば位数1の河道の出現は場所的にも時間的にもランダムということができ、したがって、この  $Y_n$  個の元素に対して等確率  $1/Y_n$  を与えることができる。

ところでこのようにして得られた  $Y_n$  は位数1の河道の発生順序に無関係に異なる配列、すなわちトポ

ロジカルにのみ異なる<sup>9)</sup>配列の位数1の河道に発生順序による区別を与えることによって得られたものである。そこで任意の河道配列状態の位数1の河道に発生順序による区別をつけた場合、何通りの異なった状態が得られるかを考えよう。一流域においてすべての位数1の河道は一本の開曲線によって順につらねることができることは明らかである。したがって  $N_1=n$  の場合、位数1の河道に発生順序による区別を与えてやると  $n!$  通りの異なった状態が可能となるわけである。

以上の考察により、 $N_1=n$  のときトポロジカルにのみ異なる可能な配列の総数を  $Z_n$  とすると、 $Z_n$  個の個々の配列はすべて  $N_1=n$  からなっているから、

$$Y_n = Z_n \cdot n! \quad \dots\dots\dots(6)$$

となる。したがって、 $Z_n$  は (5) 式より

$$Z_n = \prod_{r=2}^n (4r-6)/n! \quad (\text{for } n \geq 2) \quad \dots\dots\dots(7)$$

となる。この式の右辺は、分母、分子に  $(n-1)!$  を乗じて変形すればつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} Z_n &= \binom{2n-2}{n-1}/n && (\text{for } n \geq 2) \\ &= 1 && (\text{for } n = 1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7')$$

この  $Z_n$  は位数1の河道数  $N_1=n$  の場合のトポロジカルに区別のできる河道配列型の可能性の集合の元素の総数を表わすものであって、 $Z_n$  個の元素それぞれに等確率  $1/Z_n (= n!/Y_n)$  を与えられることが先の考察より明らかである。この  $Z_n$  の実例を示したものが Fig. 4 であり、たとえば  $N_1=4$  の場合は  $Z_4=5$  個のトポロジカルに異なる配列が可能であって、これら5個の異なる配列はそれぞれ等確率1/5で起る。以下の

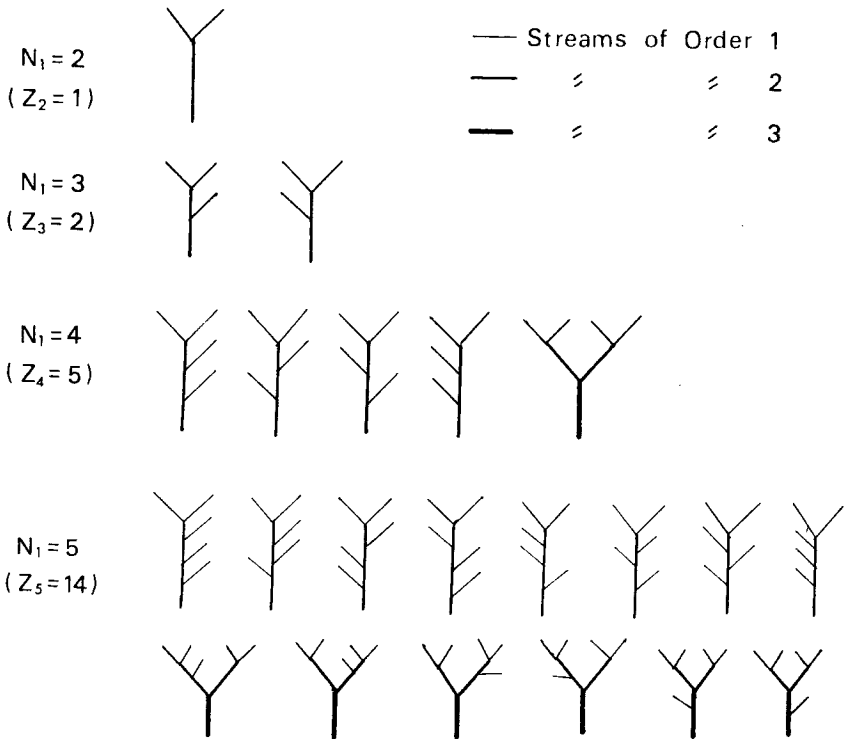


Fig. 4 Examples of the topologically distinguishable types of channel distribution.

議論はこのような集合を基礎として進めることにする。

2.3. 最確最大位数について

さて、Fig. 4 にみるように  $N_1=4$  の場合、最下流河道の位数（最大位数） $k=2$  の元素の数が4個、 $k=3$  のものが1個あり、 $N_1=5$  の場合は  $k=2$  のものが8個、 $k=3$  のものが6個あり、そしてそれ以外の元素はない。すなわち (7) 式で与えられる  $Z_n$  は最大位数が  $k(\geq 2)$  となる元素からなる互いに素な部分集合  $(Z_n)_k$  の和集合であるといえる。すなわち、このことを式に表わせば、

$$\left. \begin{aligned} (Z_n)_k \cap (Z_n)_l = \delta_{kl} \quad (k, l : 2, 3, \dots, m) \\ (Z_n)_2 \cup (Z_n)_3 \cup \dots \cup (Z_n)_m = Z_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

ここに、 $\delta_{kl}$  はクロネッカーのデルタであり、 $m$ は、

$$m = [\log_2 2n] \quad ([ ] : \text{ガウス記号}) \dots\dots\dots(9)$$

であって、位数1の河道数  $N_1=n$  のときに理論的に可能な最大位数である（たとえば  $N_1=7$  のとき  $m=3$ 、 $N_1=8$  のとき  $m=4$  となる）。

つぎにこの部分集合  $(Z_n)_k$  を構成する元素の数を表わす一般式を求めよう。

a)  $(Z_n)_2$  の一般式

まず、位数2の河道が生じるためには最小限2本の位数1の河道が必要であり、その2本の位数1の河道はトポジカルに異なる配列を作るのに関与しないことが Fig. 4 をみればわかるであろう。すなわちトポジカルに異なる配列を作るのに関与する位数1の河道は  $N_1=n$  のとき  $(n-2)$  本である。そしてこの  $(n-2)$  本の位数1の河道は、位数2の河道に上下にわたって、左右2つの区別をもって配列される。したがって、

$$(Z_n)_2 = 2^{n-2} \quad (\text{for } n \geq 2) \dots\dots\dots(10)$$

となる。

b)  $(Z_n)_3$  の一般式

先と同様に考えて、位数3の河道が1本できるためには少なくとも2本の位数2の河道が必要であり、したがって位数2と位数3の河道の組合せだけによる骨格的な配列の仕方の数は、位数2の河道数を  $N_2$  とすれば、(10) 式より  $2N_2-2$  個ある。また、位数2の河道が  $N_2$  本できるためには、位数1の河道は少なくとも  $2N_2$  本必要であり、この  $2N_2$  本の位数1の河道はトポジカルに異なる配列をつくるのに関与しない。そして残りの  $(N_1-2N_2)$  個の位数1の河道が位数2の河道および位数2の河道によって区切られた位数3の河道区分に配分され、その配分のされ方の異なった組合せの数は場所占めの理論<sup>1)</sup>により  $\binom{N_1-2}{N_1-2N_2}$  で与えられる。そしてその異なった組合せ個々に対して、a) の場合と同様な考え方で、左右に区別をつけることによって  $2N_1-2N_2$  個の異なった配列がある。以上の考察を総合し、位数2の河道数  $N_2$  は2から  $[N_1/2]$  までの変化が可能であることを考慮すれば、

$$(Z_n)_3 = \sum_{N_2=2}^{[N_1/2]} 2N_2-2 \cdot 2N_1-2N_2 \cdot \binom{N_1-2}{N_1-2N_2} \dots\dots\dots(11)$$

( $N_1=n$ ,  $[ ]$  : ガウス記号)

以上と同様な考察を行なうことにより、 $N_1=n$  のとき部分集合  $(Z_n)_k$  の一般式は、 $k=i(i=2, 3, \dots, m)$  に対してつぎのように与えられることがわかる。

$$\left. \begin{aligned} (Z_n)_i &= 2N_1-2 \quad (\text{for } i=2) \\ &= \left. \begin{aligned} &\sum_{N_2=2^{i-2}}^{[N_1/2]} \sum_{N_3=2^{i-3}}^{[N_2/2]} \dots \sum_{N_{i-1}=2}^{[N_{i-2}/2]} 2N_{i-1}-2 \cdot 2N_{i-2}-2N_{i-1} \cdot \binom{N_{i-2}-2}{N_{i-2}-2N_{i-1}} \\ &\times 2N_{i-3}-2N_{i-2} \cdot \binom{N_{i-3}-2}{N_{i-3}-2N_{i-2}} \dots \dots 2N_1-2N_2 \cdot \binom{N_1-2}{N_1-2N_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12) \\ &\quad (\text{for } i=3, 4, \dots, m) \end{aligned} \right.$$

ここに、 $N_i$  は位数  $i$  の河道数、 $m$  は (9) 式で与えられる可能最大位数、 $[ ]$  はガウス記号である。この式は再帰的表現にしたがえばつぎのようになる。

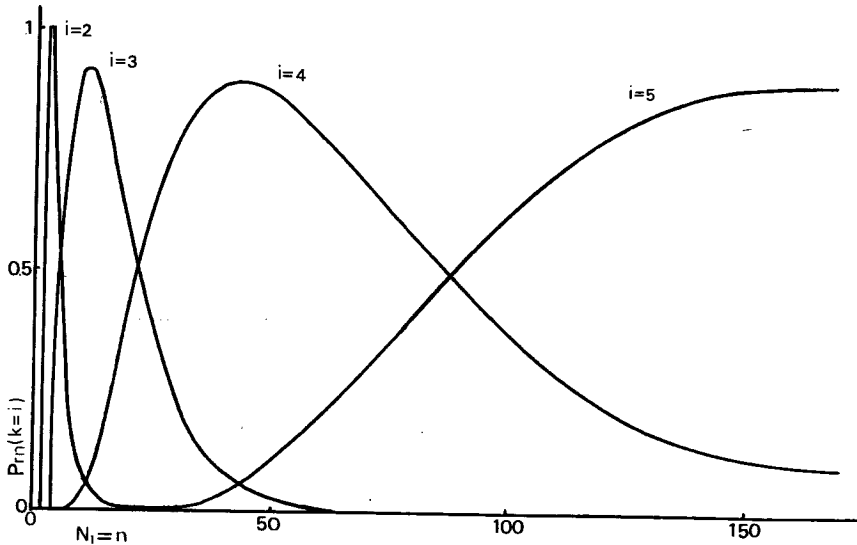


Fig. 5 Probabilities of the events that trunk number  $k$  becomes to  $i$  for given  $N_1=n$ , numbers of first order streams.

$$\begin{aligned}
 (Z_n)_i &= 2^{n-2} \quad (\text{for } i=2) \\
 &= \sum_{r=2^{i-2}}^{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot 2^{n-2r} \cdot \binom{n-2}{n-2r} \cdot (Z_n)_{i-1} \quad \dots\dots\dots (12') \\
 &\quad (\text{for } i=3, 4, \dots, m)
 \end{aligned}$$

さて、以上の式を用いることによって、 $N_1=n$  のとき最下流河道の位数 (最大位数)  $k$  が  $i(i=2, 3, \dots, m)$  となる確率  $P_{rn}(k=i)$  を求めることができる。すなわち、(8) 式から明らかに、

$$P_{rn}(k=i) = \frac{(Z_n)_i}{Z_n} \quad \dots\dots\dots (13)$$

として計算できる。

この値を  $i=2, 3, \dots, m$ ,  $n=2, 3, 4, \dots$  に対して、(7'), (12) 式によって逐次数値計算を行ない、グラフ化したものが Fig. 5 である。これから観察されることは、 $N_1=n$  の変化によって、最大位数  $k$  が  $i$  となる確率には、それぞれの  $k$  の値に対して最大値が存在し、その最大値を与える  $N_1$  の値の列は公比が約 4 の等比級数に近いこと、またその確率の最大値は非常に大きな値であり、かつ  $k$  の増加に対してかなり緩慢な減少を示すこと、および曲線の形も偏平化していくことであり、また任意の  $N_1$  の値に対して、 $P_{rn}(k=i)$  が 3 通り以上の  $i$  に対して大きな割合を占めることがないということも観察される。たとえば、 $N_1=42$  のときには、 $k=4$  となる確率が最大値約 0.9 で、 $k=3$ 、または  $k=5$  となる確率はともに約 0.05 となる。すなわち、 $N_1=42$  のときは最も期待される最大位数 (最確最大位数) は  $k=4$  ということになる。また  $N_1=21$  または  $N_1=22$  のときには、 $k=3$  となる確率も  $k=4$  となる確率もともに約 0.5 という値をとり、最確最大位数は  $k=3$  または  $k=4$  ということになる。もちろん、 $N_1=42$  のときでも  $k=2$  あるいは  $k=6$  となる可能性もあるわけであるが、その確率はほとんど 0 に等しいわけである。

ここに得られた結果は、位数化された河道配列に関する一つの数学的な興味を満足するだけでなく、全くランダムに発達する河道網にもならぬ統計則が成立することを示唆しているといえよう。すなわち、ある条件を備えた河道配列型の集合はそのトポロジカルに異なる元素の数が多ほど起りやすいという性質により、位数 1 の河道数  $N_1$  の増加とともにある統計的平衡状態に収束することが予想される。つぎに、この

統計的平衡状態がどのようなものであるか、またその状態にどの程度の大きさの  $N_1$  によって十分に近づくかを、期待値の概念を用いて調べてみよう。

2.4. 分岐比の期待値とその変化特性

Horton らの定義した分岐比  $R_b$  は  $R_b = N_u / N_{u+1}$  であって、数多くの流域の地形解析の結果、位数  $u$  にかかわらず、ほぼ一定となり、その値はふつう  $R_b = 3.0 \sim 5.0$  であることが知られている<sup>9)</sup>。ここではこの  $R_b$  の期待値を、前述のトポロジカルに異なる河道配列型の集合を基礎として求め、その値の  $N_1 = n$  の増加による変化特性を調べる。

$R_b$  の期待値はつぎのようにして求めることができる。たとえば、Fig. 4 の  $N_1 = 5$  の場合を例にとると、 $N_1/N_2 = 5$  の場合のトポロジカルに異なる河道配列型の集合の元素が 8 個、 $N_1/N_2 = 2.5$  の場合が 6 個ある。

2.2. で考察したように、この計 14 個の元素に等確率  $1/14$  が与えられるから、 $N_1 = 5$  のときの  $N_1/N_2$  の期待値  $E_5(N_1/N_2)$  は、

$$E_5\left(\frac{N_1}{N_2}\right) = 5 \times \frac{8}{14} + 2.5 \times \frac{6}{14} = 3.93 \quad \dots\dots\dots(14)$$

となる。つぎにこの期待値を表わす一般式を求めよう。

(12) 式によると

$$(Z_n)_2 = 2N_1 - 2 \quad \dots\dots\dots(15)$$

$$(Z_n)_3 = \sum_{N_2=2}^{[N_1/2]} \left\{ 2N_2 - 2 \cdot 2N_1 - 2N_2 \cdot \binom{N_1-2}{N_1-2N_2} \right\} \quad \dots\dots\dots(16)$$

$$(Z_n)_4 = \sum_{N_2=4}^{[N_1/2]} \sum_{N_3=2}^{[N_2/2]} \left\{ 2N_3 - 2 \cdot 2N_2 - 2N_3 \cdot \binom{N_2-2}{N_2-2N_3} \right\} \cdot 2N_1 - 2N_2 \cdot \binom{N_1-2}{N_1-2N_2} \quad \dots\dots\dots(17)$$

$$\vdots$$

$$(Z_n)_m = \sum_{N_2=2^{m-2}}^{[N_1/2]} \sum_{N_3=2^{m-3}}^{[N_2/2]} \dots \dots \sum_{N_{m-1}=2}^{[N_{m-2}/2]} 2N_{m-1} - 2 \cdot 2N_{m-2} - 2N_{m-1} \cdot \binom{N_{m-2}-2}{N_{m-2}-2N_{m-1}}$$

$$\cdot 2N_{m-3} - 2N_{m-2} \cdot \binom{N_{m-3}-2}{N_{m-3}-2N_{m-2}} \cdot \dots \cdot 2N_2 - 2N_3 \cdot \binom{N_2-2}{N_2-2N_3}$$

$$\cdot 2N_1 - 2N_2 \cdot \binom{N_1-2}{N_1-2N_2} \quad \dots\dots\dots(18)$$

まず、部分集合  $(Z_n)_2$  の個々の元素はすべて  $N_2 = 1$  であるから、(15) 式で与えられる  $2N_1 - 2$  個のそれぞれが、 $N_1/N_2 = N_1$  の分岐比をもつ。つぎに部分集合  $(Z_n)_3$  の場合は、(16) 式をみれば明らかのように、 $N_2$  は 2 から  $[N_1/2]$  までの異なった値をとるものから構成されており、各  $N_2$  の値に対する元素の個数は

$$2N_2 - 2 \cdot 2N_1 - 2N_2 \cdot \binom{N_1-2}{N_1-2N_2}$$

であり、これらの元素は  $N_1/N_2$  ( $N_2 = 2, 3, \dots, [N_1/2]$ ) の分岐比をもつ。同様に、部分集合  $(Z_n)_4$  は、 $N_2$  が 4 から  $[N_1/2]$  までの値をとるものから構成されており、各  $N_2$  に対する元素の個数は、

$$\sum_{N_3=2}^{[N_2/2]} \left\{ 2N_3 - 2 \cdot 2N_2 - 2N_3 \cdot \binom{N_2-2}{N_2-2N_3} \right\} \cdot 2N_1 - 2N_2 \cdot \binom{N_1-2}{N_1-2N_2}$$

であることが (17) 式からわかる。これらの元素は  $N_1/N_2$  ( $N_2 = 4, 5, \dots, [N_1/2]$ ) の分岐比をもつ。

このように (12) 式の構造を考慮することによって、位数 1 の河道数  $N_1 = n$  に対する、分岐比  $N_1/N_2$  の期待値  $E_n(N_1/N_2)$  は、各元素が等確率  $1/Z_n$  をもち、かつすべての元素は共通の  $N_1 = n$  をもつから、結局つぎのようになることがわかる。

$$E_n(N_1/N_2) = \left( (N_1 \cdot 2N_1 - 2 + N_1 \cdot \sum_{N_2=2}^{[N_1/2]} \frac{1}{N_2} \cdot 2N_2 - 2 \cdot F_1 \right.$$

$$\left. + N_1 \cdot \sum_{N_2=4}^{[N_1/2]} \frac{1}{N_2} \sum_{N_3=2}^{[N_2/2]} 2N_3 - 2 \cdot F_2 \cdot F_1 \right)$$

$$\begin{aligned}
 &+ N_1 \cdot \sum_{N_2=8}^{[N_1/2]} \frac{1}{N_2} \cdot \sum_{N_3=4}^{[N_2/2]} \frac{1}{N_3} \cdot \sum_{N_4=2}^{[N_3/2]} 2^{N_4-2} \cdot F_3 \cdot F_2 \cdot F_1 \\
 &+ \dots + N_1 \cdot \sum_{N_2=2^{m-2}}^{[N_1/2]} \frac{1}{N_2} \cdot \sum_{N_3=2^{m-8}}^{[N_2/2]} \dots \sum_{N_{m-1}=2}^{[N_{m-2}/2]} 2^{N_{m-1}-2} \cdot F_{m-2} \\
 &\cdot F_{m-3} \cdot \dots \cdot F_2 \cdot F_1 \Big/ Z_n \dots \dots \dots (19)
 \end{aligned}$$

ここに、 $m$ は(9)式で与えられる可能最大位数を表わし、 $F_j(j=1, 2, 3, \dots)$ は式を簡単にするため、つぎのように定義した値を表わす。

$$F_j \equiv 2^{N_j-2} N_{j+1} \binom{N_j-2}{N_j-2N_{j+1}} \dots \dots \dots (20)$$

つぎに、 $N_1=n$ のときの分岐比  $N_2/N_3$  の期待値  $E_n(N_2/N_3)$  の一般式を求めよう。

まず注意しなければならないのは、位数3の河道を含む集合だけを対象としなければならないということである。すなわち、 $N_2/N_3$ を求めるのであるから、位数3の河道ができていないことを前提条件とするわけであり、位数3の河道を含まない部分集合  $(Z_n)_2$  を除外した集合において期待値を求めなければならない。この  $(Z_n)_2$  を除外した集合の各元素は、明らかに等確率  $1/(Z_n - (Z_n)_2)$  が与えられる。

さて、部分集合  $(Z_n)_3$  の各元素はすべて  $N_3=1$  であり、またこの集合は  $N_2=2, 3, \dots, [N_1/2]$  によって区別されるそれぞれ互いに素な部分集合からなっている。 $(Z_n)_4$  は  $N_2=4, 5, \dots, [N_1/2]$  によって区別される部分集合からなり、その部分集合は、さらにそれぞれ  $N_3=2, 3, \dots, [N_2/2]$  によって区別される部分集合よりなっている。以上と同様の考察を  $(Z_n)_5, \dots, (Z_n)_m$  に対して行なうことにより、位数1の河道数  $N_1=n$  のときの  $N_2/N_3$  の期待値  $E_n(N_2/N_3)$  の一般式はつぎのようになることがわかる。

$$\begin{aligned}
 E_n(N_2/N_3) = & \left( \sum_{N_2=2}^{[N_1/2]} N_2 \cdot 2^{N_2-2} \cdot F_1 + \sum_{N_2=4}^{[N_1/2]} N_2 \cdot \sum_{N_3=2}^{[N_2/2]} \frac{1}{N_3} \cdot 2^{N_3-2} \cdot F_2 \cdot F_1 \right. \\
 & + \sum_{N_2=8}^{[N_1/2]} N_2 \cdot \sum_{N_3=4}^{[N_2/2]} \frac{1}{N_3} \cdot \sum_{N_4=2}^{[N_3/2]} 2^{N_4-2} \cdot F_3 \cdot F_2 \cdot F_1 + \dots \\
 & + \sum_{N_2=2^{m-2}}^{[N_1/2]} N_2 \cdot \sum_{N_3=2^{m-8}}^{[N_2/2]} \frac{1}{N_3} \cdot \sum_{N_4=2^{m-4}}^{[N_3/2]} \dots \sum_{N_{m-1}=2}^{[N_{m-2}/2]} 2^{N_{m-1}-2} \\
 & \left. \cdot F_{m-2} \cdot F_{m-1} \cdot \dots \cdot F_2 \cdot F_1 \right) / (Z_n - (Z_n)_2) \dots \dots \dots (21)
 \end{aligned}$$

同様な考察によって、一般に、 $N_1=n$ のときの分岐比  $N_u/N_{u+1}$  ( $u=1, 2, \dots, n-1$ ) の期待値  $E_n(N_u/N_{u+1})$  は、

$$\begin{aligned}
 E_n(N_u/N_{u+1}) = & \left( \sum_{N_2=2^{u-1}}^{[N_1/2]} \sum_{N_3=2^{u-2}}^{[N_2/2]} \dots \sum_{N_{u-1}=4}^{[N_{u-2}/2]} \sum_{N_u=2}^{[N_{u-1}/2]} N_u \cdot 2^{N_u-2} \right. \\
 & \cdot F_{u-1} \cdot F_{u-2} \cdot \dots \cdot F_2 \cdot F_1 \\
 & + \sum_{N_2=2^u}^{[N_1/2]} \dots \sum_{N_u=4}^{[N_{u-1}/2]} N_u \cdot \sum_{N_{u+1}=2}^{[N_u/2]} \frac{1}{N_{u+1}} \cdot 2^{N_{u+1}-2} \cdot F_u \cdot F_{u-1} \cdot \dots \cdot F_2 \cdot F_1 \\
 & + \sum_{N_2=2^{u+1}}^{[N_1/2]} \dots \sum_{N_u=8}^{[N_{u-1}/2]} N_u \cdot \sum_{N_{u+1}=4}^{[N_u/2]} \frac{1}{N_{u+1}} \cdot \sum_{N_{u+2}=2}^{[N_{u+1}/2]} 2^{N_{u+2}-2} \\
 & \cdot F_{u+1} \cdot F_u \cdot \dots \cdot F_2 \cdot F_1 + \dots + \sum_{N_2=2^{m-2}}^{[N_1/2]} \dots \sum_{N_u=2^{m-u}}^{[N_{u-1}/2]} N_u \\
 & \cdot \sum_{N_{u+1}=2^{m-u-1}}^{[N_u/2]} \frac{1}{N_{u+1}} \cdot \sum_{N_{u+2}=2^{m-u-2}}^{[N_{u+1}/2]} \dots \sum_{N_{m-1}=2}^{[N_{m-2}/2]} 2^{N_{m-1}-2} \\
 & \left. \cdot F_{m-2} \cdot F_{m-3} \cdot \dots \cdot F_2 \cdot F_1 \right) / \left( Z_n - \sum_{k=2}^u (Z_n)_k \right) \\
 & \text{(for } u=1, 2, \dots, m-1) \dots \dots \dots (22)
 \end{aligned}$$

となる。



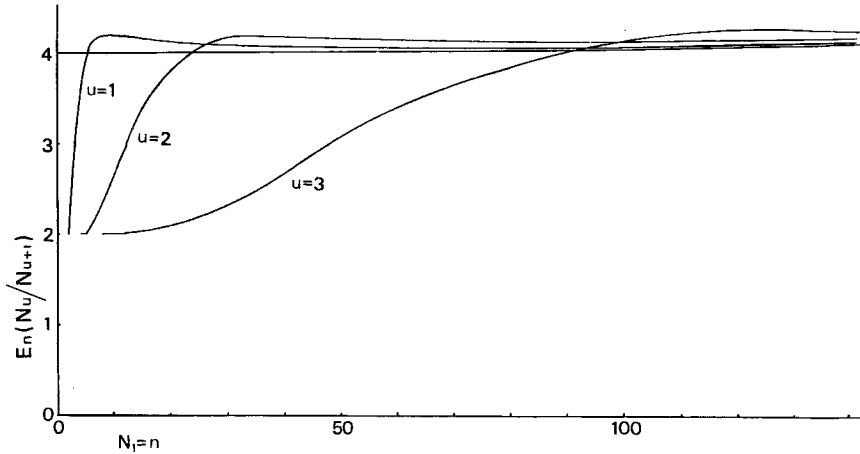


Fig. 6 Variation of expected value of bifurcation ratio for  $N_1=n$ , numbers of first order streams.

この式によって、位数1の河道数  $N_1=n$  を変数として、位数  $u=1, 2, 3$  に対する分岐比、すなわち  $N_1/N_2$ ,  $N_2/N_3$ ,  $N_3/N_4$  の期待値を計算し、グラフ化したものが Fig. 6 である。これから観察されることは、 $u=1$  の場合、すなわち  $N_1/N_2$  の期待値は  $N_1=8$  で最大値約 4.2 に達し、その後はきわめて緩慢に 4 に漸近していくこと、 $u=2$  の場合、すなわち  $N_2/N_3$  の期待値は、 $N_1=32$  付近でやはり最大値約 4.2 に達し、その後は  $u=1$  の場合に比してより緩慢に 4 に漸近していくこと、 $u=3$  の場合も変化の傾向は同様であるが、さらに緩慢であることである。また、分岐比の期待値の最小値は、当然のことながら、 $u$  にかかわらず 2 であるが、そのときの  $N_1$  の値は、 $u=1$  に対して  $N_1=2$ ,  $u=2$  に対して  $N_1=4, 5$ ,  $u=3$  に対しては  $N_1=8, 9, 10, 11$  となる。一般に  $u=v$  に対しては、 $N_1=2^v, 2^v+1, \dots, 2^v+2^{v-1}-1$  となることは (12) 式の構造を考慮すれば明らかである。

以上のように、複雑な (22) 式の数値計算の結果、 $N_1$  が増加すると、位数  $u$  にかかわらず分岐比の期待値は 4 に近づく傾向が認められたわけであるが、 $N_1 \rightarrow \infty$  のとき、はたしてその極限值が 4 になるかどうかは保障されていない。すなわち、最大値約 4.2 から単調減少することは、Fig. 6 と (22) 式の規則正しい構造からみても確かであるが、4 以下にならないことが保障されていない。そこでつぎに極限值が 4 になることを証明しておこう。

$N_1=n$  に対してトポロジカルに異なる河道配列型のすべてをつくす標本空間  $U_n$  (標本点の総数  $Z_n$  個) を考えよう。この標本空間  $U_n$  に含まれる位数  $u$  の河道の総数を  $S_n^{(u)}$  とすると、 $U_n$  に含まれる位数 1 の河道の総数  $S_n^{(1)}$  は、 $Z_n$  個の標本点すべてが、 $N_1=n$  個をもっているから、(7) 式より、

$$S_n^{(1)} = n \cdot Z_n = \binom{2n-2}{n-1} \dots\dots\dots (23)$$

となる。

ところで、 $N_1=n$  から  $N_1=n+1$  になることによって、 $U_n$  上のすべての位数 1 の河道のみが、 $U_{n+1}$  上において位数 2 の河道をつくることに関与するから、つぎの関係が成り立つ。

$$S_n^{(1)} = S_{n+1}^{(2)} \dots\dots\dots (24)$$

したがって、 $U_n$  上の位数 2 の河道の総数  $S_n^{(2)}$  は、上式と (23) 式より、

$$S_n^{(2)} = S_{n-1}^{(1)} = (n-1) \cdot Z_{n-1} = \binom{2n-4}{n-2} \dots\dots\dots (25)$$

となる。

以上に求めた  $U_n$  上の位数 1 の河道の総数  $S_n^{(1)}$  と、位数 2 の河道の総数  $S_n^{(2)}$  の比を  $S_n(N_1/N_2)$  とすると、

$$S_n(N_1/N_2) = S_n^{(1)}/S_n^{(2)} = \binom{2n-2}{n-1} / \binom{2n-4}{n-2} = (2n-2)(2n-3)/(n-1)^2 \dots\dots\dots(26)$$

となる。

この  $S_n(N_1/N_2)$  は分岐比  $N_1/N_2$  の期待値  $E_n(N_1/N_2)$  より決して大きくならないことが (19) 式の構造を考察することによって明らかである。すなわち、

$$S_n(N_1/N_2) \leq E_n(N_1/N_2) \quad (\text{等号は } n=2, 3 \text{ のとき}) \dots\dots\dots(27)$$

ところで、この式の左辺の  $N_1=n \rightarrow \infty$  における極限值は (26) 式より容易に求められ、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(N_1/N_2) = 4 \dots\dots\dots(28)$$

となる。

すなわち、ここに  $E_n(N_1/N_2)$  が  $N_1=n \rightarrow \infty$  において、4 以下にならないことが証明されたわけであり、結局、 $N_1/N_2$  の期待値の極限值が 4 に収束することが証明されたわけである。しかし、 $S_n^{(u)}(u \geq 3)$  の一般式は  $S_n^{(1)}$ 、 $S_n^{(2)}$  のように簡単なものにならず、 $S_n(N_u/N_{u+1}) (u \geq 2)$  の極限値を理論的に求めることはできないが、Fig. 6 の様相からも明らかなように、位数 1 と位数 2 の間の関係は、そのまま位数  $u$  と位数  $u+1$  の関係にあてはめることができ、ただその  $N_1=n$  の増加による変化状況が、 $u$  の増加によって緩慢になるにすぎないといえる。このことは、河道発性のランダム性を考慮すれば当然であろう。

以上の結果を式にあらわせば、位数  $u$  の河道数  $N_u$  が十分に大きい場合

$$N_u = \left(\frac{1}{4}\right)^{u-1} \cdot N_1 \dots\dots\dots(29)$$

となり、この関係を 1/4 則と名づけることにする。

**2.5. 合流点数分布の期待値 (1/2 則)**

複雑な河道網の分布状況の把握の仕方の一つとして、一流域において  $N_u$  個ある位数  $u$  の河道のうち、位数  $u-1$  の河道がつくる合流点を何個もっているものがどのような割合で分布しているかを知る必要がある。そこで、 $N(iC_u)$  を位数  $u-1$  の河道がつくる合流点を  $i$  個もつ位数  $u$  の河道  $iC_u$  の数としよう。これはいいかえれば、位数  $u-1$  の河道が  $i+1$  個流入している位数  $u$  の河道の数である。すると、一流域についてつぎの関係がつねに成立することは明らかである。

$$\sum_{i=1}^{i_m} N(iC_u)/N_u = 1 \dots\dots\dots(30)$$

ここに、 $i_m$  は合流点数の最大値で、理論的には  $N_{u-1}-1$  まで可能ある。

この  $N(iC_u)/N_u$  の  $N_1=n \rightarrow \infty$  における期待値を各  $i$  に対して求めてみよう。前項でも述べたように位数 1 と位数 2 の関係、すなわちこの場合は  $u=2$  の場合だけを調べれば十分である。また、 $N_1 \rightarrow \infty$  における期待値を求める場合、標本空間  $U_n$  の上で考えれば十分であることも前項の結果よりわかる。

そこで、 $U_n$  に含まれる合流点  $i$  個をもつ位数 2 の河道の総数を  $(a_i)_n^{(2)}$  とすると、 $N_1=n \rightarrow \infty$  における  $N(iC_2)/N_2$  の期待値は、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(N(iC_2)/N_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_i)_n^{(2)}/S_n^{(2)} \dots\dots\dots(31)$$

として求めることができる。 $U_n$  に含まれる位数 2 の河道の総数  $S_n^{(2)}$  の一般式は前項で求めたように (25) 式で与えられるが、 $(a_i)_n^{(2)}$  の一般式は簡単には求められない。たとえば、Fig. 4 をみればわかるように、 $N_1=5$  の場合、 $U_5$  に含まれる位数 2 の河道の総数は  $S_5^{(2)}=20$  あるが、 $(a_1)_5^{(2)}=8$ 、 $(a_2)_5^{(2)}=4$ 、 $(a_3)_5^{(2)}=0$ 、 $(a_4)_5^{(2)}=8$  となる (このような値を  $N_1=2, 3, \dots, 10$  に対して例示したものが Table 1 である)。しかし、つぎのようにして極限値は求めることができる。

標本空間  $U_n$  の上で合流点  $i$  個をもつ位数 2 の河道の総数  $(a_i)_n^{(2)}$  は  $N_1=n$  から  $N_1=n+1$  になることによって  $U_{n+1}$  上ではすべて合流点  $i+1$  個をもつ位数 2 の河道になり、かつ合流の仕方に左右の区別が

Table 1 Examples of  $(a_i)_n^{(2)}$  and  $S_n^{(2)}$

n	$(a_i)_n^{(2)}$									$S_n^{(2)}$
	i=1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2	1									1
3	0	2								2
4	2	0	4							6
5	8	4	0	8						20
6	30	16	8	0	16					70
7	112	60	32	16	0	32				252
8	420	224	120	64	32	0	64			924
9	1,584	840	448	240	128	64	0	128		3,432
10	6,006	3,168	1,680	896	480	256	128	0	256	12,870

つくから、結局つぎの関係が成り立つ。

$$(a_{i+1})_{n+1}^{(2)} = 2 \cdot (a_i)_n^{(2)} \dots\dots\dots(32)$$

したがって、

$$(a_i)_n^{(2)} = 2^{i-1} \cdot (a_1)_{n-i+1}^{(2)} \dots\dots\dots(33)$$

となる。

ところで、明らかに

$$\sum_{i=1}^{n-1} (a_i)_n^{(2)} = S_n^{(2)} \dots\dots\dots(34)$$

であるから、

$$\sum_{i=1}^{n-1} (a_i)_n^{(2)} / S_n^{(2)} = 1 \dots\dots\dots(35)$$

となり、左辺の級数の各項は負ではないから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_i)_n^{(2)} / S_n^{(2)} = \text{const.} \equiv \alpha_i \dots\dots\dots(36)$$

に収束しなければならぬ。この式に (33) 式を代入して  $i=2$  とすれば、

$$\alpha_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} 2(a_1)_{n-1}^{(2)} / S_n^{(2)} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} ((a_1)_{n-1}^{(2)} / S_{n-1}^{(2)}) \cdot (S_{n-1}^{(2)} / S_n^{(2)}) \dots\dots\dots(37)$$

となる。ところが、(36) 式より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1)_{n-1}^{(2)} / S_{n-1}^{(2)} = \alpha_1 \dots\dots\dots(38)$$

であり、また、(25) 式を代入すれば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1}^{(2)} / S_n^{(2)} = \frac{1}{4} \dots\dots\dots(39)$$

となるから、結局、 $\alpha_2 = (1/2)\alpha_1$  となる。

同様にして、一般に

$$\alpha_i = \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \cdot \alpha_1 \dots\dots\dots(40)$$

を得る。ところで、 $\alpha_i$  は (35) 式より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \cdot \alpha_1 = 1 \dots\dots\dots(41)$$

を満足しなければならない。そして  $\alpha_1$  は const. であり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = 2 \quad \dots\dots\dots(42)$$

であるから、 $\alpha_1=1/2$  となり、結局、(40) および (36) 式から、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_i)_n^{(2)} / S_n^{(2)} = \left(\frac{1}{2}\right)^i \quad \dots\dots\dots(43)$$

となる。

すなわち、位数2の河道のもつ合流点数の分布は  $N_1=n$  が十分大きい場合

$$N(iC_2) / N_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^i \quad \dots\dots\dots(44)$$

となることが期待される。先にも述べたように、河道発性のランダム性を考慮すればこのことは  $u=3, 4, \dots$  に対しても一般的に成り立つことになる。

すなわち、位数  $u$  の河道数  $N_u$  が十分大きい場合、

$$N(iC_u) / N_u = \left(\frac{1}{2}\right)^i \quad \dots\dots\dots(45)$$

となることが期待される。この関係を1/2則と名づけることにする。

**2.6. 河道配分数分布の期待値 (3/4 則)**

一般に、位数  $u$  の河道はかならずしも位数  $u+1$  の河道だけに流入しないで、位数  $u+2$  以上の河道にも流入する。そこで、位数  $u$  の河道が位数  $u+1$  以上の河道にどのような割合で配分されるかという河道配分数の分布を知ることも河道網分布状況の把握のために必要となる。

そこで位数  $u$  の河道の数  $N_u$  のうち、位数  $v$  ( $v=u+1, u+2, \dots, k$ ;  $k$ : 最大位数) の河道に流入するものを  $vN_u$  とすると、つぎの関係が一流域についてつねに成り立つことは明らかである。

$$\sum_{v=u+1}^k vN_u / N_u = 1 \quad \dots\dots\dots(46)$$

この  $vN_u / N_u$  の  $N_1=n \rightarrow \infty$  における期待値を求めよう。前項と同様、 $U_n$  の上で考えれば十分であり、また、この場合は  $u=1, v=2$  の場合、すなわち位数1の河道が位数2の河道にどのような割合で配分されるかを考えれば十分である。

そこで、 $U_n$  上で位数2の河道に流入している位数1の河道の総数を  ${}_2S_n^{(1)}$  とすると、 $N_1=n \rightarrow \infty$  における  ${}_2N_1 / N_1$  の期待値は、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n({}_2N_1 / N_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} {}_2S_n^{(1)} / S_n^{(1)} \quad \dots\dots\dots(47)$$

として求められる。ここに、 $S_n^{(1)}$  は  $U_n$  に含まれる位数1の河道の総数で、その一般式は(23)式によって与えられている。 ${}_2S_n^{(1)}$  の一般式は求められないが、(47)式の値はつぎのようにして求めることができる。

合流点  $i$  個をもつ位数2の河道には、位数1の河道が  $i+1$  個流入しているから、前項の記号を用いれば、 ${}_2S_n^{(1)}$  は、

$${}_2S_n^{(1)} = \sum_{i=1}^{n-1} (i+1)(a_i)_n^{(2)} = S_n^{(2)} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (i+1) \cdot \left((a_i)_n^{(2)} / S_n^{(2)}\right) \quad \dots\dots\dots(48)$$

となる。

したがって、 $N_1=n \rightarrow \infty$  においては前項の1/2則が成立するため  $(a_i)_n^{(2)} / S_n^{(2)} = (1/2)^i$  であることを考慮すると、(47)式は、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}_2S_n^{(1)} / S_n^{(1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n^{(2)} / S_n^{(1)}) \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (i+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i \right\} \quad \dots\dots\dots(49)$$

となる。ところで、(23)、(25)式より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(2)} / S_n^{(1)} = \frac{1}{4} \quad \dots\dots\dots(50)$$

であり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} (i+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i = 3 \quad \dots\dots\dots(51)$$

であるから、結局、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}_2S_n^{(1)} / S_n^{(1)} = \frac{3}{4} \quad \dots\dots\dots(52)$$

となる。すなわち、 $N_1 = n$  が十分大きい場合は、

$${}_2N_1 / N_1 = \frac{3}{4} \quad \dots\dots\dots(53)$$

となることが期待される。

${}_v N_1 / N_1$  ( $v \geq 3$ ) については、 $1/4$  則が成立すること、および位数 1 の河道は全くランダムに発生することを考慮すると、一般に、次式

$${}_v N_1 = \frac{1}{4} {}_{v-1} N_1 \quad (\text{for } v \geq 3) \quad \dots\dots\dots(54)$$

が成り立つことになる。したがって、

$${}_v N_1 / N_1 = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{v-2} \quad (v=2, 3, \dots, k) \quad \dots\dots\dots(55)$$

となることが期待され、さらに、一般に位数  $u$  の河道数  $N_u$  が十分に大きければ、

$${}_v N_u / N_u = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{v-u-1} \quad (v=u+1, u+2, \dots, k) \quad \dots\dots\dots(56)$$

が成り立つ。この関係を  $3/4$  則と名づけることにする。

### 3. 由良川水系に対する理論の実証的検討

#### 3.1. 由良川水系福知山上流部の概況

由良川福知山上流部は流域面積約 1300 km<sup>2</sup>、流路延長約 100 km の細長い形状をした中河川で、河道の配列状態はいわゆる樹枝状をなしている。主な支川は上流から順に、棚野川、上和知川、高屋川、上林川、八田川、犀川、土師川であり、土師川にはさらに竹田川が注いでいる (Fig. 7)。地質状態は大部分が秩父古生層に属し、綾部市上流本川および高屋川沿いに新洪積層および沖積層が介在する。また、流域北部の東

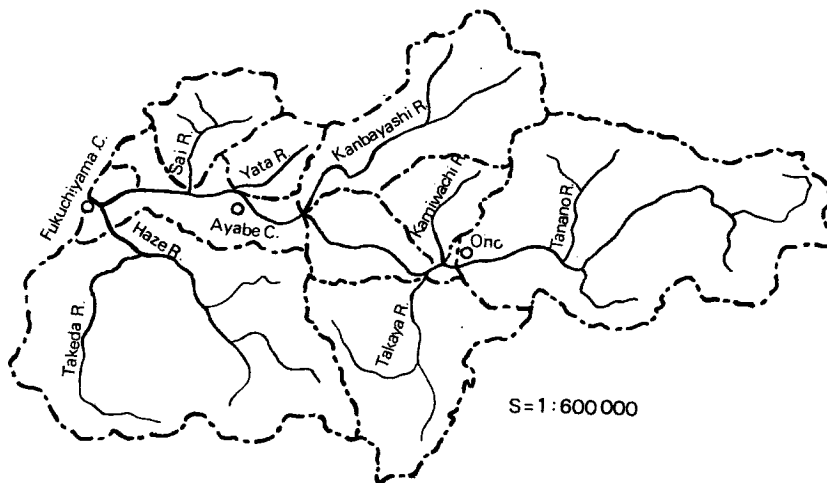


Fig. 7 Map of the upper basin of the Yura river.

西にかけて三疊紀の斑瀾岩が秩父古生層をはさんで二条の帯状に連らなり、その間に中生層石灰岩層が点在している。綾部市より福知山にいたる間は主として沖積層であり、土師川の本川への合流点付近には旧洪積層の台地がみられる。

### 3.2. 地形解析に必要な諸元

由良川福知山上流域を本川大野上流部、支川上和知川、高屋川、上林川、八田川、犀川、土師川の各流域

Table 2 Observed topographical characteristics of subbasins in the upper Yura basin.

Name of basin	Stream orders, $u$	Number of streams of order $u$ , $N_u$	Average drainage area, $\bar{A}_u$ (km <sup>2</sup> )	Average stream length, $\bar{L}_u$ (km)	Average stream slope, $\bar{S}_u$ ( $\times 10^{-3}$ )
Ono	1	248	0.68	0.64	187
	2	70	2.68	1.28	92.7
	3	17	13.11	3.79	59.6
	4	3	94.52	15.10	20.8
	5	1	319.87	11.60	2.59
Kamiwachi	1	36	0.82	0.66	198
	2	9	3.31	2.01	75.0
	3	2	20.60	4.30	23.2
	4	1	55.34	4.60	8.70
Takaya	1	55	1.37	0.99	81.4
	2	17	5.31	2.26	32.4
	3	4	30.24	6.08	8.40
	4	1	149.74	9.90	3.03
Kanbayashi	1	48	1.26	0.80	126
	2	15	5.41	2.22	15.8
	3	4	18.71	4.07	18.3
	4	1	156.76	27.00	2.27
Yata	1	6	5.20	2.13	10.7
	2	2	20.44	2.70	7.25
	3	1	43.10	2.00	5.00
Sai	1	10	4.05	2.34	17.0
	2	2	8.76	1.85	13.3
	3	1	59.80	10.70	1.87
Haze	1	68	3.27	1.54	45.3
	2	17	11.43	2.78	17.5
	3	4	70.58	9.65	6.40
	4	1	368.96	2.60	3.73
Fukuchiyama	1	524	1.34	0.88	131
	2	146	4.77	1.80	60.5
	3	35	25.07	4.85	34.3
	4	7	144.91	16.20	11.4
	5	1	1,247.98	54.10	2.16

Table 3 Verification of the four topographical laws obtained empirically in the field of quantitative geomorphology.

Name of basin	Stream orders, $u$	Bifurcation ratios, $R_b = N_u/N_{u+1}$	Area ratios, $R_a = \bar{A}_{u+1}/\bar{A}_u$	Length ratios, $R_L = \bar{L}_{u+1}/\bar{L}_u$	Slope ratios, $R_s = \bar{S}_u/\bar{S}_{u+1}$
Ono	1	3.54	3.94	2.00	2.02
	2	4.12	4.89	2.96	2.34
	3	5.67	7.21	3.98	1.90
	4	3.00	3.38	0.77	8.03
	geo. mean	3.97	4.66	2.06	2.91
Kamawachi	1	4.00	4.04	3.05	2.64
	2	4.50	6.22	2.14	3.23
	3	2.00	2.69	1.07	2.67
	geo. mean	3.30	4.07	1.91	2.84
Takaya	1	3.30	3.91	2.28	2.51
	2	4.25	5.37	2.69	3.85
	3	4.00	4.95	1.63	2.78
	geo. mean	3.81	4.70	2.15	2.99
Kanbayashi	1	3.20	4.29	2.78	2.43
	2	3.75	3.46	1.83	2.83
	3	4.00	8.38	6.64	8.06
	geo. mean	3.63	4.99	3.23	3.81
Yata	1	3.50	3.93	1.27	1.48
	2	2.00	2.11	0.74	1.45
	geo. mean	2.66	2.88	0.97	1.47
Sai	1	5.00	2.16	0.79	1.28
	2	2.00	6.82	5.78	7.11
	geo. mean	3.16	3.83	2.14	3.02
Haze	1	4.00	3.50	1.81	2.59
	2	4.25	6.17	3.47	2.73
	3	4.00	5.30	2.76	1.64
	geo. mean	4.06	4.86	2.58	2.26
Fukuchiyama	1	3.58	3.56	2.05	2.17
	2	4.17	5.26	3.34	1.76
	3	5.00	5.78	4.06	3.01
	4	7.00	8.61	3.34	5.28
	geo. mean	4.78	5.52	3.10	2.79

Table 4 Observed numbers of  $u$ -th order streams having  $i$  confluent points.

Name of basin	Stream orders $u$	$N(iCu)$								
		Numbers of confluent points, $i$								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ono	2	32	22	11	5	0	0	0	0	0
	3	10	2	3	1	0	0	1	0	0
	4	1	0	1	0	0	0	0	0	1
	5	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Kamwachi	2	3	4	1	0	1	0	0	0	0
	3	0	1	0	1	0	0	0	0	0
	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Takaya	2	9	6	0	2	0	0	0	0	0
	3	2	1	0	0	1	0	0	0	0
	4	0	0	1	0	0	0	0	0	0
Kanbayashi	2	8	4	2	1	0	0	0	0	0
	3	2	2	0	0	1	0	0	0	0
	4	0	0	1	0	0	0	0	0	0
Yata	2	1	0	1	0	0	0	0	0	0
	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Sai	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0
	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Haze	2	7	8	0	1	1	0	0	0	0
	3	1	2	0	0	0	1	0	0	0
	4	0	0	1	0	0	0	0	0	0
Fukuchiyama	2	71	48	16	9	2	0	0	0	0
	3	18	9	3	2	2	0	1	0	0
	4	2	0	4	0	0	0	0	0	1
	5	0	0	0	0	0	0	1	0	0

に分割し、それぞれの流域について、位数  $u$  の河道の数  $N_u$ 、集水面積の平均値  $\bar{A}_u$ 、河道長の平均値  $\bar{L}_u$ 、河道こう配の平均値  $\bar{S}_u$  を示したものが Table 2 であり、これから分岐比  $R_b$ 、集水面積比  $R_a$ 、河道長比  $R_L$ 、河道こう配比  $R_S$  を求めて一覧表にしたものが Table 3 であり、従来の地形則が当流域でもほぼ成り立っていることを示している。また、河道網の分布状況に関しては、位数  $u-1$  の河道のつくる合流点を  $i$  個もつ位数  $u$  の河道の数  $N(iCu)$  は Table 4 に、位数  $v$  の河道に流入する位数  $u$  の河道の数  ${}_vN_u$  の値は Table 5 に示す。ただし、これらの値はすべて国土地理院発行の5万分の1の地形図より得られたものである。

ところで、地形解析においてつねに問題とされ、定説のない“河道”の定義、すなわち水系末端部のどこまでを河道として扱うかに関して、ここでは簡単に、地形図上に河道として記されているものだけを河道として扱うことにした。したがって、地形図の縮尺によって当然、位数1の河道として扱うものが異なってくるわけであり、この点に関して検討の余地がいくらかあろうが、統計的な観点に立てば、地形図の縮尺に依存しない厳密な定義に従って解析した結果と上記のような単純な定義に従って解析した結果には、地形則に



Table 5 Observed numbers of  $u$ -th order streams joining  $v$ -th order streams.

Name of basin	Stream orders	$\nu N_u$			
		Stream orders $v$			
	$u$	2	3	4	5
Ono	1	199	28	13	8
	2		51	13	6
	3			16	1
	4				3
Kamiwachi	1	28	7	1	
	2		8	1	
	3			2	
Takaya	1	46	8	1	
	2		13	4	
	3			4	
Kanbayashi	1	41	4	3	
	2		10	5	
	3			4	
Yata	1	6	0		
	2		2		
Sai	1	4	6		
	2		2		
Haze	1	49	14	5	
	2		14	3	
	3			4	
Fukuchiyama	1	407	71	23	23
	2		105	26	15
	3			30	5
	4				7

Table 6 Comparison with observed and theoretical values of the most probable  $N_1$  for given trunk number.

Trunk number	Theoretical values $(N_1)^i_{peak}$	Observed values			Numbers of samples
		$(N_1)^i_{ave}$	$(N_1)^i_{max}$	$(N_1)^i_{min}$	
$i=2$	2 or 3	2.79	6	2	146
3	10 or 11	10.54	28	4	35
4	42	61.0	153	17	7

関して本質的な差異を生じることはないと考えられる。

3.3. 最確最大位数についての検討

2.3 で得られた理論曲線 (Fig. 5) の妥当性を検討するには、位数1の河道数  $N_1$  が同一の多数の流域を取りだし、そのうち最大位数  $k=i$  ( $i=2,3,\dots,m$ ) のものがどのような割合を占めるかを調べるのが順当であるが、福知山上流部だけでは位数1の河道数  $N_1$  が等しい流域の数は非常に少ないので、つぎのように逆に考える。すなわち、最大位数  $k=i$  ( $i=2,3,\dots$ ) の流域は何個の位数1の河道からなっていることが最も期待されるかを考える。するとこの値は、Fig. 5 において、 $N_1=n$  に対して最大位数  $k$  が  $i$  ( $i=2,3,\dots,m$ ) となる確率  $Prn(k=i)$  の最大値を与える位数1の河道数  $(N_1)_{peak}^i$  にほぼ等しいはずである。そこで、福知山上流域内の  $i=2,3,4$  の小流域について、それぞれを構成している位数1の河道数  $N_1$  の最も期待される値として、それらの平均値  $(N_1)_{ave}^i$  と、そのばらつきの範囲を示すものとして最大値  $(N_1)_{max}^i$ 、最小値  $(N_1)_{min}^i$  の値を標本数とともに対応させて示したものが Table 6 である。標本数の比較的多い  $i=2$ ,

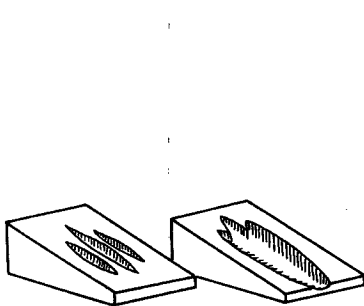


Fig. 8 Stream abstraction.

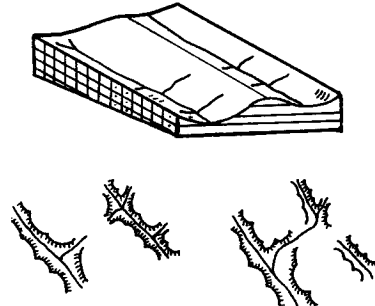


Fig. 9 River-capture.

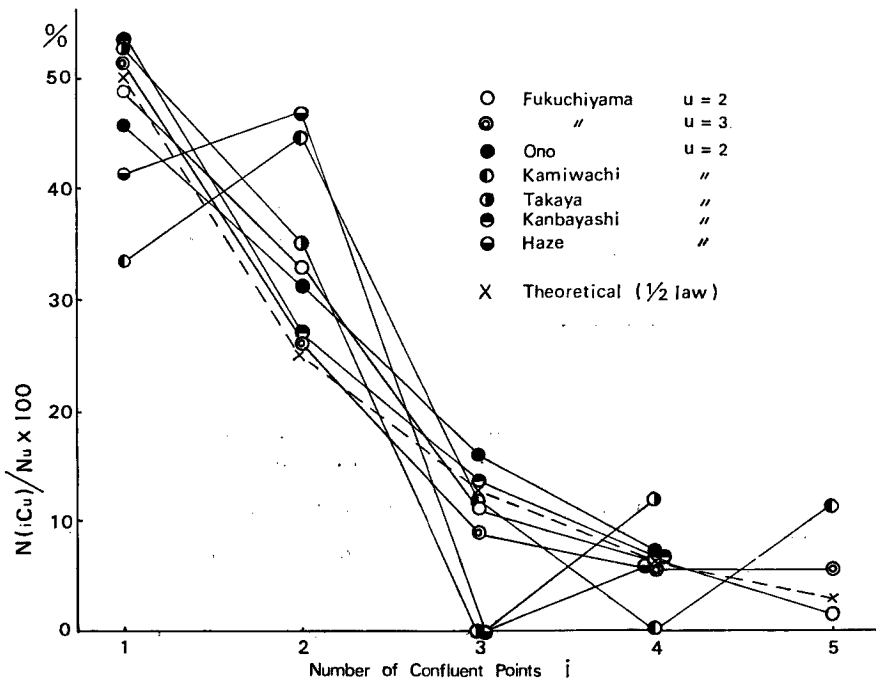


Fig. 10 Verification of 1/2 law through actual channel distributions.

$i=3$  の場合、理論値  $(N_i)_{peak}^t$  と実測値  $(N_i)_{ave}^t$  が見事な対応を示しており、この理論の妥当性を裏づけるものといえよう。

3.4. 1/4 則の適合性について

これは 2.4 でも述べたように計量地形学の分野で経験的に得られた河道数則の理論的裏づけとなるものとして得られたものであり、位数  $u$  にかかわらず分岐比  $R_b = N_u/N_{u+1}$  が 4 になることが期待されるというものである。この分岐比  $R_b$  の実測値は Table 3 に示すように、いずれも 4 前後の値をとっている。しかし、理論によると、 $N_1$  はいずれの流域も十分大きいので、 $N_1/N_2$  はさらに 4 に近づくはずであるが、やや小さめの値をとっている流域が多い。この現象をつぎのように解釈しよう。

一般に水系の発達は初期の段階ではつねに上流へ向かって行なわれ、位数 1 の河道は増加していく。そし

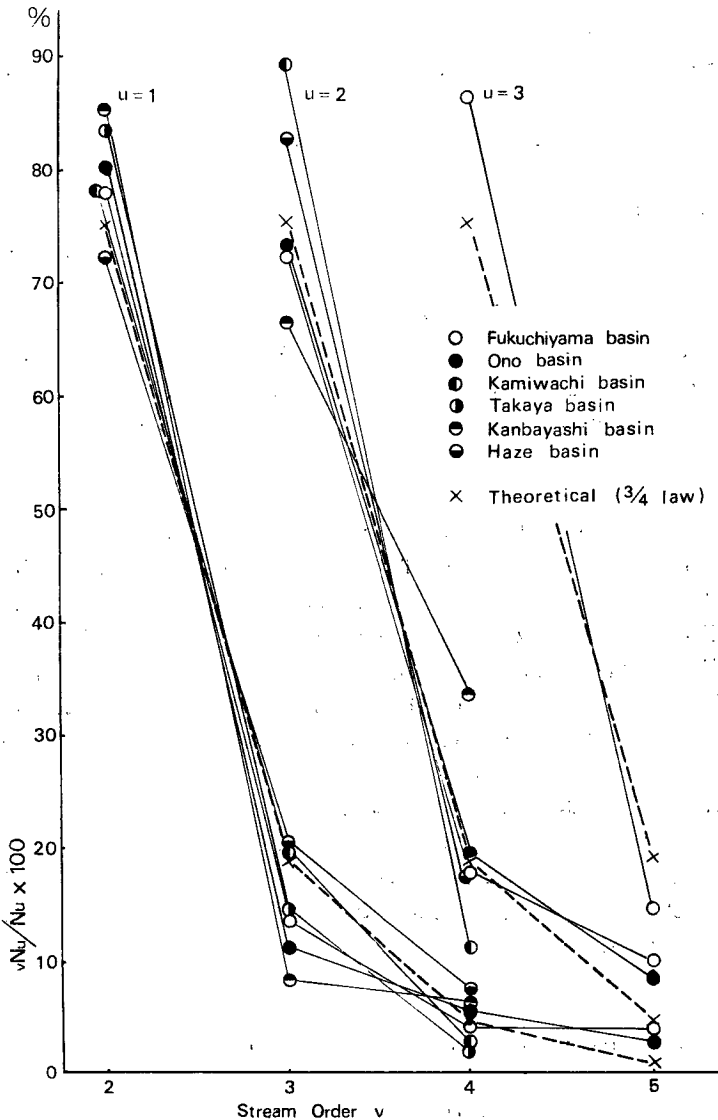


Fig. 11 Verification of 3/4 law through actual channel distributions.

て、ある程度まで水系が発達すると、つぎには河の併呑 (Fig. 8), 河の奪取 (Fig. 9) が起り、位数1の河道は減少する傾向がある<sup>9)</sup>。ところが位数1の河道の減少の割合に比べて位数2の河道の減少の割合はかなり少ないと思われる。このように考えれば、 $N_1/N_2$  が比較的小さい値をとるといふ現象の説明もつき、また、土師川流域のようによく合っているところは、位数2の河道の減少も十分に行なわれ、一種の平衡状態に達していると解釈することもできよう。なお、福知山上流部の  $N_u/N_5$  が7.0と大きく4よりはずれているのは、明らかに構造地形の影響である。

### 3.5. 1/2 則の適合性について

2.5で述べたように、1/2則というものは、位数 $u$ の河道数  $N_u$  が十分大きい場合、(45)式が成立することが期待されるというものである。すなわち、たとえば、 $N_u$  個ある位数 $u$ の河道のうち、位数 $u-1$ の河道がつくる合流点の数  $i=1$  のものが全体の1/2(50%),  $i=2$  のものがその1/2, すなわち全体の1/4(25%), ……となることが期待されるというものである。Table 2とTable 4とから、各流域の実際の  $N(iC_u)/N_u$  を計算し、これを百分率に換算して理論値((45)式)とともに図示したものがFig. 10である。 $N_u$  の大きい流域ではよく合っているが、やはり、 $N_u$  の小さいところではあまり適合性はよくない。なお、1/4則の比較的良好に合っている土師川、上和知川が、1/2則にあまりよく従っていないことが観察されるが、この原因の説明はいまのところうまくつけられない。

### 3.6. 3/4 則の適合性について

2.6で述べたように、3/4則というものは、位数 $u$ の河道数  $N_u$  が十分大きい場合、(56)式が成立することが期待されるというものである。すなわち、たとえば、一流域において  $N_u$  個ある位数 $u$ の河道のうち、位数  $v=u+1$  の河道に流入するものが全体の3/4(75%),  $v=u+2$  の河道に流入するものが残りの3/4すなわち全体の3/16(18.75%), ……となることが期待されるというものである。Table 2とTable 5から各流域の実際の  $vN_u/N_u$  を計算し、これを百分率に換算して理論値((56)式)とともに図示したものがFig. 11である。各流域についてほぼ適合していることがわかるであろう。

## 4. 結 語

本研究は、複雑な流域地形の状況の定量的な把握・表現を行なった従来の計量地形学の成果のうち、とくに河道数、河道長、集水面積、河道こう配に関する4つの地形則の重要性を説き、さらに、河道網の分布状況の把握に関して、出水現象解明の立場から“河道数則”だけでは不十分であるとして、河道網のトポロジーモデルを想定し、河道網の形成過程のランダム性を考慮することによって、複雑な河道網の分布状況に内在するさらに詳しい普遍的な法則性を確率論的に見出そうとしたものである。その結果、新しい地形則ともいべき二つの統計則(1/2則, 3/4則)を得るとともに、従来の河道数則の理論的裏づけとなるものとして1/4則と称するものを得た。これら理論的に得られた統計則の実証的検討を由良川水系福知山上流部に対して行ない、十分適合することを確かめた。

こうして新たに得た統計則は、従来の4つの地形則とともに、たとえば洪水流出のシステムシミュレーション等を行なう際の重要な指標となると考えられ、現在検討を進めている。

最後に、この研究に際し、種々御助言をいただいた京都大学工学部若佐義朗教授、ならびに計算あるいは図面の作製に御助力いただいた京都大学河川工学研究室の学生、斉藤雄三郎、山中敦、横田穰二の三君に厚く謝意を表する次第である。

## 参 考 文 献

- 1) Chow, V. T.: Handbook of Applied Hydrology, McGraw-Hill Book Company, 1964, pp. 4—40~4—73.
- 2) Horton, R. E.: Erosional Development of Streams and their Drainage Basins, Hydrophysical Approach to Quantitative Geomorphology, Bull. Geol. Soc. Am., Vol. 56, 1945, pp.

275~370.

- 3) 前出 1)
- 4) 前出 1)
- 5) 参考としてたとえば, 東中秀雄: 物理地学, 朝倉書店, 1960, pp.218~228.
- 6) 参考としてたとえば, Arnold, B. H.: Intuitive Concepts in Elementary Topology, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J., 1962, pp.1~6.
- 7) 参考としてたとえば, William Feller: An Introduction to Probability Theory and Its Applications, John Wiley & Sons, Inc., Vol.1, 1957, pp.26~64.
- 8) 前出 1)
- 9) 前出 5)