

砂質土の弾性波速度に関する研究

柴田 徹・土岐憲三・寺田邦雄

ELASTIC WAVE VELOCITIES IN SANDY SOIL

By Toru SHIBATA, Kenzo TOKI and Kunio TERADA

Synopsis

A model which represents the dependence of the elastic wave velocity on porosity is derived for a liquid-saturated porous solid. Laboratory test using the ultra-sonic pulse method is carried out to measure the elastic wave velocity in specimens of the three kinds of sand.

The elastic constants of specimens are proportional to approximately the 1/2 power of the confining pressure and they decrease for increasing porosity under the given confining pressure. The wave velocity of sand is expressed as a function of the maximum porosity, the density of particles, the bulk modulus of water and the elastic constants of sand for the minimum porosity.

1. 緒 言

地盤の震動特性はその種別によって異なり、それは地盤中における波動の伝播速度と密接な関係にあることが知られている。したがって、地震時の地盤の運動を解析的に取り扱う場合には地盤中の波動の伝播速度と地盤種別との関係が明らかにされており、その解析的表示が可能である必要がある。しかるに、地盤を構成する土は多様であり、また同一種類の土に対しても外的攪乱とその状態により複雑な応答を示し、これを統一的に解析表示することは不可能に近いが、地盤そのものや地盤中の構造物の振動を論ずるに当っては、なんらかの方法で土の物理定数を用いて波動の伝播速度を表示する必要に迫られる。そこで、最も簡単には地盤を弾性体あるいは粘弾性体として表示することが通常行なわれるが、このような場合にも地盤の種別や力学特性と弾性波速度との関係が与えられない限りは地盤の弾性定数そのものか、これと等価な弾性波速度を仮定しなければならなくなる。

本来、土は連続な媒質ではなく、粒状体の集合体であり、そこに液体や気体が介在していくつかの異なった相から構成される媒質である。土がこのような離散的な媒質であっても、それから構成される地盤の地震時の挙動を論じる場合には、伝播する波動の波長を長さの尺度として考える限りにおいては、土を連続的な媒質として取り扱うことが妥当になる。地震時における地盤の運動を考えるに際して、これを弾性体、粘弾性体あるいは弾塑性体で置き換えることが可能であるにしても、土が間げきを有すること、粒子間の接触点を通じて応力の伝達が行なわれることなど、土が離散的であることに起因する要素が、何等かの形で連続な媒質としての力学特性に影響を持っているはずである。

こうした諸要素をも考慮して媒質中の波動の伝播を論ずることは、完全弾性体におけるそれより複雑な様相を呈することは当然であるが、これを解析的に取り扱う理論の代表的なものとして粒状媒質理論と多孔性媒質理論が挙げられよう。前者は主として縦波の伝播速度の応力依存性を説明するものであり、後者は孔げきの存在による波動伝播速度の変化を主な内容としている。これらの理論はいずれも、岩石における波動の

伝播を対象にしており、粒状媒質理論^{1),2)}では体質変化を伴う縦波に関する検討が主であって、横波についての議論はあまり行なわれず、また流体相が存在しても Poisson 比が不変であるとか、あるいはせん断弾性係数が一定であるというような考え方が便宜的に用いられている。一方、M. A. Biot^{3),4)}に代表される多孔性媒質の理論では、一つの確定した状態における四つの弾性定数が測定可能な値として与えられたとき、孔げきを満たす水と周囲の実質部分との coupling の現象を取り扱うものである。したがって媒質の全体に占める孔げきの割合が変化すれば、それに応じた弾性定数が既知であるという条件下における議論であり、孔げき率の変化による媒質の弾性定数の変化をも含めた波動の伝播の現象を取り扱うものではない。こうした点は、F. Gassmann⁵⁾ や J. Geertsma ら⁶⁾による研究においても同様である。また、最上⁷⁾による粒状体の力学は確率論的見地から粒状体の応力と変形、内部摩擦角などの問題を微視的に検討しようとするものであり、地震時の波動伝播の問題のように媒質を mass として取り扱う場合には適していない。

しかるに、土のような媒質では孔げき率、あるいは間げき率が変われば、それに伴って媒質全体の力学特性や波動の伝播速度なども変化するものと考えられ、間げき率や有効応力と弾性波速度とは密接な関係にあることになる。したがって、地盤や構造物の地震時における挙動を解明する際には、間げき率や有効応力など地盤の力学特性を決定する諸量と弾性波速度との関係が必要となる。このような問題に関しては古くから実験的な研究がなされており、粘性土については石本・飯田⁸⁾は含水比と弾性定数との関係を多くの試料の波動の伝播速度から求め、弾性定数は含水比の増加とともに減少するという結果を示した。また、砂質土については B. O. Hardin と F. R. Richart⁹⁾が詳細な実験を行ない、横波速度は間げき比の増加に対して直線的に減少し、また間げきを満たす水の存在もまた横波速度をやや減少させる傾向にあると報告している。しかるに、これらはいずれも実験的な結果にとどまり、そのような現象を理論的に説明したり、その力学モデルを設定することは、まだ十分には行なわれていない。

ところで、土を構成する土粒子や水の力学特性がたとえ同一であっても、実際の土においてはその構成の状態は無数に存在しうるが、このような媒質の全構成要素の個々についての力学的特性とその状態に関与するすべての量が与えられれば、mass としての土の力学特性は確定的に決まるはずである。土粒子の大きさをも問題にしななければならないような微視的な観点に立って、このような議論を実際の土を対象として行なうことは不可能に近いが、mass としての状態を表わす有効応力や間げき率などで、土の mass としての力学特性を記述する可能性はあると考えられる。一方、実際の地盤においてその状態をもっとも簡便に表わすものとして N 値があるが、これは有効応力や間げき率などの、状態を表わす量を包括する量であり、ここに上述と同様な観点において、 N 値で地盤の力学特性を表現しようとする考えが生れる。

そこで、本論文では、まず実質部分と間げきとから構成されるような媒質を対象として、その変形に関してのいくつかの仮定の下に、弾性定数と間げきとの関係を表わすことのできる力学モデルの提示を行なった。次いで、超音波発生装置を用いて、砂試料におけるパルスの伝播速度に及ぼす側圧と間げきの大きさとの関係について検討を行ない、先に得た力学モデルによる結果と比較検討した。さらに近年、標準貫入試験の N 値と横波速度との対応を示すデータが集積されてきているので、 N 値から横波速度の概略値を推定することの可能性について若干の考察を行なった。

2. 弾性定数と間げき率

いま、土は土粒子を構成物質とする骨格とその間げきを占める流体とから構成されており、土の単位体積中に占める流体の割合、すなわち間げき率を n とする。したがって、土の体積 V_0 中の骨格の体積を V_s 、流体の体積を V_f とするとき、 n は

$$n = \frac{V_f}{V_0} = \frac{V_f}{V_s + V_f} \dots\dots\dots(1)$$

で与えられる。この場合、土は均質等方性を持つものとして、間げき率 n の値は土のいかなる部分においても同一であり、考える土の体積の大きさにかかわらず骨格と流体の部分は分離しえないものと仮定する。こ

のような仮定は、土の内部を伝播する波動の波長に比較して間げきの大きさは十分に小さいことから容認されよう。

次に、間げきは水で飽和されている場合を対象として、間げき率 n の土の微小直方体を考える。このとき、直方体の一つの面内において水の占める割合はその面積を n 倍したものである。いま、直交座標 $x_j (j=1, 2, 3)$ において、 x_j 方向への水の流れの変位を u_j^r と表わすと、その方向の流れの速度 v_j^r は

$$v_j^r = \frac{\partial u_j^r}{\partial t} \dots\dots\dots(2)$$

で与えられる。このとき、水の密度を ρ_f とすれば、質量保存則より次式のような連続の式が成立しなければならない。

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_f n v_j^r) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho_f n) = 0 \dots\dots\dots(3)$$

ここで取り扱うのは波動が伝播するに際して生じる水の運動であるから、 v_j^r は小さな値と考えてよく、間げき率 n や密度 ρ_f の divergent との積で表わされる項は省略することができよう。したがって、上式は

$$\rho_f n \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_j^r}{\partial x_j} + \rho_f \frac{\partial n}{\partial t} + n \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0 \dots\dots\dots(4)$$

と書き改めることができる。

一方、水の密度 ρ_f と作用する圧力 p との間には次式のような示性方程式が成立する。

$$\frac{d\rho_f}{\rho_f} = \frac{dp}{\kappa} \dots\dots\dots(5)$$

ただし、 κ は水の体積弾性係数である。上式の圧力 p を用いて、(4) 式を書き改めると次式が得られる。

$$n \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_j^r}{\partial x_j} + \frac{n}{\kappa} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial t} = 0 \dots\dots\dots(6)$$

上式は間げき率 n の時間的变化により、水圧 p が変化することを示している。しかるに、この間げき率の変化は骨格の体積変化に比例する量と考えてよいから、上式の第3項は骨格の体積変化を用いて表わしうる。すなわち、

$$n \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_j^r}{\partial x_j} + \frac{n}{\kappa} \frac{\partial p}{\partial t} + C \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j^s}{\partial x_j} = 0 \dots\dots\dots(7)$$

ここに、 C は定数であり、 u_j^s は骨格の x_j 方向への変位量である。ここで、上の(7)式を時間に関して積分し、時間だけを含む項を0とすれば、結局上式は次式のように書き改められる。

$$p = -\kappa \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j^r}{\partial x_j} - Q \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j^s}{\partial x_j} \dots\dots\dots(8)$$

ただし、 Q は定数である。この式は、水の体積変化と骨格の体積変化に比例して水圧が発生することを表わしている。そこで、これらの軸方向ひずみをそれぞれ、 e_j^r 、 e_j^s と表わし、圧力 p を応力 σ に書き改めると、結局次式が得られる。

$$\sigma = \kappa \sum_{j=1}^3 e_j^r + Q \sum_{j=1}^3 e_j^s \dots\dots\dots(9)$$

一方、骨格に作用する応力 σ_j^s は骨格部分の軸ひずみ e_j^s と弾性定数 C_{ij}^s との積のほかに、水の部分に発生する水圧の影響を受けるが、この比例定数を Q' とすれば次式が得られる。

$$\sigma_i^s = \sum_{j=1}^3 C_{ij}^s e_j^s + Q' \sum_{j=1}^3 e_j^r \dots\dots\dots(10)$$

κ 、 Q 、 C_{ij}^s 、 Q' などはいずれも定数であるが、この係数マトリックスはひずみに関して対称でなければならない。しかるに、 $C_{ij}^s = C_{ji}^s$ であるから、

$$\begin{vmatrix} C_{11}^s & C_{12}^s & C_{13}^s & Q' \\ C_{21}^s & C_{22}^s & C_{23}^s & Q' \\ C_{31}^s & C_{32}^s & C_{33}^s & Q' \\ Q & Q & Q & \kappa \end{vmatrix}$$

が対称であるためには

$$Q = Q' \quad \dots\dots\dots(11)$$

でなければならない。

次に、単位面積当りに作用する応力の分配に関して一つの仮定を設ける。いま、土のある断面において単位面積当りに作用している応力 σ_i^b が、骨格の単位面積当りに作用する応力 σ_i^s と水の部分の応力 σ とにより次式のように表わされるものとする。

$$\sigma_i^b = (1-n)\sigma_i^s + n\sigma \quad \dots\dots\dots(12)$$

この式は、骨格に発生している応力と水圧とが、それぞれが単位面積中に占める割合に比例的に、全体としての応力に貢献していることを意味している。この式に (9), (10) 式の関係を用いれば

$$\sigma_i^b = \sum_{j=1}^3 [(1-n)C_{ij}^s + nQ] e_j^s + [(1-n)Q + n\kappa] e_j^f \quad \dots\dots\dots(13)$$

が得られる。

ただし、上式には (11) 式の関係を用いてある。また、せん断応力に関しては、土の単位面積に作用するせん断応力 τ_i^b はすべて、骨格によって受け持たれていると考えれば、単位面積中に占める骨格の部分の割合はその (1-n) 倍であるから、

$$\tau_i^b = (1-n)\tau_i^s \quad \dots\dots\dots(14)$$

となる。ここに、 τ_i^s は骨格に作用しているせん断応力である。この τ_i^s は剛性率 μ と骨格のせん断ひずみ γ_i^s との積で与えられるから、(14) 式は次式のように書ける。

$$\tau_i^b = (1-n)\mu\gamma_i^s \quad \dots\dots\dots(15)$$

次に、(1) 式を書き改めると

$$\left. \begin{aligned} V_b &= V_s + V_f \\ V_f &= nV_b \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(16)$$

となり、これより容易に

$$\frac{dV_b}{V_b} = (1-n)\frac{dV_s}{V_s} + n\frac{dV_f}{V_f} \quad \dots\dots\dots(17)$$

が得られる。いま考えている土は等方性を持つものとしているから、上式の体積変化は軸ひずみ e_i^b , e_i^s , e_i^f を用いて表わすことができる。すなわち、

$$e_i^b = (1-n)e_i^s + ne_i^f \quad \dots\dots\dots(18)$$

この式は変形に関して軸ひずみ量の満足しなければならない条件式である。弾性波動が土中を伝播する場合には骨格と水とが一樣な応力を受けて変形すると考えられるが、そのときの応力の分配は (13) 式で表わされた。そこでいま、変形に関しては骨格と水との軸ひずみが等しいと仮定すると

$$e_i^s = e_i^f \quad \dots\dots\dots(19)$$

である。この場合には変形に関する条件式 (18) 式から、土の軸ひずみは当然骨格と水の軸ひずみに等しくなる。すなわち、

$$e_i^b = e_i^s = e_i^f \quad \dots\dots\dots(20)$$

である。そこで、この関係を (13) 式に用いると

$$\sigma_i^b = \sum_{j=1}^3 [(1-n)C_{ij}^s + n\kappa + Q] e_j^b \quad \dots\dots\dots(21)$$

が得られる。ここで、土の弾性定数を C_{ij}^b と書き表わせば、上式から

$$C_{ij}^b = (1-n)C_{ij}^s + n\kappa + Q \quad \dots\dots\dots(22)$$

が得られる。また、せん断応力に関しては、(20)式と同様に骨格部分のせん断ひずみが土のせん断ひずみに等しいと考えれば、

$$\gamma_i^s = \gamma_i^b \quad \dots\dots\dots(23)$$

であり、土の剛性率を G と書き表わすと (15) 式から容易に

$$G = (1-n)\mu \quad \dots\dots\dots(24)$$

が得られる。

(22)式において、 Q は骨格と水との coupling を表わす定数であり、これは適当な条件を設定すれば、(9) および (10) 式から実験的に定められる量である。しかしながら、ここでは骨格と水とが体積変化を生じる場合にも間げき率 n は時間的に変化しないものと仮定すれば、(6) 式の第3項は0となり、これを(8)式と対比することから、

$$Q = 0 \quad \dots\dots\dots(25)$$

である。

一方、(22) 式の C_{ij}^s は λ, μ を Lamé の定数とすれば

$$C_{ij}^s = \lambda + 2\mu\delta_{ij} \quad \dots\dots\dots(26)$$

である。ここに δ_{ij} は Kronecker の delta 記号である。したがって、この式を (22) 式に用いれば、

$$C_{ij}^b = (1-n)\lambda + n\kappa + 2(1-n)\mu\delta_{ij} \quad \dots\dots\dots(27)$$

となる。ここで、 $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$ なる新しい量を用いて、

$$\bar{\lambda} \equiv (1-n)\lambda + n\kappa \quad \dots\dots\dots(28)$$

$$\bar{\mu} \equiv (1-n)\mu \quad \dots\dots\dots(29)$$

と定義すれば、(27) 式は (26) 式とまったく同一であり、かつ剛性率に関する (29) 式は (24) 式と同一である。したがって、この場合には Lamé の定数が $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$ で与えられる弾性体と同様に取り扱いことができることを示している。

一方、密度に関しては、土の密度を ρ_b 、骨格の密度を ρ_s 、水のそれを ρ_f と書けば、明らかに次式が成り立つ。

$$\rho_b = (1-n)\rho_s + n\rho_f \quad \dots\dots\dots(30)$$

したがって、この場合には運動方程式から、縦波、横波の伝播速度をそれぞれ v_l^b, v_t^b と表わせば、それらは次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} (v_l^b)^2 &= \frac{(1-n)(\lambda+2\mu)+n\kappa}{\rho_b} \\ (v_t^b)^2 &= \frac{(1-n)\mu}{\rho_b} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(31)$$

また、Poisson 比 ν^b についても、(28) および (29) 式から

$$\nu^b = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-n)\lambda + n\kappa}{(1-n)(\lambda + \mu) + n\kappa} \quad \dots\dots\dots(32)$$

となる。上の3式および(40)式は、間げき率 n が0の場合には土の弾性波速度は骨格を形成する媒質のそれに等しく、間げき率が1の場合には横波の速度は0であり、縦波の速度は水のそれに一致することが明らかである。また、Poisson比は間げき率が1の場合には0.5であり、間げき率の減少とともに骨格の Poisson 比に近づくことがわかる。 $\rho_f/\rho_s, v_l^f/v_l^s$ のいくつかの値について、 $v_l^b/v_l^s, v_t^b/v_t^s$ と間げき率 n との関係を図示したのが、Fig. 1 である。

以上においては、間げき率 n が0の場合には土はすべて骨格を形成する媒質だけとなり、間げきは存在しなくなる。しかるに、実際の土ではある拘束圧のもとでの最小の間げき率は0とはなり得ない。したがって、弾性波速度に及ぼす間げきの影響を表わすには、この最小の間げき率 n_{min} の状態に対する弾性定数を骨格の弾性定数と考えることができる。一方、間げき率 n が1の場合にはすべてが水になるが、実際にはもっと小さな間げき率において、土粒子間の接触圧がなくなる状態や、横波が伝播し得なくなる状態に達する

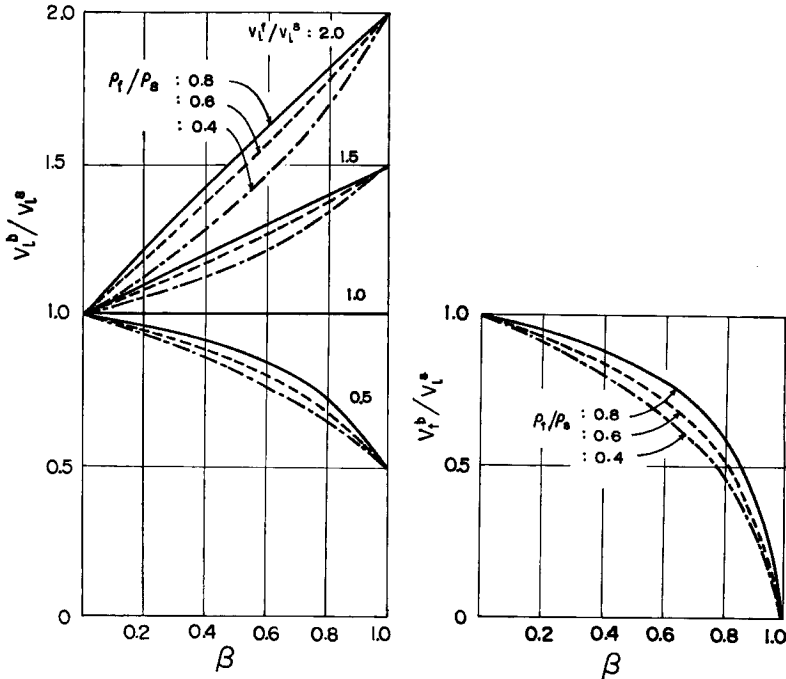


Fig. 1 Relationship between wave velocity and porosity.

ことが考えられ、この状態では密度が水より大きな流体と同等であるとみなすことができよう。そこで、この状態における間げき率を最大間げき率 n_{max} とすれば、横波速度は 0 であり、体積弾性率は水のそれに等しいとする近似が許されよう。このような最大間げき率 n_{max} と最小間げき率 n_{min} とを用いれば、有効間げき比に相当する相対間げき率ともいふべき n_e なる量を考えることができる。

$$n_e = \frac{n - n_{min}}{n_{max} - n_{min}} \dots\dots\dots (33)$$

上式で定義される n_e は 0 と 1 の間で変化する量であり、これを (31) および (32) 式に用いればよい。すなわち

$$\left. \begin{aligned} (v_l^b)^2 &= \frac{(1-n_e)(\lambda+2\mu) + n_e\kappa}{(1-n)\rho_s + n\rho_f} \\ (v_t^b)^2 &= \frac{(1-n_e)\mu}{(1-n)\rho_s + n\rho_f} \\ v^b &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-n_e)\lambda + n_e\kappa}{(1-n_e)(\lambda + \mu) + n_e\kappa} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

となる。したがって、 n が n_{max} の場合には横波速度は 0 であり、縦波の速度は密度が ρ_b で体積弾性率が κ である流体のそれに等しく、 n_{min} に対しては密度が ρ_b で弾性定数が λ, μ の弾性体のそれらと同じである。

以上により、これまで述べたような仮定が許される場合には、最小間げき率とそのときの弾性定数、最大間げき率、水の体積弾性係数、土粒子と水の密度とが与えられれば、弾性波速度を間げき率の関数として表示することができた。

3. 実験装置と実験方法

岩石や土のような媒質の試料についての波動伝播速度の測定法には自由振動周期による方法、強制振動に

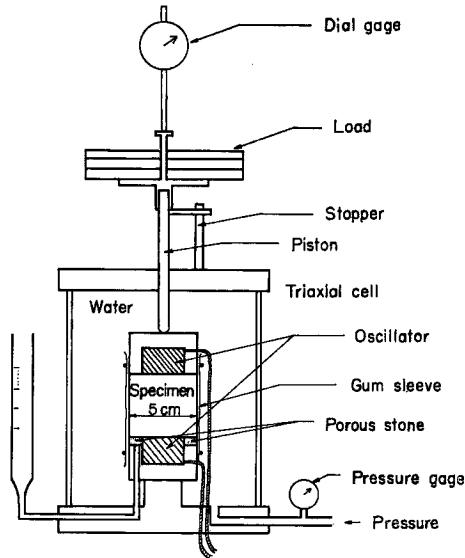


Fig. 2 Experimental device.

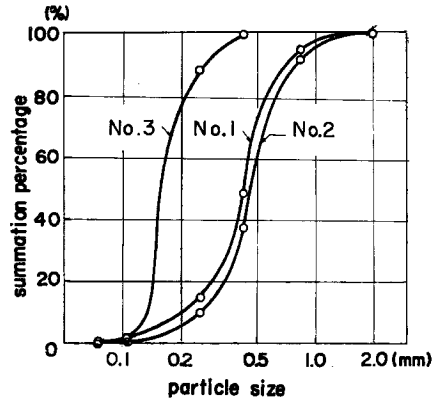


Fig. 3 Particle size distribution curve.

よる共振法など、試料の固有振動を利用した方法もあるが、本実験で用いたのは超音波パルス法であり、高周波パルスが試料中を通過するに要する時間から、その波動伝播速度を推定することができる。使用した超音波発生装置は横波の発振周波数が 63 kHz、縦波の発振周波数は 50 kHz であり、発振周波数と掃引周波数を同期させることにより、試料内を通過するに要する時間をオシロスコープ上の透過波の静止像から読み取ることができる。試料の両端には発振振動子と受振振動子を密着させ、これらを三軸圧縮試験装置に入れて水圧あるいは空気圧による側圧をかけ、弾性波速度に及ぼす側圧の影響をも検討した。これらの実験装置のうち、三軸セル部分の概略を Fig. 2 に示した。

実験に用いた試料はその粒径分布曲線が Fig. 3 であるような 3 種類の砂である。試料 No. 1 と No. 2 は同じ種類の砂で、土粒子比重はともに 2.65 である。試料 No. 2 は No. 1 の粒径の粗い部分を取り出し、底にサンドペーパーを敷いた箱の中に入れて、これを振動ふるい分け試験機で約 24 時間振動を与えたものであり、No. 1 と No. 2 の均等係数はそれぞれ 2.25 と 3.44 である。試料 No. 3 は豊浦の標準砂であり、比重は 2.65、均等係数は 1.28 である。

供試体は円柱であり、その両端は振動子に接し、側面はゴムスリーブで包まれている。この供試体の直径はいずれも 5 cm であり、高さは 2 cm と 5 cm のものを使用した。実験は横波の伝播速度については乾燥状態と飽和状態の場合、縦波については乾燥状態を対象として行なった。いずれの実験においても側圧を 0~7 kg/cm² の範囲内で変化させ、増圧および減圧の各段階で試料内をパルスが透過するに要する時間と試料の鉛直方向の変位量を測定した。また、飽和砂の場合には試料内は排水状態であり、したがって波動の伝播に伴って発生する水圧上昇の影響を無視すれば側圧は有効垂直応力に等しいと考えてよい。

この実験では間げき率あるいは間げき比をできるだけ広範囲に変化させる必要があり、そのために供試体を成形する際にゴムスリーブ内の砂の突固め回数を変えて、いろいろな間げき比を持つ試料を得た。しかし、実験時には側圧を作用させるため、乾燥状態ではもちろん、飽和状態でも排水を許していることから、側圧の大きさによって間げき比が変化する。したがって、間げき比は側圧が等方圧であることから、試料も等方ひずみの状態とみなして各側圧段階における変形量から算出した。また、密度はこの間げき比と砂粒子の密度とから、側圧の各段階に対して求めた。

4. 弾性波速度と有効側圧の関係

Fig. 4 は乾燥砂における横波の伝播速度 v_t と側圧 p_e との関係を示したものであり、3種類の砂試料についてそれぞれ二つの供試体に対する測定結果を示してある。これらの図中には側圧の増減に伴う間げき比の最大値と最小値をも併記してある。図の縦軸は側圧の各段階において測定した伝播速度と密度とから求まる弾性定数の次元で表わしてあり、横波の場合にはせん断弾性係数と等価である。また、横軸は側圧の測定値を表わしているが、これは上述のように有効垂直応力に等しいと考えてよい。また、飽和砂についての同様な内容の図を Fig. 5 に示した。

これらの図はいずれも実験結果が両対数紙上ではほぼ直線関係に近く、せん断弾性係数が有効側圧のべき乗に比例的であることを表わしている。試料 No.2 の乾燥砂の場合には、増圧時と減圧時とは同一側圧に対して異なった伝播速度を示しているが、二つの試料についての増圧、減圧時のこの配はほぼ等しい値となっている。そこで、これらの測定値を連ねた折線のこの配を求めると、乾燥状態での試料 No.1 では0.51,

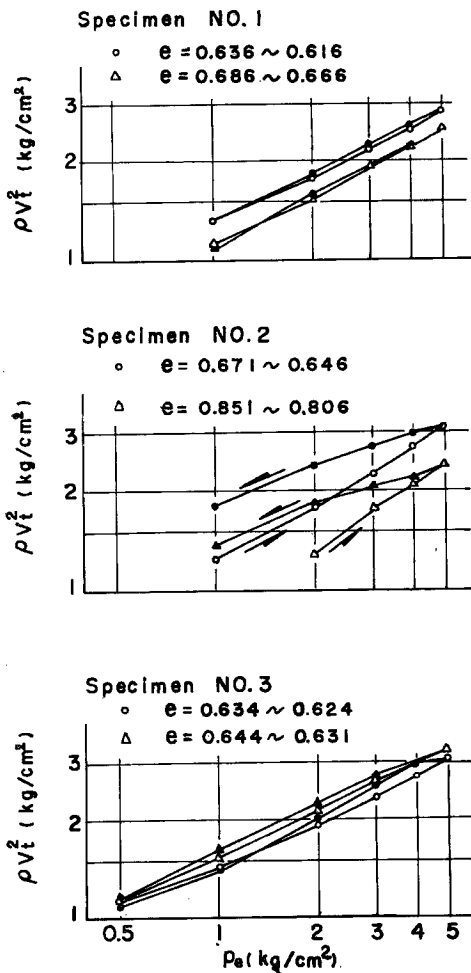


Fig. 4 Dependence of ρv_t^2 on p_e (dry sand).

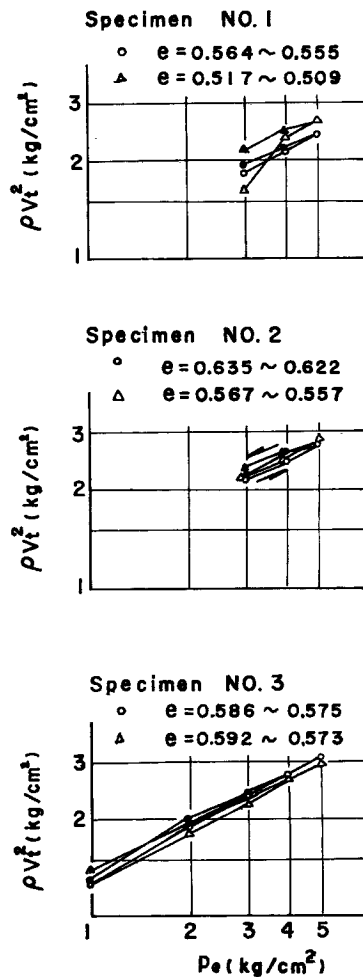


Fig. 5 Dependence of ρv_t^2 on p_e (saturated sand).

No. 2 では増圧, 減圧の平均が 0.48, 試料 No. 3 では 0.46 程度であり, 飽和砂に対しては同じく 0.49, 0.52, 0.54 であった。したがって, この実験で使用した砂試料については, 乾燥, 飽和のいずれの状態においても, 間げき率の変化が小さい限りは, せん断弾性係数 μ' は有効側圧 p_e の約 0.5 乗に比例的であるといえよう。すなわち,

$$\mu' = \rho v_t^2 \propto p_e^{1/2} \quad \dots\dots\dots (35)$$

である。

せん断弾性係数に及ぼす有効側圧の影響を, 波動の伝播速度の測定から検討する試みは, いろいろな方法で行なわれているが, 共振法を用いて詳細な実験を実施した Richart¹⁰⁾らの結果においても, せん断弾性係数は側圧のほぼ 0.5 乗に比例するとされている。したがって, 砂については間げき比が変わらない限りは, せん断弾性係数は有効側圧の平方根に比例し, これは砂粒子の粒径や形状にはほとんど無関係であり, また乾燥, 飽和の状態による影響も小さいものと考えてよからう。

一方, 乾燥砂についての縦波速度と側圧との関係を示したのが, Fig. 6 である。この場合も図中の縦軸は弾性定数の次元で表わしてある。No. 2 の試料における側圧 0.5 kg/cm² に対する測定値を除いては, いずれも ρv_l^2 と側圧との関係はべき乗に比例するであろうことを示している。そこで, 両対数紙上の測定値を連ねた折線を近似する直線のこう配を求めると, 試料 No. 1, 2, 3 の順に 0.48, 0.50, 0.48 程度の値が得られる。この場合も先の横波の場合と同様に,

$$\rho v_l^2 \propto p_e^{1/2} \quad \dots\dots\dots (36)$$

とすることが許されよう。しかるに, Lamé の定数 λ' は $\lambda' = \rho(v_l^2 - 2v_t^2)$ で与えられるから, (35) 式と (36) 式の関係から

$$\lambda' \propto p_e^{1/2} \quad \dots\dots\dots (37)$$

となり, 結局, 砂の弾性定数についてはさきにせん断弾性係数に対して述べた結論がそのままあてはまることになる。

5. 弾性波速度と間げきの関係

一定の側圧下における横波速度に及ぼす間げきの影響を示したのが Fig. 7 である。縦軸は伝播速度と密度で決定できるせん断弾性係数, 横軸は間げき比で示してある。まず, 側圧が 1 kg/cm² の場合には乾燥砂に対する測定値が多いが, これは飽和砂に対しては試料内部での減衰が大きいため, 透過波を確認できな

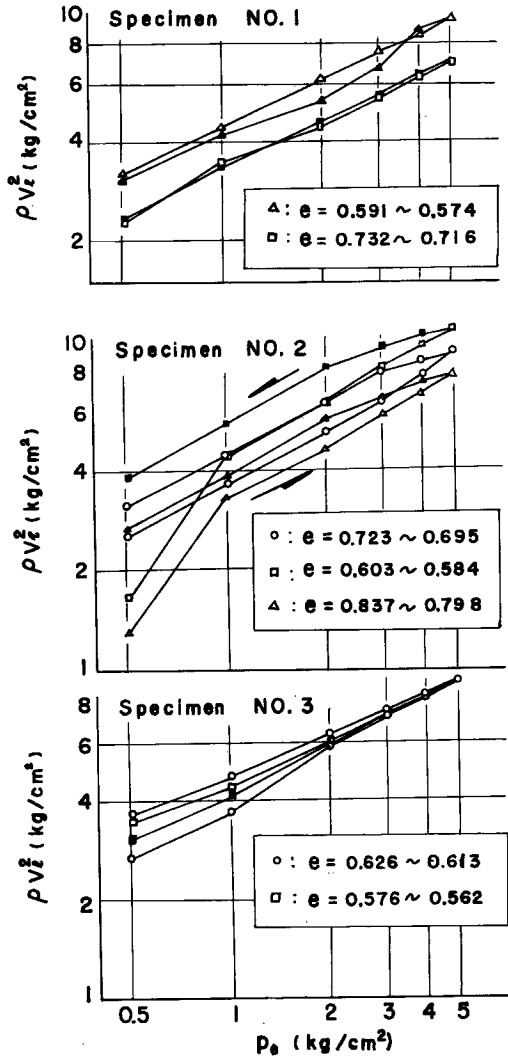


Fig. 6 Dependence of ρv_l^2 on p_e (dry sand).

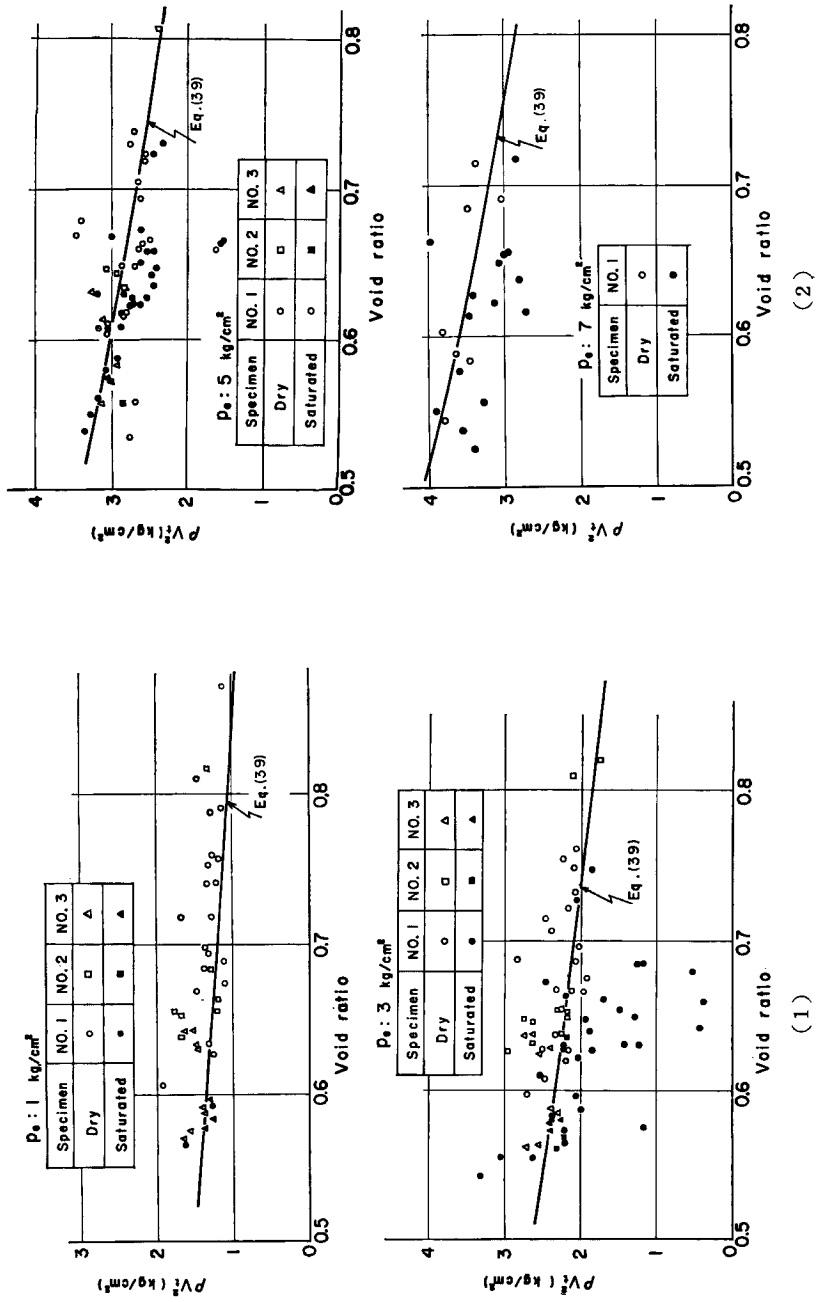


Fig. 7 Relationship between ρv^2 and void ratio,

ったためである。しかし、側圧を 2 kg/cm² 程度にすると、間げき比が 0.7~0.75 の場合に対しても横波が測定され、側圧 3 kg/cm² に対しては図に示したような結果が得られた。この場合には、乾燥砂に対してよりも、飽和砂におけるほうが測定値のちらばりの範囲が広く、この程度の側圧に対してはせん断弾性係数あるいは横波に及ぼす水の影響があることを示している。しかるに、側圧を増圧して 5 kg/cm² にした場合には乾燥状態と飽和状態の差異が少なくなっていることがわかる。このような傾向は側圧が 7 kg/cm² の場合にも同様である。これらの結果は側圧が小さいほど、間げき率の大きいほど乾燥砂と飽和砂との弾性定数あるいは弾性波速度の差異が顕著になることを示している。こうした現象の生ずる理由としては、側圧が小さく、間げきの大きい場合には、砂粒子間の接触において不安定な接触状態にあるものが相対的に増え、飽和砂においては粒子間を埋める水と粒子との相対運動によってそれが崩壊することによるものと考えられる。

一方、せん断弾性係数と間げき比の関係は、乾燥状態についてはほぼ一定の傾向が認められる。すなわち、間げき比が 0.5~0.9 程度の範囲内では、せん断弾性係数は間げき比に対してほぼ直線関係にあり、間げき比が大きくなるにつれて、せん断弾性係数は減少することがわかる。飽和状態の場合 5 kg/cm² 程度以上の側圧に対しては乾燥砂とほぼ同様な傾向にあると言えるが、それ以下の側圧に対しては間げき比の増大に対するせん断弾性係数の低下が乾燥砂の場合よりも顕著であると考えられる。しかしながら、試料 No.2 と No.3 は長さ 5 cm のものを用いたが、試料 No.1 は飽和砂の場合の試料中の減衰が著しいため、試料長さは 2 cm であり、また側圧の増減に伴う間げき比の変化は試料の微小な変形量や排水量から求めたため、測定値にはある程度の誤差の含まれていることを認めねばならない。

次に、さきに示したモデルとの比較検討を行なう。すなわち、間げき率が n であるときのせん断弾性係数は (29) 式で表わされたが、最小間げき率に対するせん断弾性係数を骨格のそれと考えれば、結局 (34) 式になる。これをさらに書き改めれば $\mu' \propto (n_{max} - n)$ となる。一方、せん断弾性係数と側圧の間には一定の比例関係があることを先に述べたが、(35) 式の比例関係は間げき率がほぼ一定であれば成り立つのであるから、(35) 式と上の式とは互に独立であると考えてよい。したがって、この両者の関係から

$$\mu' = C_1(n_{max} - n) p_e^{1/2} \dots\dots\dots(38)$$

が得られる。ここに C_1 は比例定数である。この定数 C_1 と n_{max} とは実験結果から定めねばならず、確定値として与えることはできない。そこで、いま Fig. 7 を参照して、 C_1 を 4200 kg/cm²、 n_{max} を 0.7 とすれば

$$\mu' = 4200(0.7 - n) p_e^{1/2} \dots\dots\dots(39)$$

となる。上式で表わされるせん断弾性係数と間げき率との関係が Fig. 7 中の実線である。これらの図から、(39) 式はいずれの実験結果に対しても間げき比とせん断弾性係数の関係をかなりよく表わしていることがわかる。この (39) 式は砂粒子間に作用する応力に無関係に、せん断弾性係数と間げき率とが直線関係にあるという仮定に基づいている。そしてこれらの実験結果はいずれも異なる側圧に対しても間げき比の増大に対してせん断弾性係数が減少する傾向を示すことは、モデルを設定するに際して設けた仮定が乾燥砂のせん断弾性係数に関してはほぼ妥当なことを示しているものと考えてよからう。飽和砂の場合にも側圧が高い場合には乾燥砂におけると大差ないが、低い側圧に対してはやや異なり、最大間げき率すなわち、横波速度が 0 に近くなる時の間げき率が乾燥砂の場合より低下する傾向にある。そして、この場合には n_{max} が有効側圧の関数になることから、もはや間げき率と有効側圧のせん断弾性係数に及ぼす影響は独立ではないから、(38) 式のような表示は許されなくなる。しかしながら、ここでは弾性定数と間げきとの関係を主眼にしており、その点に関する限りは飽和砂の場合にも間げき率の増加に対してせん断弾性係数が低下することは明らかであろう。

次に、縦波に関する測定結果について検討を行なう。Fig. 8 は乾燥砂における縦波の伝播速度と間げき比の関係を示したものである。数多くの実験のうち、側圧が 1, 3, 5 kg/cm² の場合についての測定値を掲げたが、いずれも ρv_l^2 は間げき比の増大に対して減少する傾向が共通に見られる。そこで、横波に対して行なったと同様に、モデルに関する理論解析結果について検討する。すなわち、乾燥砂の場合には (34) 式

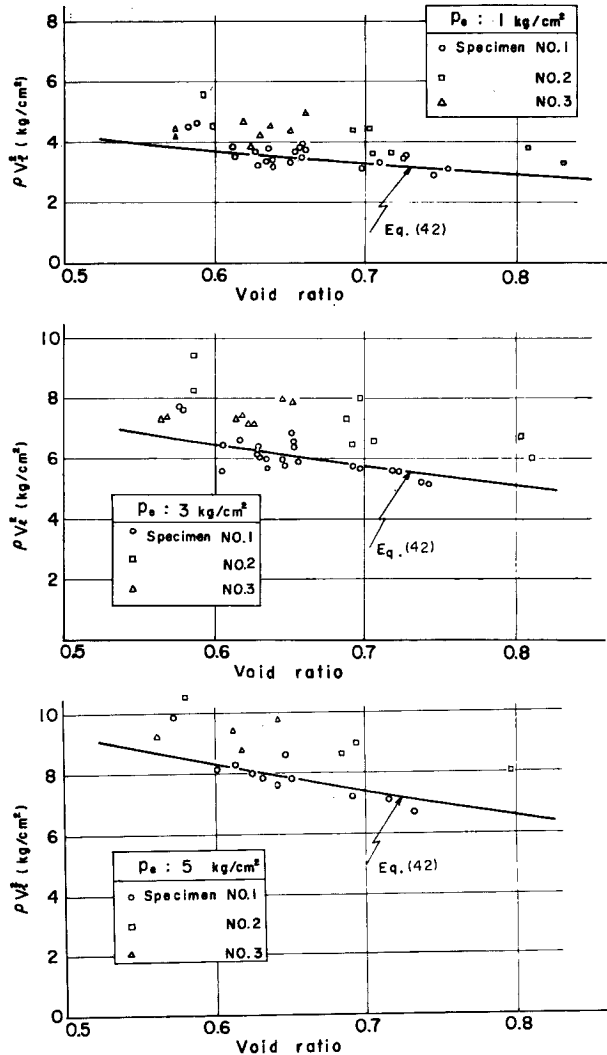


Fig. 8 Relationship between ρv_l^2 and void ratio.

において、水の体積弾性係数 κ を 0 とすれば、せん断弾性係数の場合と同様に

$$\rho v_l^2 \propto (n_{max} - n) \dots\dots\dots (40)$$

であり、また (36) 式の関係があるから、結局

$$\rho v_l^2 = C_2 (n_{max} - n) p_e^{1/2} \dots\dots\dots (41)$$

が得られる。ここに C_2 は定数である。 n_{max} としては、すでにせん断弾性係数の場合に検討したとおり、0.7程度であると判断されるから Fig. 8 の実験結果を参照して、 C_2 を 11500 kg/cm^2 とすると結局

$$\rho v_l^2 = 11500(0.7 - n) p_e^{1/2} \dots\dots\dots (42)$$

が得られる。この上式の関係を示したのが Fig. 8 中の曲線である。この (41) 式の関係はその誘導過程から明らかのように、間げき率の増加に対する弾性定数の直線的減少を仮定しており、これらの実験結果はこうした仮定の妥当性を裏づけているものと考えてよからう。飽和砂の縦波速度についての実験では、常に約

1500 m/sec かあるいはそれに近い伝播速度のみが測定され、側圧や間げき率の及ぼす影響は極めて小さい。これが、当該試料の実際の縦波速度なのか、あるいは測定の不備によるものかは現段階では明確でない。含水比の増大につれて縦波速度は水のそれに近づくという実験例¹¹⁾もあり、これは(34)式の持つ内容と相反するものではない。

6. 横波速度と標準貫入試験のN値との関係

1948年に Terzaghi-Peck が動的貫入試験によるN値を土性の判別や地盤支持力の推定に利用する方法を発表して以来、その試験法は一般に認められ、わが国でも標準貫入試験として JIS A 1219 (1961年) が制定されている。地盤調査のためのこの試験法は、その普及とともにN値に関する種々の調査・研究が続けられ、例えばN値と砂の相対密度 (D_r) および上載圧力 (p) の関係などが求められている。すなわち Gibbs-Holtz (1957) は大型タンク内に密度を各種に変えた砂を詰め、その表面に載荷重を与えて標準貫入試験を行ない、N値と相対密度の関係は上載圧力の大きさ(あるいは地盤深度)によってかなり影響されることを報告している¹²⁾。また Schultze-Menzenbach (1961) は現地実験を主にして同様の関係¹³⁾を求めているし、柳瀬もまたN値 $\sim D_r \sim p$ 関係を与えている¹⁴⁾。

これらは D_r と p の組み合わせをいろいろに変えてN値測定を行なったものであり、砂試料も異なっているが、その成果の一部は Fig. 9 のようにまとめることができる。すなわち、この図は D_r を一定にして p を変えた場合のN値 $\sim p$ 関係を両対数紙上に描いたものであり、 $D_r=80\%$ に対する結果を示しているが、他の D_r についても同様の図を得ることができる。それらを総合すると $\log N \sim \log p$ 関係は直線であり、その直線の傾斜は異なった D_r に対しても共通の約0.5と結論される。したがって

$$N \propto p^B \dots\dots\dots (43)$$

が成立し、 $B=0.5$ である (Schultze-Menzenbach は57個の試験結果より $B=0.549$ としている)。

つぎに p を一定にして D_r を変えた結果をまとめると Fig. 10 となる。これは $p=2.0 \text{ kg/cm}^2$ に対するものであるが、他の p についてもやはり同様の図を描くことができる。そして $\log N \sim \log D_r$ には直線関係が成立し、その直線の傾斜は p の値とはほぼ無関係に約2であることがわかる。

ところで横波速度 v_t とN値の関係を調べるために、ここではまず p を一定とした場合のN値と間げき率 n の関係を取りあげてみる。Fig. 11 は Gibbs-Holtz のデータより $p=0.7, 1.4, 2.8 \text{ kg/cm}^2$ についてN値 $\sim n$ 関係を描いたもので、 n が極端に大きくならない通常の範囲においては直線関係がえられ、しかも

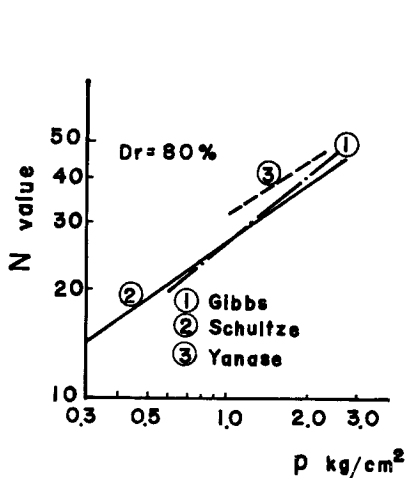


Fig. 9 Relationship between N-value and pressure p .

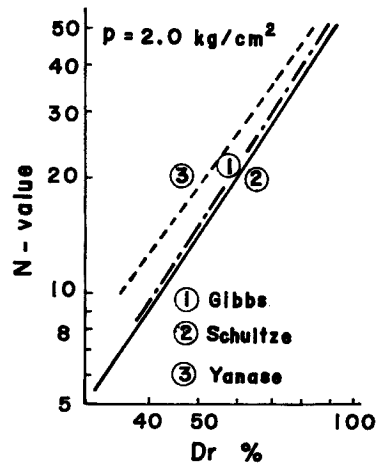


Fig. 10 Relationship between N-value and relative D_r .

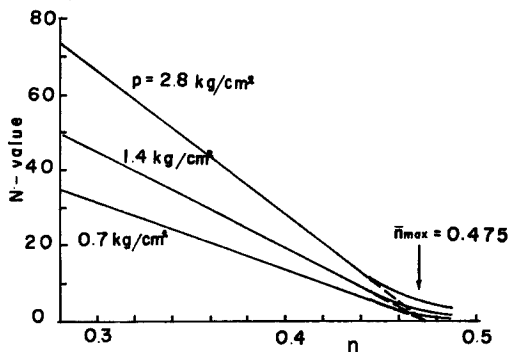


Fig. 11 Relationship between N -value and porosity n (After Gibbs and Holtz, 1957).

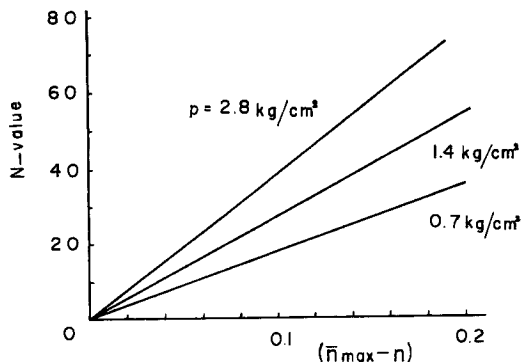


Fig. 12 Relationship between N -value and $(\bar{n}_{max}-n)$ (After Gibbs and Holtz, 1957).

これら3本の直線の延長は横軸上の1点で交わっている。この $N=0$ に対する間げき率 n の値を見掛けの最大間げき率 \bar{n}_{max} であらわすと、 $\bar{n}_{max}=0.475$ である (この砂試料の真の最大間げき率は $n_{max}=0.524$)。ゆえに $N \sim (\bar{n}_{max}-n)$ 関係にプロットしなおすと Fig. 12 に示すように原点を通る直線群をうることができ

$$N \propto (\bar{n}_{max}-n) \dots\dots\dots(44)$$

となる。

さて N 値と p 値の間には一定の比例関係があることを (43) 式にて述べたが、その比例関係は密度が一定の場合に成り立つのであるから、(43) および (44) 式は互に独立と考えてよい。したがって、この両者から

$$N = A(\bar{n}_{max}-n)p^B \dots\dots\dots(45)$$

となり、 A は比例定数である。Figs. 9, 11 とより求めた $B=0.5$ 、 $\bar{n}_{max}=0.475$ を用いて、Fig. 12 より定数 A を計算すると $p=2.8, 1.4, 0.7 \text{ kg/cm}^2$ に対して、それぞれ $A=227, 229, 215$ となり、これらはほぼ共通の値とみて差し支えない。

さて、5. で述べた (38) 式より v_t^2 は

$$v_t^2 = A'(\bar{n}_{max}-n)p^{B'} \dots\dots\dots(46)$$

であらわされ、 $A'=C_1/\rho$ 、 $B'=0.5$ である。

ところで (45) 式の B と (46) 式中の B' はともに 0.5 であるから、両式の比をとれば上載圧力 p と間げ

き率 n をあらわす項は消去されて結局

$$v_t^2 = \left(\frac{A'}{A} \right) N \quad \dots\dots\dots (47)$$

がえられる。そしてこの式に含まれる A' は今回の実験に用いた試料では、前述のように $C_1=4200$ kg/cm^2 であるから $A'=2.0 \times 10^9$ cm^2/sec^2 となる。

一方、乾燥砂の粒度配合を種々に変え、 v_t と間げき比の関係調べた結果が Hardin-Richart により報告されている¹⁵⁾。それによれば粒子の大きさおよび粒度配合は、間げき比を変化させることを通じてのみ弾性波速度に影響を及ぼすのであり、粒子の大きさ、配合が変わっても間げき比が不変であれば波速は変わらないと結論している。いま、Hardin-Richart によるデータを再整理して $v_t^2 \sim n$ 関係にあらわした結果が Fig. 13 に示してある。この図によれば見掛けの最大間げき率は $\bar{n}_{max}=0.67$ であり、 p の異なる 4 本の直線の

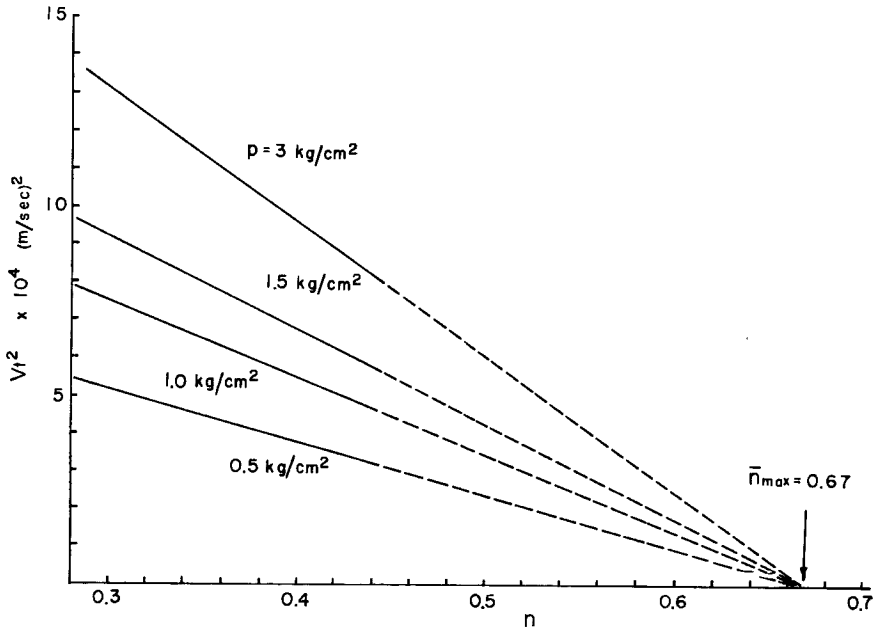


Fig. 13 Relationship between v_t^2 and porosity n (After Hardin and Richart, 1963).

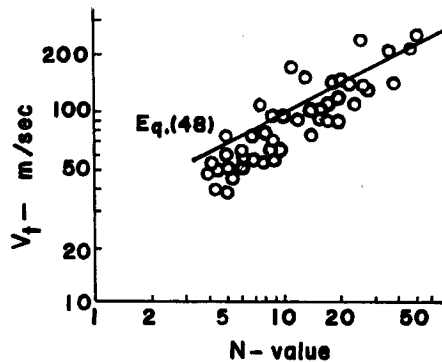


Fig. 14 Relationship between v_t and N -value.

傾斜から (46) 式中の A' を求めると $(1.98 \sim 2.10) \times 10^9 \text{ cm}^2/\text{sec}^2$ となり、今回の試料に対する $A' = 2.0 \times 10^9 \text{ cm}^2/\text{sec}^2$ と変わらない値がえられる。

以上の比例定数 A と A' に影響する因子は今のところ不明であり、今後の研究が必要であるが、現在までにえられた $A = 223$, $A' = 2.0 \times 10^9 \text{ cm}^2/\text{sec}^2$ を用いて、(47) 式の関係をもと

$$v_t^2 = N \times 10^3 (\text{m}/\text{sec})^2 \dots\dots\dots (48)$$

となる。

Fig. 14 中のプロットは金井による砂質土の $v_t \sim N$ 値関係¹⁶⁾をそのまま引用したものであり、実線で示した直線は (48) 式をあらわしている。これによると (48) 式は測定値の範囲内に入り、 N 値から v_t の概略値を推定する方法の一つとして利用できると思われる。

7. 結 語

砂質土の弾性波速度あるいは弾性定数の測定には従来、主として共振法が用いられているが、本実験においては超音波パルス法を採用した。共振法と超音波パルス法とを比較すると、応力レベル、振動数、変形量などにおいて相当に違った状態にあると考えられるが、弾性波速度や弾性定数に及ぼす有効側圧ならびに間げきの大小の影響についての両者の方法による測定結果にはほとんど差異はみられない。超音波パルス法は主として岩石のような媒質に対して用いられてきたが、砂のような粒状体の集合体に対しても十分適用可能なことが確かめられたといえよう。

この研究の主なる成果は砂質土の弾性定数が間げき率の増大につれて低下するような力学モデルを提示して、その妥当性が実験によって検証できたこと、ならびに弾性定数の有効応力への依存性を従来とは違った方法でも確認できたことといえよう。これらの結果を実際の砂質土から成る地盤に適用して考えると、地表面からの深さに比例して弾性定数が増大することを意味しており、地震時の地盤の応答解析などにおける地盤の不均質性を考慮すべきことを示唆しているものである。

また、標準貫入試験に関するこれまでの研究成果によると、 N 値と上載荷重、間げき率の間にはほぼ一定の関係の存在することが認められ、それらの結果を整理すると、せん断弾性係数とこれら2つの量との関係に相似であることが見い出され、これから横波速度と N 値との関係を推定できる経験式を導いた。すなわちこのような関係式により地盤の性状が N 値で判別できると考えられる場合には、その横波速度の概略値の推定が可能となる。

本研究は砂質土を対象にしたものであったが、粘性土の場合にはさらに粘着力という新しい要素を考慮しなければならぬし、また透水性に対する配慮も必要であり、より複雑な問題が関連することから、別の観点に立脚したモデルを設定しなければならないであろう。また、ここに述べた実験はモデルの設定における過程で設けた仮定の妥当性を直接あるいは間接に検討することを主眼としたため試料数も十分ではなく、各種の定数を定めるための実験はさらに数多くの砂質土の試料について行なわねばならないであろう。

参 考 文 献

- 1) Mindlin, P. D.: Compliance of Elastic Bodies in Contact, Jour. Appl. Mech., Vol. 16, 1949, pp. 259~268.
- 2) 南雲昭三郎: 粒状媒質の弾性 (III) — 静的応答と変形係数の応力依存性 —, 物理探鉱, 第16巻, 第3号, 昭38, pp. 13~20.
- 3) Biot, M. A.: Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid Saturated Porous Solid, Jour. Acoust. Soc. Am., Vol. 28, No. 2, 1956, pp. 168~191.
- 4) Biot, M. A. and D. G. Willis: The Elastic Coefficients of the Theory of Consolidation, Jour. Appl. Mech., Vol. 24, 1957, pp. 594~601.
- 5) Gassmann, F.: Elastic Waves through a Packing of Spheres, Geophysics, Vol. 16, 1951,

pp. 673~685.

- 6) Geertzma, J. and D. C. Smit: Some Aspect of Elastic Wave Propagation in Fluid-saturated Porous Solid, *Geophysics*, Vol. 26, 1961, pp.169~181.
- 7) 最上武雄：粒状体の力学，土と基礎，Vol. 15, No.1, 昭42, pp,1~7.
- 8) 石本巳四雄・飯田汲事：Determination of Elastic Constants of Soils by Means of Vibration Methods, *Bull. Earthquakes Research Inst.*, Vol. 15, 1937, pp.37~38.
- 9) Hardin, B. O. and F. E. Richart: Elastic Wave Velocities in Granular Soils, *Proc. ASCE*, SM1, 1963, pp.33~65.
- 10) 前出9).
- 11) 飯田汲事：The Velocity of Elastic Waves in Sand, *Bull. Earthquakes Research Inst.*, Vol. 16, 1938, pp.131~144.
- 12) Gibbs, H. J. and W. G. Holtz: Research on Determining the Density of Sand by Spoon Penetration Test, *Proc. 4 th ICSM*, Vol. 1, 1957, pp.35~39.
- 13) Schultze, E. and E. Menzenbach: Standard Penetration Test and Compressibility of Soil, *Proc. 5 th ICSM*, Vol. 1, 1961, pp.527~532.
- 14) 藤田圭一：標準貫入試験，土質調査試験結果の解釈と適用例，土質工学会編，1968, p.48.
- 15) 前出9).
- 16) 金井清：地震動・地盤震動，地震工学，彰国社，1968, p.39.