

# 不規則外力を受ける基礎構造物の非定常応答

後藤尚男・土岐憲三・秋吉 卓

## NON-STATIONARY RESPONSE OF UNDERGROUND STRUCTURES SUBJECTED TO RANDOM EXCITATIONS

By Hisao GOTO, Kenzo TOKI and Takashi AKIYOSHI

### Synopsis

For seismic response analysis, it is important to take into account the dynamic effect of surface layer around the foundation structures. Firstly we introduce the unit impulse response functions of rigid underground structures with elliptic cross sections which contain the effect of dispersive and dissipative energy. Secondly we discuss the response of the structures in the ground and the expected number of threshold crossings, subjected to non-stationary random process which is constructed by the product of a deterministic function and a stationary random process with an arbitrary probability density.

### 1. 緒 言

基礎構造物が時間的・空間的に不規則に変動する外力を受けるときの応答解析は、数多く行なわれてきた。しかしながら、その構造物を取りまく地盤の動的性質があまりに複雑すぎるため、通常は地盤をばねと dash-pot で抽象化することが多かった。しかし、この場合のばね定数等が基礎構造物の幾何学的形状との関連性を持たなく、かつまた地盤の運動が構造物のそれとは無関係に定まることが多く、その結果構造物と周辺地盤との相互作用があまり考慮されていなかった。

しかしながら、構造物と地盤の振動において構造物からの波動の放射によって波動が遠方に逸散する効果を考慮すると、逸散による減衰効果はかなり大きく、応答にも相当影響を及ぼすことがすでにいわれている。このような波動逸散の特性を知るには周波数領域において詳しく検討されねばならないが、われわれはすでに剛な楕円柱がその下端の中心を回転軸にして、その短軸および長軸方向にロッキング振動するときの周波数応答を解析してきた<sup>1)</sup>。その解析において、構造物の周辺地盤が果たす動的効果が周波数に対してかなり複雑であるため、このときの周波数応答関数から得られる伝達関数も同様に複雑であり、初期条件等を考慮してその逆変換より系の単位衝撃応答関数を得ることは容易ではない。そこでわれわれは地盤の動的ばね効果と振動土圧効果を周波数領域において近似的な式で置き換えを行ない、しかる後適当な変数変換を施して逆変換を実行することにより所期の単位衝撃応答関数の解析的表示を得た。かくして、この単位衝撃応答関数を用いることにより、不規則な入力を受ける系の基礎確率量を解析的に導き出した。そこで不規則入力(加速度)としては、確定関数と定常確率過程との積で表わされる非定常確率過程を適用すると<sup>2)</sup>、系の応答もまた非定常となるが、このときの基礎的な確率量を通して剛な楕円柱のロッキング振動に関して若干の考察を試みた。

### 2. 表層地盤の単位衝撃応答関数

構造物とその周辺地盤とは振動時には互に影響を及ぼしあって、複雑な挙動をする。特に振動時に構造物

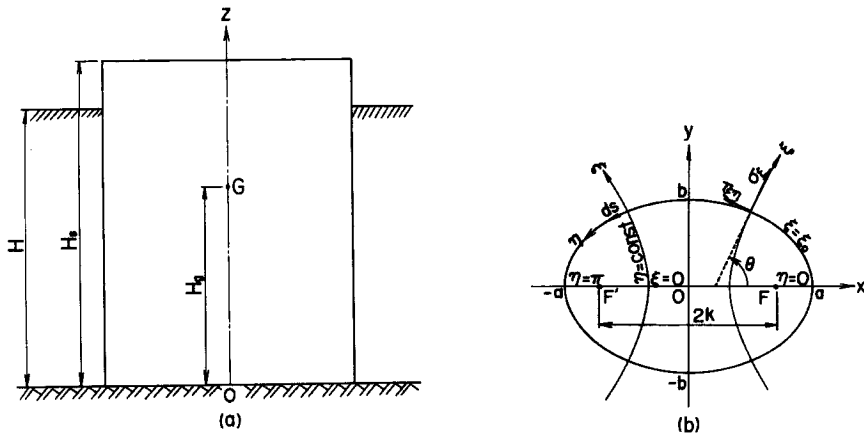


Fig. 1 Model of rigid cylinder and its cross section.

より放射される波動が遠方に逃げるため、それによる減衰効果が構造物の振動を大きく左右することになる<sup>1),2)</sup>。この点に関してわれわれは Fig. 1 のように剛な楕円柱が基盤より水平方向に  $u_g = u_0 e^{i\omega t}$  なる単弦調和波を受けるときの、その短軸あるいは長軸方向に角振幅  $\varphi_0(i\omega)$  なるロッキング振動する場合について解析を行なったが<sup>3)</sup>、その過程を省略して結果のみを記すと、

$$\varphi_0(i\omega) = \frac{\frac{H_g}{i_0^2} \left( \frac{\omega g}{\omega_s} \right)^2 + \frac{\pi}{2} \frac{1}{H} \chi (g_1 + i g_2)}{1 + 2i h_s \frac{\omega}{\omega_s} - \left( \frac{\omega}{\omega_s} \right)^2 + \chi (f_1 + i f_2)} \cdot u_0 \left( \frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \quad \dots\dots\dots(2.1)$$

ここに、 $i_0 = \sqrt{I/m_0}$ 、 $\omega_s = \sqrt{k_R/I}$ 、 $m_0 = \rho_s \pi a b H_s$ 、 $c_s/I = 2h_s \omega_s$ 、 $I = \rho_s \pi a b H_s (b^2/4 + H_s^2/3)$ 、(ただし長軸方向の振動のときは、 $a$ 、 $b$  を互に入れ換えればよい)、 $\rho_s$  : 楕円柱の密度、 $\omega_s$ 、 $\omega_g$  : 剛な楕円柱のロッキング固有円振動数および表層のせん断 1 次固有円振動数。

ところで半無限弾性体中に孤立して静止していた楕円柱が瞬間的に大きさ 1 なる衝撃力を受けるとき、楕円柱頂部の水平振動に対する周波数応答関数  $X(i\omega)$  を考えてみる。これは入力地震加速度が  $u_g(t) = \delta(t)$  ( $\delta(t)$  : delta 関数) としたとき Fourier の変換形にはかならないので、(2.1) 式において、 $u_0 \omega^2 = 1$ 、 $X(i\omega) = \varphi_0 H_s$  とすることによって次の形で得られる。

$$X(i\omega) = \frac{\frac{H_g H_s}{i_0^2} + \frac{\pi}{2} \frac{H_s}{H} \left( \frac{\omega_s}{\omega_g} \right)^2 \chi G(i\omega)}{-\omega^2 + 2i \zeta_s \omega_s \omega + \omega_s^2 + \omega_s^2 \chi F(i\omega)} \quad \dots\dots\dots(2.2)$$

このとき (2.1) 式あるいは (2.2) 式の  $F(i\omega) = f_1 + i f_2$ 、 $G(i\omega) = g_1 + i g_2$  で示される項がそれぞれ表層の複素ばね効果および振動土圧効果である。そこでこれらの動特性 ( $f_1 + i f_2$ )、( $g_1 + i g_2$ ) および基礎体頂部の水平方向の振動倍率の数値計算例を図示したのが Fig. 2、Fig. 3 および Fig. 4 であるが、これらの図において Minor および Major という文字はそれぞれ短軸方向および長軸方向に振動する場合を表わすものとする。

そこで本研究においては、 $F(i\omega) = f_1 + i f_2$ 、 $G(i\omega) = g_1 + i g_2$  を次のように設定する。まず Fig. 2 における  $f_1$  と  $f_2$  とを Fig. 5 のように、側圧のばね効果は振動数の 2 乗に比例して減少する  $f_1$  と、振動数に 1 次比例する減衰効果を持つ  $f_2$  とから成り立つものとする。したがって  $F(i\omega)$  に次の関数形を与える。

$$F(i\omega) = f_1 + i f_2 = 1 - \frac{1}{k_1^2} \left( \frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 + 2i k_2 \frac{\omega}{\omega_g} \quad \dots\dots\dots(2.3)$$

ここに、 $k_1$  は 2 次曲線  $f_1$  が横軸と交わるときの  $\omega/\omega_g$  の値、 $k_2$  は直線  $f_2$  の勾配の半分。

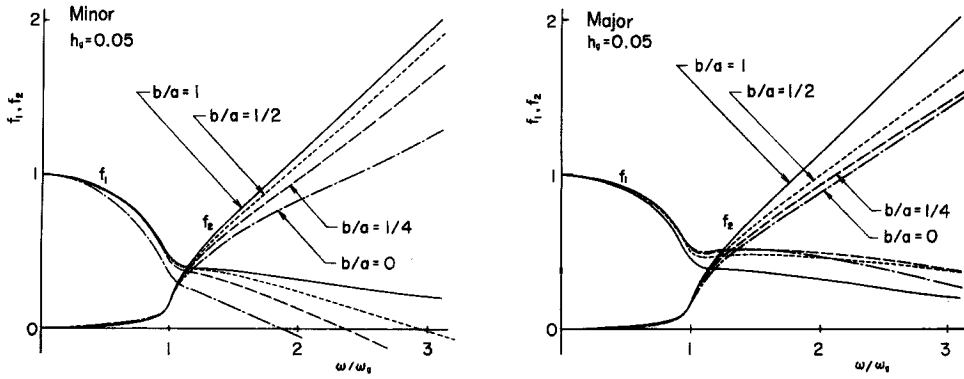


Fig. 2 Dynamic effects of  $k_x$  horizontal ground coefficient.

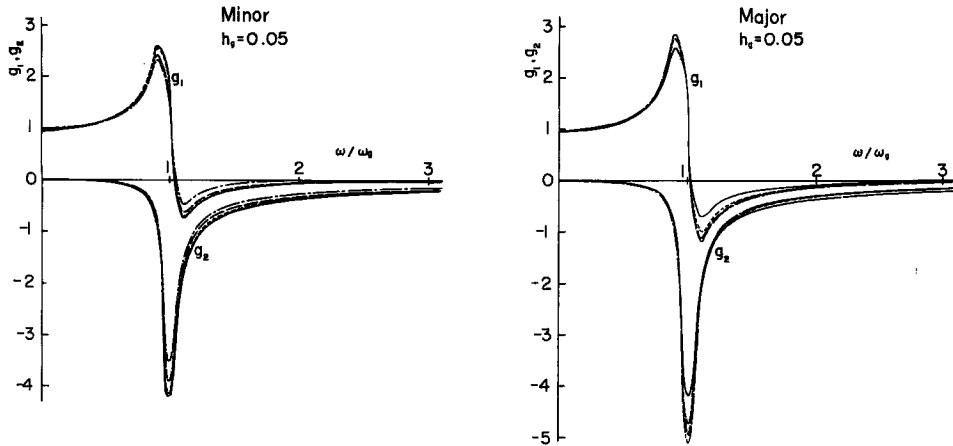


Fig. 3 Dynamic effects of  $k_x$  horizontal earth pressure.

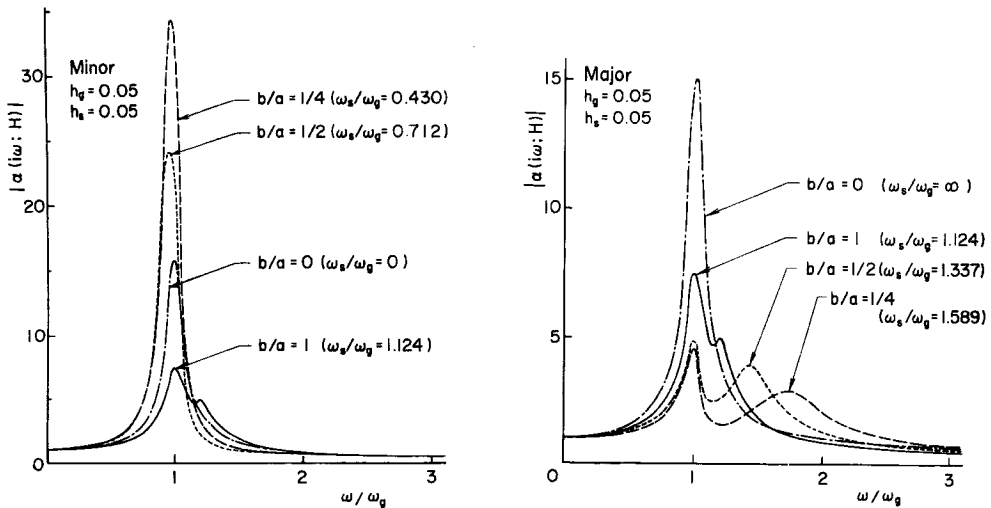


Fig. 4 Amplification factors of frequency responses.

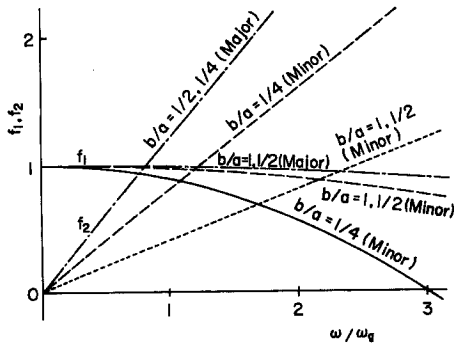


Fig. 5 Asymptotic curves of dynamic effects of horizontal ground coefficient.

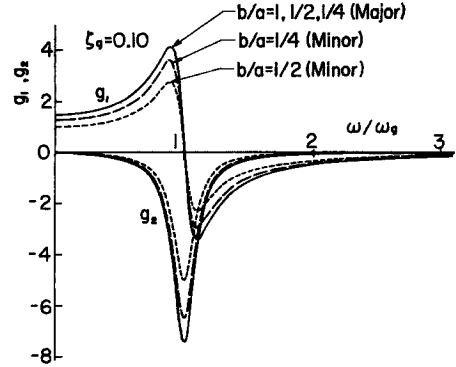


Fig. 6 Asymptotic curves of dynamic effects of horizontal earth pressure.

一方 Fig. 3 の振動土圧の動的効果  $G(i\omega)$  は Fig. 6 のように、1 自由度系の応答特性に近似させたものである。したがって  $(g_1 + ig_2)$  としては次の関数形を与える。

$$G(i\omega) = g_1 + ig_2 = \frac{k_3 \omega q^2}{-\omega^2 + 2i\zeta_q \omega q + \omega q^2} \dots\dots\dots(2.4)$$

ここに、 $k_3$  は近似式の補正係数である。そこで

$$\frac{1}{-\omega^2 + 2i\zeta_q \omega s + \omega s^2 + \omega s^2 \chi(f_1 + if_2)} = P(i\omega), \chi G(i\omega) P(i\omega) = Q(i\omega) \dots\dots\dots(2.5)$$

とおくと、(2.2)~(2.5) 式はすべて  $i\omega$  の関数として書き表わすことができる。したがって、これらの式において  $i\omega = s$  という変数変換を行なうと (2.2) 式は伝達関数として次の形に書き改められる。

$$X(s) = \alpha' P(s) + \beta' P'(s) G(s) = \alpha' P(s) + \beta' Q(s) \dots\dots\dots(2.6)$$

ここに、 $\alpha' = k_4 \alpha / \mu_0$ 、 $\beta' = k_3 \beta / \mu_0$ 、 $\alpha = H H q_s / i \omega^2$ 、 $\beta = \pi / 2 \cdot (\omega_s / \omega q)^2$ 、 $\mu_0 = 1 + \chi (\omega_s / \omega q)^2 / k_1^2$  であって、 $k_3$ 、 $k_4$  は (2.6) 式の右辺の  $G(s)$  および  $P(s)$  に対する一種の補正係数である。なおこの場合の周波数応答倍率は  $|\alpha'(i\omega; H)| = |1 + X(i\omega) \cdot (\omega / \omega q)^2|$  で与えられる。そこで本研究においては、 $\zeta_s = 0.05$ 、 $\zeta_q = 0.10$  とし、 $(\chi, k_1, k_2, k_3, k_4)$  の値は  $b/a = 1/4$  (短軸方向、 $\omega_s / \omega q = 0.430$ )、 $b/a = 1/2$  (短軸方向、 $\omega_s / \omega q = 0.712$ )、 $b/a = 1$  ( $\omega_s / \omega q = 1.124$ )、 $b/a = 1/2$  (長軸方向、 $\omega_s / \omega q = 1.337$ )、 $b/a = 1/4$  (長軸方向、 $\omega_s / \omega q = 1.589$ ) の 5 つの場合に対してそれぞれ (4, 3, 0.4, 1.3, 1.3)、(1, 6, 0.2, 1, 1)、(0.2, 6, 0.2, 1.5, 1.5)、(0.2, 9, 0.6, 1.5, 1.5)、(0.3, 9, 0.6, 1.5, 1.5) の値を与えて表層の動特性  $f_1 + if_2$ 、 $g_1 + ig_2$  およ

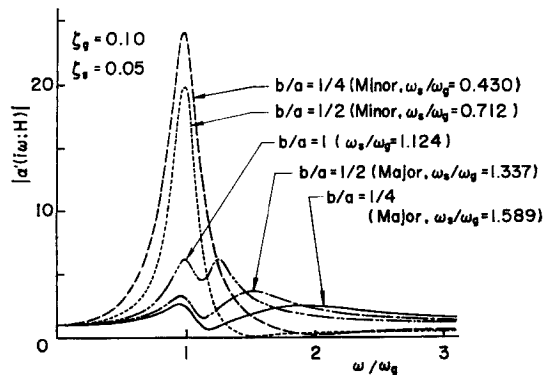


Fig. 7 Asymptotic amplification factors of frequency responses.

び周波数応答倍率  $|\alpha'(i\omega; H)|$  を図示したのが Figs. 5, 6 および 7 である。この周波数応答倍率を Fig. 4 のそれと比較すると割合よい近似を与えているといえよう。

ところで (2.2) 式で示される周波数応答関数は、地盤と構造物とからなる系に  $u_0(t) = \delta(t)$  なる外力が作用したときの Fourier 変換形であるが、これはまた初期条件  $u_x(0) = 0, \dot{u}_x(0) = 1$  としたときの Laplace 変換形と同等である。したがって、静止していた剛な楕円柱が運動を開始してから任意の時刻  $t(t \geq 0)$  における、その頂部の相対水平変位  $x(t)$  に対応する単位衝撃応答関数を  $w(t)$  とすると、 $w(t)$  は (2.6) 式の Laplace 逆変換によって次のように得られる。

$$w(t) = \alpha' w_0(t) + \beta' \int_0^t w_0(t-\tau) w_2(\tau) d\tau = \alpha' w_0(t) + \beta' w_1(t) \quad \dots\dots\dots(2.7)$$

ここに、 $w_0(t)$ ,  $w_1(t)$  および  $w_2(t)$  はそれぞれ  $P(s)$ ,  $Q(s)$  および  $G(s)$  の Laplace 逆変換形である。かくして、表層と基盤の静的反力比  $\chi$  の値のいかんによって次の 2 つの場合が生じる。

i)  $\mu_0(1+\chi) - h_e^2 \geq 0$  のとき：

$$w(t) = \frac{\alpha'}{\omega_1} e^{-\Delta_1 t} \sin \omega_1 t + \frac{\beta' c_1}{\omega_1} e^{-\Delta_1 t} \sin(\omega_1 t - \delta_1) + \frac{\beta' c_1}{\omega_2} e^{-\Delta_2 t} \sin(\omega_2 t + \delta_2) \quad \dots\dots\dots(2.8)$$

ただし、 $t < 0$  に対しては  $w(t) = 0$  とする。このとき

$$c_1 = \frac{\omega g^2}{[(\Delta_1 - \Delta_2)^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2] \{(\Delta_1 - \Delta_2)^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2\}^{1/2}}$$

$$\delta_1 = \tan^{-1} \left\{ \frac{2\omega_1(\Delta_2 - \Delta_1)}{(\Delta_1 - \Delta_2)^2 - \omega_1^2 + \omega_2^2} \right\}, \quad \delta_2 = \tan^{-1} \left\{ \frac{2\omega_2(\Delta_2 - \Delta_1)}{(\Delta_1 - \Delta_2)^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2} \right\}$$

$$\Delta_1 = \frac{h_e \omega_s}{\mu_0}, \quad \omega_1 = \omega_s \sqrt{1 + \chi^* - \zeta_0} = \omega_s \sqrt{\mu_0(1 + \chi) - \frac{h_e^2}{\mu_0}}, \quad h_e = \zeta_s + \frac{\chi k_2 \omega_s}{\omega g}$$

$$\mu_0 = 1 + \frac{\chi}{k_1^2} \left( \frac{\omega_s}{\omega g} \right)^2, \quad \chi^* = \frac{\chi}{k_1^2} \left\{ 1 - \left( \frac{\omega_s}{\omega g} \right)^2 \right\}, \quad \Delta_2 = \zeta_g \omega g, \quad \omega_2 = \zeta_g^* \omega g, \quad \zeta_g^* = \sqrt{1 - \zeta_g^2}, \quad \zeta_g, \zeta_s :$$

表層内部および楕円柱のロッキングの粘性減衰定数。

ii)  $\mu_0(1+\chi) - h_e^2 < 0$  のとき：

$$w(t) = \frac{\alpha'}{\omega_1'} e^{-\Delta_1 t} \sinh \omega_1' t + \frac{\beta' c_2}{\omega_2} e^{-\Delta_2 t} \sin(\omega_2 t - \delta_1') \quad \dots\dots\dots(2.9)$$

ただし、 $t < 0$  に対して  $w(t) = 0$  とする。このとき

$$c_2 = \frac{\omega g^2}{[(\Delta_1 - \Delta_2 - \omega_1')^2 + \omega_2^2] \{(\Delta_1 - \Delta_2 + \omega_1')^2 + \omega_2^2\}^{1/2}}$$

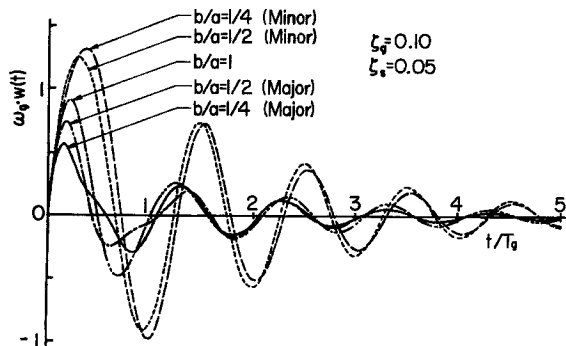


Fig. 8 Unit impulse response functions of rigid cylinder.

$$\delta_1' = \tan^{-1} \left\{ \frac{2\omega_2(D_1 - D_2)}{(D_1 - D_2)^2 - \omega_1'^2 - \omega_2^2} \right\}, \quad \omega_1' = \frac{\omega_s \sqrt{h_e^2 - \mu_0(1 + \chi)}}{\mu_0}$$

さき与えた数値に対しては i) の場合に該当するが、この時の単位衝撃応答関数  $w(t)$  を図示したのが Fig. 8 である。これから分るように剛な楕円柱の固有円振動数 ( $\omega_s$ ) が表層のせん断 1 次のそれ ( $\omega_\theta$ ) より大きくなりがちな長軸方向の振動では、波動の逸散による効果が大きく効いて応答を縮小せしめる効果があるが、一方両固有振動数間の大小関係が逆になる短軸方向の振動では、振動土圧効果が大きく効くため応答を増大せしめるような特性を持つことが示されている。

### 3. 非定常外力に対する基礎構造物の応答

本研究においては基盤よりの入力地震加速度  $f(t)$  が確定関数  $\phi(t)$  と任意のスペクトルを持つ定常確率過程  $g(t)$  との積で表わされたものを考える<sup>4)</sup>。

$$f(\eta, \varphi; t) = \phi(t)g(\eta, \varphi; t) = \phi(t) \cos(\eta t + \varphi) \dots\dots\dots(3.1)$$

ただし、 $\eta$  は確率密度  $p_\theta(\eta)$  を持つ確率変数であり、 $\varphi$  は  $[0, 2\pi]$  で一様分布する位相角である。このとき入力地震加速度に関する共分散  $\phi_{ff}(\tau_1, \tau_2)$  については

$$\phi_{ff}(\tau_1, \tau_2) = E[f(\eta, \varphi; \tau_1)f(\eta, \varphi; \tau_2)] = \frac{1}{2}\phi(\tau_1)\phi(\tau_2)E[\cos \eta(\tau_1 - \tau_2)]$$

さらに、

$$\phi_{f\dot{f}}(\tau_1, \tau_2) = \frac{\partial \phi_{ff}(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_2} = \frac{1}{2}\phi(\tau_1)\dot{\phi}(\tau_2)E[\cos \eta(\tau_1 - \tau_2)]$$

$$+ \frac{1}{2}\phi(\tau_1)\phi(\tau_2)E[\eta \sin \eta(\tau_1 - \tau_2)]$$

$$\phi_{\dot{f}\dot{f}}(\tau_1, \tau_2) = \frac{\partial^2 \phi_{ff}(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} = \frac{1}{2}\dot{\phi}(\tau_1)\dot{\phi}(\tau_2)E[\cos \eta(\tau_1 - \tau_2)]$$

$$+ \frac{1}{2}\dot{\phi}(\tau_1)\phi(\tau_2)E[\eta \sin \eta(\tau_1 - \tau_2)]$$

$$- \frac{1}{2}\phi(\tau_1)\dot{\phi}(\tau_2)E[\eta \sin \eta(\tau_1 - \tau_2)]$$

$$+ \frac{1}{2}\phi(\tau_1)\phi(\tau_2)E[\eta^2 \cos \eta(\tau_1 - \tau_2)]$$

} \dots\dots\dots(3.2)

したがって入力加速度と入力加加速度に関する分散  $\sigma_f^2(t), \sigma_{\dot{f}}^2(t)$  およびそれらの相関関数  $\phi_{ff}(t)$  は (3.2) 式において  $t_1 = t_2 = t$  とすることによって以下のように求められる。

$$\sigma_f^2(t) = \frac{1}{2}\phi^2(t) \int_0^\infty p_\theta(\eta) d\eta$$

$$\sigma_{\dot{f}}^2(t) = \frac{1}{2}[\dot{\phi}(t)]^2 \int_0^\infty p_\theta(\eta) d\eta + \frac{1}{2}[\phi(t)]^2 \int_0^\infty \eta^2 p_\theta(\eta) d\eta$$

$$\phi_{f\dot{f}}(t) = \frac{1}{2}\phi(t)\dot{\phi}(t) \int_0^\infty p_\theta(\eta) d\eta$$

} \dots\dots\dots(3.3)

そこで本研究において、確定関数  $\phi(t)$  および確率変数  $\eta$  の確率密度  $p_\theta(\eta)$  について次式のものを用いることにする。

$$\phi(t) = a \frac{t}{t_p} \exp\left(1 - \frac{t}{t_p}\right), \quad (t \geq 0) \dots\dots\dots(3.4)$$

$$p_\theta(\eta) = \frac{128}{3} \frac{\eta^4}{\eta_p^5} \exp\left(-4 \frac{\eta}{\eta_p}\right), \quad (\eta \geq 0) \dots\dots\dots(3.5)$$

ただし、 $t_p$  は  $\phi(t)$  が最大になるときの時間、 $\eta_p$  は  $p_\theta(\eta)$  が最大になるときの円振動数であり、その概略を Fig. 9 と Fig. 10 に示した。

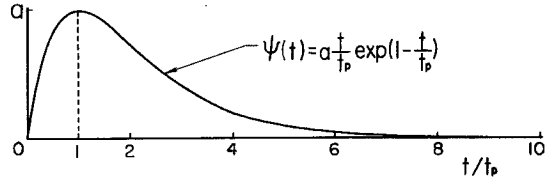


Fig. 9 Deterministic function representing non-stationarity of input acceleration.

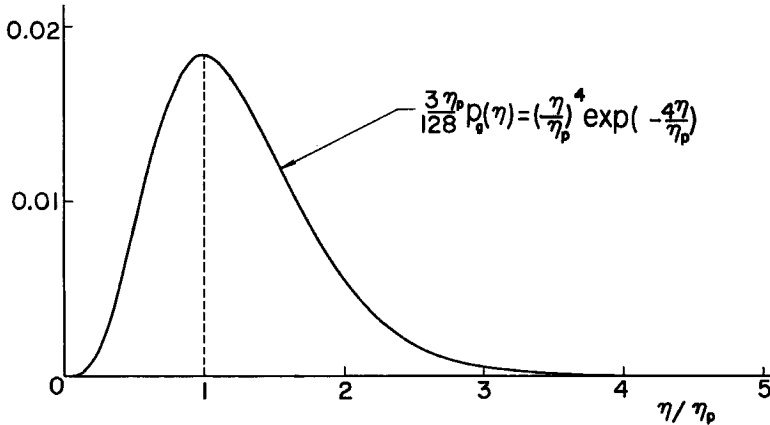


Fig. 10 Probability density function for random variable  $\eta$ .

したがって、入力加速度と入力加加速度との相関係数  $\rho_{fi}(t)$  は

$$\rho_{fi}(t) = \frac{\phi_{fi}(t)}{\sigma_f(t)\sigma_{\dot{f}}(t)} = \frac{1 - \frac{t}{t_p}}{\sqrt{\left(1 - \frac{t}{t_p}\right)^2 + \frac{15}{2}(\eta_p t)^2}} \dots\dots\dots(3.6)$$

で表わされることになる。

さて基盤よりかかる入力地震動  $f(t)$  を受けるときの、地中の剛な構造物頂部の水平相対変位  $x(t)$  は前章 2. の単位衝撃応答関数  $w(t)$  を用いて次のように記述される。

$$x(t) = \int_0^t w(t-\tau)f(\tau)d\tau \dots\dots\dots(3.7)$$

ところで入加加速度  $f(t)$  を平均値 0、ガウス分布に従う非定常確率過程として (3.1) 式のように表わせるとしたとき、構造物の応答  $x(t)$  もまたガウス分布に従う平均値 0 の非定常確率過程となる。そこで系の応答の分散は次のようにして求められる。

$$\begin{aligned} \sigma_x^2(t) &= E \left[ \int_0^t w(t-\tau_1)\phi(\tau_1)\cos(\eta\tau_1+\varphi)d\tau_1 \int_0^t w(t-\tau_2)\phi(\tau_2)\cos(\eta\tau_2+\varphi)d\tau_2 \right] \\ &= \int_0^t \int_0^t w(t-\tau_1)w(t-\tau_2)\phi(\tau_1)\phi(\tau_2)E[\cos(\eta\tau_1+\varphi)\cos(\eta\tau_2+\varphi)]d\tau_1d\tau_2 \\ &= \int_0^t \int_0^t w(t-\tau_1)w(t-\tau_2)\phi(\tau_1)\phi(\tau_2)\phi_{ff}(\tau_1, \tau_2)d\tau_1d\tau_2 \end{aligned}$$

ここに、 $\phi_{ff}(\tau_1, \tau_2)$  は (3.2) 式で与えられる入力加速度  $f(\eta, \varphi; t)$  の共分散である。したがって上式は、

$$\sigma_x^2(t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^t \int_0^t \phi(\tau_1)\phi(\tau_2)w(t-\tau_1)w(t-\tau_2)\rho_0(\eta)\cos\eta(\tau_1-\tau_2)d\tau_1d\tau_2d\eta$$

となる。すなわち構造物の応答変位の r. m. s., 応答速度の r. m. s. およびそれらの相関係数をそれぞれ  $\sigma_x(t)$ ,  $\sigma_{\dot{x}}(t)$  および  $\rho_{x\dot{x}}(t)$  とすると, これらは結局次式から求められる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^2(t) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty p\theta(\eta) \{q_c^2(\eta; t) + q_s^2(\eta; t)\} d\eta \\ \sigma_{\dot{x}}^2(t) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty p\theta(\eta) \{\dot{q}_c^2(\eta; t) + \dot{q}_s^2(\eta; t)\} d\eta \\ \rho_{x\dot{x}}(t) &= \frac{\frac{1}{2} \int_0^\infty p\theta(\eta) \{q_c(\eta; t)\dot{q}_c(\eta; t) + q_s(\eta; t)\dot{q}_s(\eta; t)\} d\eta}{\sigma_x(t)\sigma_{\dot{x}}(t)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.8)$$

このとき

$$\left. \begin{aligned} q_s(\eta; t) &= \int_0^t \phi(\tau)w(t-\tau) \sin \eta\tau d\tau \\ q_c(\eta; t) &= \int_0^t \phi(\tau)w(t-\tau) \cos \eta\tau d\tau \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.9)$$

であって,  $\dot{q}_c(\eta; t)$ ,  $\dot{q}_s(\eta; t)$  はそれぞれ  $q_c(\eta; t)$ ,  $q_s(\eta; t)$  の  $t$  に関する微分形である。ここで (3.4) 式を用いて時間に関する項を積分すると以下のようになる。

$\mu_0(1+\chi) - h_e^2 \geq 0$  のとき :

$$\left. \begin{aligned} q_s(\eta; t) &= \frac{atp}{2\omega_1} [\alpha'e^{1-s_1t^*} \{I_c(s_1-1, \eta^*+s_2, -s_2t^*; t^*) \\ &\quad - I_c(s_1-1, \eta^*-s_2, s_2t^*; t^*)\} \\ &\quad + A\beta'e^{1-s_1t^*} \{I_c(s_1-1, \eta^*+s_2, -s_2t^*+\delta_1; t^*) \\ &\quad - I_c(s_1-1, \eta^*-s_2, s_2t^*-\delta_1; t^*)\} \\ &\quad + B\beta'e^{1-z_1t^*} \{I_c(z_1-1, \eta^*+z_2, -z_2t^*-\delta_2; t^*) \\ &\quad - I_c(z_1-1, \eta^*-z_2, z_2t^*+\delta_2; t^*)\}] \\ q_c(\eta; t) &= \frac{atp}{2\omega_1} [\alpha'e^{1-s_1t^*} \{I_s(s_1-1, \eta^*-s_2, s_2t^*; t^*) \\ &\quad - I_s(s_1-1, \eta^*+s_2, -s_2t^*; t^*)\} \\ &\quad + A\beta'e^{1-s_1t^*} \{I_s(s_1-1, \eta^*-s_2, s_2t^*-\delta_1; t^*) \\ &\quad - I_s(s_1-1, \eta^*+s_2, -s_2t^*+\delta_1; t^*)\} \\ &\quad + B\beta'e^{1-z_1t^*} \{I_s(z_1-1, \eta^*-z_2, z_2t^*+\delta_2; t^*) \\ &\quad - I_s(z_1-1, \eta^*+z_2, -z_2t^*-\delta_2; t^*)\}] \\ \dot{q}_s(\eta; t) &= -\frac{atp}{2\omega_1} [\alpha'\sqrt{A_1^2+\omega_1^2}e^{1-s_1t^*} \{I_c(s_1-1, \eta^*+s_2, -s_2t^*+\varphi_1; t^*) \\ &\quad - I_c(s_1-1, \eta^*-s_2, s_2t^*-\varphi_1; t^*)\} \\ &\quad + A\beta'\sqrt{A_1^2+\omega_1^2}e^{1-s_1t^*} \{I_c(s_1-1, \eta^*+s_2, -s_2t^*+\delta_1+\varphi_1; t^*) \\ &\quad - I_c(s_1-1, \eta^*-s_2, s_2t^*-\delta_1-\varphi_1; t^*)\} \\ &\quad + B\beta'\omega_0e^{1-z_1t^*} \{I_c(z_1-1, \eta^*+z_2, -z_2t^*-\delta_2+\varphi_2; t^*) \\ &\quad - I_c(z_1-1, \eta^*-z_2, z_2t^*+\delta_2-\varphi_2; t^*)\}] \\ \dot{q}_c(\eta; t) &= -\frac{atp}{2\omega_1} [\alpha'\sqrt{A_1^2+\omega_1^2}e^{1-s_1t^*} \{I_s(s_1-1, \eta^*-s_2, s_2t^*-\varphi_1; t^*) \\ &\quad - I_s(s_1-1, \eta^*+s_2, -s_2t^*+\varphi_1; t^*)\} \\ &\quad + A\beta'\sqrt{A_1^2+\omega_1^2}e^{1-s_1t^*} \{I_s(s_1-1, \eta^*-s_2, s_2t^*-\delta_1-\varphi_1; t^*) \\ &\quad - I_s(s_1-1, \eta^*+s_2, -s_2t^*+\delta_1+\varphi_1; t^*)\} \\ &\quad + B\beta'\omega_0e^{1-z_1t^*} \{I_s(z_1-1, \eta^*-z_2, z_2t^*+\delta_2-\varphi_2; t^*) \\ &\quad - I_s(z_1-1, \eta^*+z_2, -z_2t^*-\delta_2+\varphi_2; t^*)\}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.10)$$



$\mu_0(1+\chi)-h\epsilon^2 < 0$  のとき：

$$\begin{aligned}
 q_s(\eta; t) &= \frac{at_p}{2\omega_1} [\alpha' \{e^{1-(s_1-s_2)t^*} I_s(s_1-s_2-1, \eta^*, 0; t^*) \\
 &\quad - e^{1-(s_1+s_2)t^*} I_s(s_1+s_2-1, \eta^*, 0; t^*)\} \\
 &\quad + C\beta' e^{1-z_1 t^*} \{I_c(z_1-1, \omega^*+z_2, -z_2 t^*+\delta_1'; t^*) \\
 &\quad - I_c(z_1-1, \eta^*-z_2, z_2 t^*-\delta_1'; t^*)\}] \\
 q_c(\eta; t) &= \frac{at_p}{2\omega_1} [\alpha' \{e^{1-(s_1-s_2)t^*} \{I_c(s_1-s_2-1, \eta^*, 0; t^*) \\
 &\quad - e^{1-(s_1+s_2)t^*} I_c(s_1+s_2-1, \eta^*, 0; t^*)\} \\
 &\quad + C\beta' e^{1-z_1 t^*} \{I_s(z_1-1, \eta^*-z_2, z_2 t^*-\delta_1'; t^*) \\
 &\quad - I_s(z_1-1, \eta^*+z_2, -z_2 t^*+\delta_1'; t^*)\}] \\
 \dot{q}_s(\eta; t) &= -\frac{at_p}{2\omega_1} [\alpha' (\Delta_1-\omega_1') e^{1-(s_1-s_2)t^*} I_c(s_1-s_2-1, \eta^*, 0; t^*) \\
 &\quad - \alpha' (\Delta_1+\omega_1') e^{1-(s_1+s_2)t^*} I_c(s_1+s_2-1, \eta^*, 0; t^*) \\
 &\quad + C\beta' \omega g e^{1-z_1 t^*} \{I_s(z_1-1, \eta^*-z_2, z_2 t^*-\delta_1-\varphi_2; t^*) \\
 &\quad - I_s(z_1-1, \eta^*+z_2, -z_2 t^*+\delta_1+\varphi_2; t^*)\}] \\
 \dot{q}_c(\eta; t) &= -\frac{at_p}{2\omega_1} [\alpha' (\Delta_1-\omega_1') e^{1-(s_1-s_2)t^*} I_s(s_1-s_2-1, \eta^*, 0; t^*) \\
 &\quad - \alpha' (\Delta_1+\omega_1') e^{1-(s_1+s_2)t^*} I_s(s_1+s_2-1, \eta^*, 0; t^*) \\
 &\quad + C\beta \omega g e^{1-z_1 t^*} \{I_c(z_1-1, \eta^*+z_2, -z_2 t^*+\delta_1+\varphi_2; t^*) \\
 &\quad - I_c(z_1-1, \eta^*-z_2, z_2 t^*-\delta_1-\varphi_2; t^*)\}]
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 I_s(a, b, c; t) &= \frac{1}{(a^2+b^2)^2} [e^{at} \{a(a^2+b^2)t - (a^2-b^2)\} \sin(bt+c) \\
 &\quad - b \{(a^2+b^2)t - 2a\} \cos(bt+c)] + (a^2-b^2) \sin c - 2ab \cos c \\
 I_c(a, b, c; t) &= \frac{1}{(a^2+b^2)^2} [e^{at} \{b \{(a^2+b^2)t - 2a\} \sin(bt+c) \\
 &\quad + \{a(a^2+b^2)t - (a^2-b^2)\} \cos(bt+c)\} + 2ab \sin c + (a^2-b^2) \cos c]
 \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\omega g \omega_2}{[(\Delta_1-\Delta_2)^2 + (\omega_1+\omega_2)^2] \{(\Delta_1-\Delta_2)^2 + (\omega_1-\omega_2)^2\}^{1/2}}, \quad B = \frac{\omega_1 A}{\omega_2} \\
 C &= \frac{\omega g^2 \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)}{[(\Delta_1-\Delta_2-\omega_1)^2 + \omega_2^2] \{(\Delta_1-\Delta_2+\omega_1)^2 + \omega_2^2\}^{1/2}}, \quad t^* = \frac{t}{t_p}, \quad \eta^* = \frac{\eta}{\eta_p} \\
 s_1 &= \Delta_1 t_p, \quad s_2 = \omega_1 t_p, \quad z_1 = \Delta_2 t_p, \quad z_2 = \omega_2 t_p, \quad \varphi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_1}{\Delta_1}\right), \quad \varphi_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_2}{\Delta_2}\right)
 \end{aligned}$$

である。

かくして構造物の応答変位，応答速度等に関する基礎確率量である  $\sigma_x(t)$ ， $\sigma_z(t)$ ， $\rho_{xz}(t)$  が得られるが，本解析においては先述の定数や係数の値を用いるときは  $\mu_0(1+\chi)-h\epsilon^2 > 0$  となり i) の場合となる。そこでこれらの値を用いて応答確率量を図示したのが Fig. 11 と Fig. 12 であるが，図中の Minor, Major は前記と同様にそれぞれ短軸および長軸方向の振動のことである。両図とも入力加速度の r. m. s. のピークになる時刻  $t_p$  と入力加速度の卓越周期  $T_p$  との関係を  $t_p/T_p=2$  と固定しておいて，卓越周期  $T_p$  と表層のせん断 1 次の固有周期  $T_g$  との比を 1 および 2 としたのが前者および後者の図である。また図は上から下に向って，応答変位の r. m. s.  $\sigma_x(t)$ ，応答速度の r. m. s.  $\sigma_z(t)$ ，およびこれらの相関係数  $\rho_{xz}(t)$  を順に並べたものであって， $t/t_p=1$  は入力加速度の強度が最大になる点である。これら両図において，応答変位

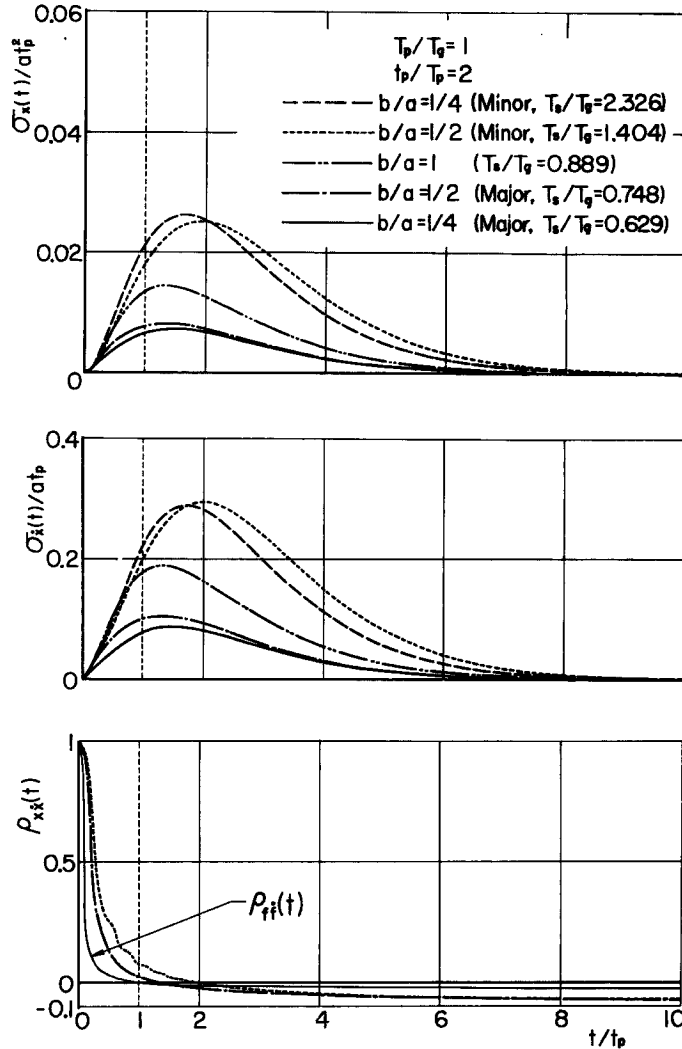


Fig. 11 R. M. S. of responses and correlation coefficients.

および応答速度の r. m. s. のピークが入力加速度のそれよりも遅れ、 $T_p/T_g=1$  の場合の方がその傾向は著しいことが分る。このことは  $T_p/T_g=1$  の場合は表層の共振の影響を強調すると同時に、入力加速度の r. m. s. のピークの時刻  $t_p$  が  $T_g$  の 2 倍と割合接近しているので、表層の共振の影響が時刻  $t_p$  以後にも及んでくるため、応答のピークの位置を遅らせるが、Fig. 12 のように  $T_g$  が  $T_p$  より小さくなると表層の影響があまり後方までは達しなくなるため、構造物の応答の r. m. s. のピークが入力地震動のそれに接近してくるといえる。

またこれらの図の最下段の応答の相関係数  $\rho_{xx}(t)$  については、代表的にその断面が  $b/a=1/2$  の楕円柱の短軸および長軸方向への振動と、これとの比較のため入力加速度と入力加加速度との相関係数  $\rho_{ij}(t)$  ((6.3) 式) を図示した。 $T_p/T_g=1$  の場合では短軸方向の振動では、表層の影響がわずかながら周期的な変動となって現われているが、長軸方向の振動では、逸散減衰の効果を大きく受ける動特性のため、ほとんど変動がなく単調に減少し、 $\rho_{ij}(t)$  により接近してくるので、それだけ応答の r. m. s. の時間変動が入力

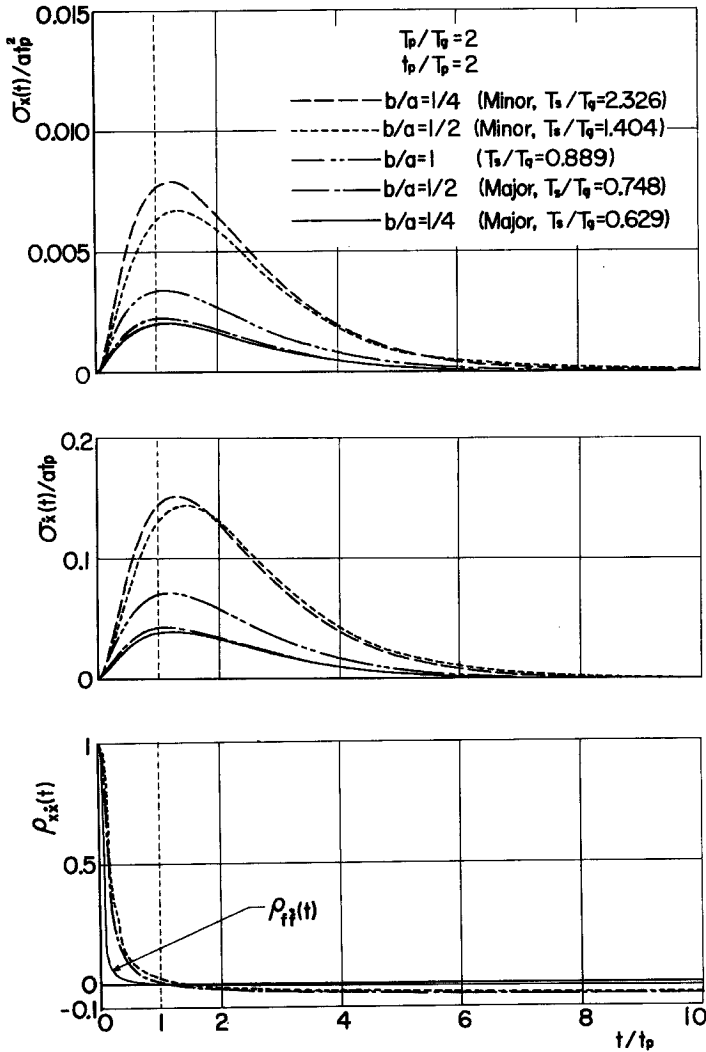


Fig. 12 R. M. S. of responses and correlation coefficients.

加速度のそれに似てくることになり、上記  $\sigma_x(t)$ ,  $\sigma_{\dot{x}}(t)$  の傾向を裏付けている。一方  $T_p/T_q=2$  となると、表層の動特性が強調されないため両振動方向による差はほとんどなくなり、結局これらの相関関係数の傾向は上図応答量の傾向とよく符号していることが分る。さらにまた両振動方向における相関係数が 0 になる時刻が応答のピークとよく一致していることが分る。

さてこのような非定常入力に対する応答の r. m. s. の時間軸上での性質を知ることができたが、これを量的に把握するためある設定レベルを単位時間当りに越える回数および応答の動きが止まるまで ( $t \rightarrow 0 \sim \infty$ ) にそのレベルを越える総回数について考えてみる。ところで入力地震動がガウス分布に従う非定常確率過程とすると、応答量  $x(t)$  および  $\dot{x}(t)$  もまたガウス分布に従う非定常確率過程と考えられる。そこでこれら応答量  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  に関する 2 次元同時確率密度関数を  $p(x, \dot{x}; t)$  とすると、応答変位の絶対値  $|x(t)|$  がある設定レベル  $A$  を単位時間当りに超過する平均回数  $m(A; t)$  を Rice<sup>3)</sup> の理論を応用して次の関係をうる。すなわち、ある微小時間間隔  $t$  と  $t+dt$  の間に設定レベル  $A$  を応答が外向きに超過するとすれば

$$m(A; t)dt = \int_0^A \int_{A-\dot{x}dt}^A \dot{p}(x, \dot{x}; t) dx d\dot{x} + \int_{-\infty}^0 \int_{-A}^{-A-\dot{x}dt} \dot{p}(x, \dot{x}; t) dx d\dot{x}$$

$$= 2dt \int_0^{\infty} \dot{x} p(A, \dot{x}; t) d\dot{x}$$

という関係が成り立つ。したがって、上式の積分を遂行することにより  $m(A; t)$  は次式ようになる。

$$m(A; t) = \frac{\sqrt{1-\rho_{xx}^2}}{\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{A}{\sigma_x}\right)^2\right\} \left[ \exp\left\{-\frac{\rho_{xx}^2}{2(1-\rho_{xx}^2)} \frac{A}{\sigma_x}\right\} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho_{xx}}{\sqrt{1-\rho_{xx}^2}} \frac{A}{\sigma_x} \left\{1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\rho_{xx}}{\sqrt{2(1-\rho_{xx}^2)}} \frac{A}{\sigma_x}\right)\right\}\right] \dots\dots\dots(3.12)$$

ここに、 $\operatorname{erf}(\ )$  は error function の略である。ところで構造物が運動を開始してから静止するまでに設定レベル  $A$  を超過する総回数  $M(A)$  は  $m(A; t)$  と時間軸とで囲む面積のことであるから

$$M(A) = \int_0^{\infty} m(A; t) dt \dots\dots\dots(3.13)$$

として得られるが、これは設定レベル  $A$  を越える回数の期待値のことであって、応答全体に概略的な見通しを与える量であるが、応答の入力地震動に対する追従性に関する情報は消し去られる。

そこで Figs. 11 および 12 の応答量に対する  $m(A; t)$  と  $M(A)$  に関しての数値計算結果が Figs. 13 および 14 である。Fig. 13 の  $T_p/T_q=1, 2$  の両図とも前出の Figs. 11, 12 の非定常性の傾向をよく示しており、そのピークの位置もほとんど一致しているようである。このように  $m(A; t)$  の一般的傾向としては、応答量についてかなり鋭い対応をするが、応答変位の r. m. s. に関して短軸方向の振動において  $b/a=1/4$  の方が  $b/a=1/2$  の場合より大きいにもかかわらず、 $m(A; t)$  はその関係が逆転しているように、必ずしも応答量の大小関係を反映するものではないことに注意する必要がある。このような現象は構造物の固有周期  $T_s$  の大小関係が密接に関係しているものと思われる。

次にレベルを超過する総回数  $M(A)$  について Fig. 14 で見ると、 $T_p/T_q=1$  の表層の共振を強調するときは Fig. 11 の応答の r. m. s. や Fig. 13 上図の  $m(A; t)$  の傾向と割合対応しているが、短軸方向の

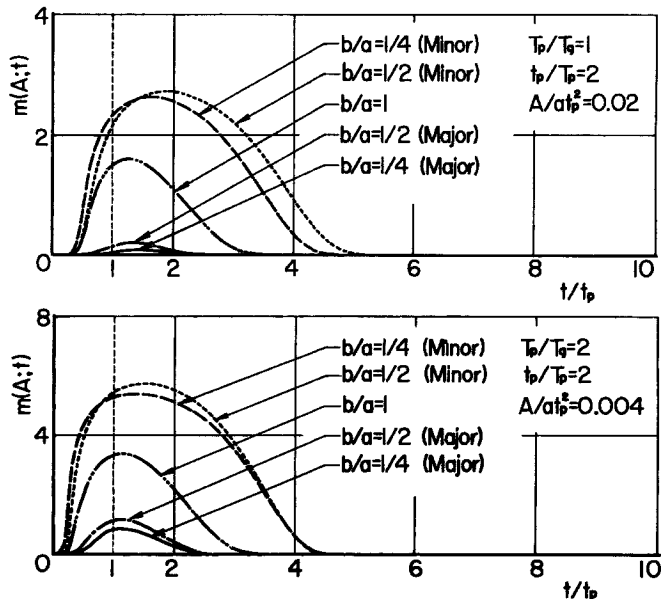


Fig. 13 Rate of threshold crossings of level A per unit time.

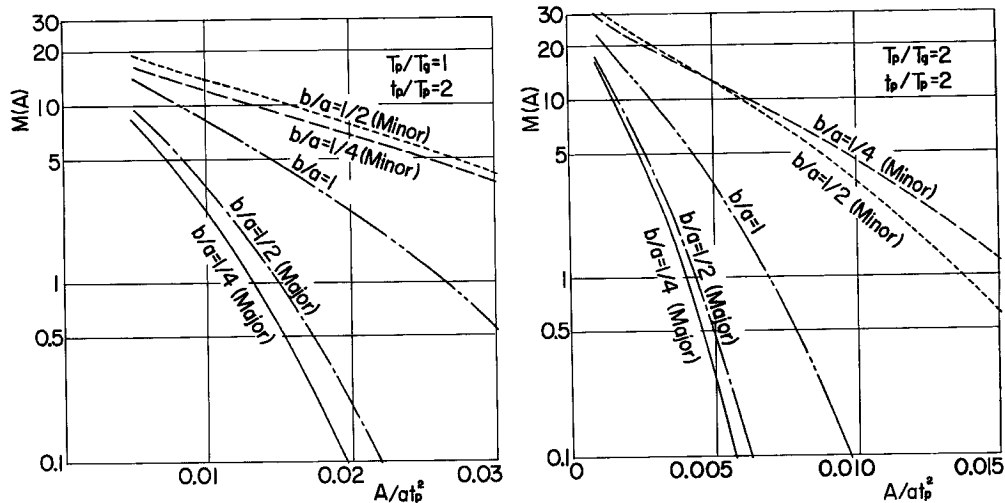


Fig. 14 Expected number of threshold crossings of level A.

振動で  $\sigma_x(t)$ ,  $\sigma_z(t)$ ,  $m(A;t)$  の最大値が  $b/a=1/2$  と  $b/a=1/4$  の場合とでは大差ないにもかかわらず、レベル超過期待回数  $M(A)$  は設定レベルにほとんど関係なく  $b/a=1/2$  の方が  $b/a=1/4$  の場合よりも大きいことが分る。これは主として前者の方が後者よりも固有円振動数が高いため、それだけ設定レベルを超過する頻度が大きいことからくるものであろう。一方  $T_p/T_g=2$  の場合において、短軸方向の振動では設定レベルが高くなると  $b/a=1/4$  が  $b/a=1/2$  の場合より大きい、設定レベルが低いとその関係が逆転していることが分る。このことは Fig. 12 の応答変位の r. m. s. がピークの周辺において、短軸方向の振動における  $b/a=1/4$  の場合は  $b/a=1/2$  の場合より大きいという傾向とよく対応している。

このように、設定レベルを単位時間当りに超過する回数  $m(A;t)$  と応答全体を通じての認定レベル総超過回数  $M(A)$  は、短軸方向の振動における方が長軸方向のそれよりも大きいことが分るが、 $m(A;t)$  のピークの大小が  $M(A)$  の大小とは必ずしも対応するわけではなく、これら2つの量を同時に検討しなければ、応答全体としての評価はなされないといえよう。

#### 4. 結 語

本研究は先におれわれが行なった、弾性地盤中に埋設された剛な楕円柱のロッキング振動に関する周波数応答解析結果を非正常不規則地震動へ適用を試みたものである。数値計算に当っては先の解析結果との対応という観点から、本研究で定めるべき定数以外のそれらはすべて周波数応答解析において用いたものを準用した。非正常不規則外力を受ける楕円柱のロッキング振動に関して得られた成果は次のように要約される。

- (1) 波動の地下逸散減衰を考慮すると、楕円柱の固有円振動数が表層のせん断1次のそれより比較的大きい長軸方向の振動では、単位衝撃応答関数は応答を縮小せしめ、短軸方向の振動では逆に応答を増幅するような動特性が与えられる。
- (2) 応答変位の r. m. s. の挙動は、周波数応答の動特性と割合よく対応していて、断面が扁平なほど短軸方向の振動では大きく長軸方向の振動では小さい。
- (3) 基盤入力加速度の卓越周期が表層地盤のせん断1次の固有周期に同調すると、構造物の応答の r. m. s. のピークが入力地震加速度の r. m. s. のピークよりかなり遅れ、その傾向は短軸方向の振動の方が著しいが、両周期が相離れるときは応答の r. m. s. のピークは入力地震加速度のそれに接近してくる。
- (4) 単位時間当りに応答変位がある設定レベルを超過する回数は、応答変位の r. m. s., 応答速度の

r. m. s. の傾向と同様に、短軸方向の振動の方が長軸方向のそれより大きい、その大小関係は応答変位の r. m. s. のそれとは必ずしも対応しない。

(5) 応答が設定レベルを超える回数の期待値については、総じて短軸方向の振動の方が長軸方向の場合より大きい、入力地震加速度の卓越周期が表層のせん断1次固有周期と一致するときは、短軸方向の振動では断面が扁平なほど小さいが、両周期が一致しないときは設定レベルが極端に小さくない限りその大小関係は逆になる。

以上が本研究における成果の要約であるが、ここでは入力加速度として確定関数と任意のスペクトル構造を持たせうる定常確率過程との積でもって非定常確率過程を表現する手法を応用したが、この場合時間が無限大になっても入力速度は0にならないという問題点が残る。この点を改良して、入力速度を確定関数と定常確率過程との積として表現して、ばね-dash pot という簡単な1自由度系について適用した研究<sup>6)</sup>もあり、われわれも今後はかかる入力のとり方についても検討を行なわなければならないであろう。また周波数応答を近似的な式で置き換えるときに、若干の定数・係数を決定しなければならないが、本研究では周波数応答倍率が合うように大まかな数値を与えたが、さらに合理的な値についての検討が残されている。

最後に本研究における数値計算はすべて京都大学大型電子計算機 (FACOM 230-60) によったことを付記する。

#### 参 考 文 献

- 1) 田治見宏：深い基礎を有する構造物の地震応答について、日本地震工学シンポジウム (1966) 講演集, 1966.11, pp.255~260.
- 2) 後藤尚男・土岐憲三・秋吉卓：弾性地盤中にある楕円形基礎の振動性状, 京都大学防災研究所年報, 第11号A, 昭43.3, pp.255~274.
- 3) 後藤尚男・秋吉卓：弾性地盤中にある基礎構造物の地震応答解析, 土木学会論文集に投稿中.
- 4) 土岐憲三：地震動のシミュレーションとその応用, 京都大学防災研究所年報, 第11号A, 昭43.3, pp.291~303.
- 5) Rice, S. O.: Mathematical Analysis of Random Noise, Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, Dover, 1943, pp.133~317.
- 6) Freudenthal, A. M.・篠塚正宣：Probability of Structural Failure under Earthquake Acceleration, 土木学会論文集, 第118号, 昭40.6, pp.9~15.