

# 粘土の動的弾性係数に関する理論的考察

村山朔郎・関口秀雄

## THEORETICAL CONSIDERATION ON THE DYNAMIC ELASTIC MODULI OF CLAY

By *Sakuro* MURAYAMA and *Hideo* SEKIGUCHI

### Synopsis

In this paper, the dynamic viscoelastic properties of clay under the load of low frequency are theoretically investigated. The authors analysed the effect of frequency and temperature on elasticity of clay by introducing a relaxation spectrum. This spectrum was adopted as a box type distribution by referring to the results of stress relaxation tests on clay samples.

Principal results obtained from their analysis are as follows;

(1) The dynamic elastic modulus of clay increases linearly with increase of logarithm of angular velocity.

(2) Elasticity of clay decreases in hyperbolic relation with increase of temperature not only because of time scale effect but the change of inherent nature of clay structure. Moreover, the dependence of elasticity of clay on the applied stress amplitude is discussed considering a change in clay structure.

### 1. ま え が き

動態時における土の挙動は、地震時の挙動をはじめとして機械基礎、交通荷重、爆発物によるパルスを受ける地盤の力学的特性として工学的見地からみて重要であるため、最近では非常に多くの研究が行なわれつつあるが、粘性土の動的弾性係数の周波数特性や圧力依存性あるいはエネルギー減衰や温度効果に関する研究は未だ少ないようであり、ここではこれらについて若干の理論的考察を行ないたいと思う。ところで周期的な負担を受ける材料の力学的挙動を研究しようとする際、種々の波形の負荷が考えられるが、この研究においては最も取扱いが容易である正弦波を想定すると同時に、その周波数に関しては地震波が 1 c. p. s. 機械基礎が受ける応力波が 10 c. p. s. のオーダーであることを考慮し、比較的低周波数領域における粘性土の動的挙動をレオロジー的な立場から考察することにする。

### 2. 粘土のレオロジー的特性

村山<sup>1)</sup>は粒子のモビライズ機構に統計的手法を導入し、弾性状態の砂のせん断挙動に関する構成方程式を次式のように求めた。

$$\gamma = A_e \cdot W \cdot Z \quad \dots \dots \dots (1)$$

ここに、

$$A_e = c \cdot \lambda_e \cdot \frac{N}{d}, \quad W = \frac{1}{4} \cos \frac{\theta + \delta}{2}, \quad Z = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_m}, \quad \sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + 2\sigma_3)$$

さらに  $\gamma$  は砂の最大せん断ひずみ,  $A_e$  は変位係数,  $W$  は構造係数,  $Z$  は応力比,  $c$  は1個の粒子のモビライゼーションが砂の巨視的ひずみに寄与する割合を表わす係数,  $\lambda_e$  は粒子の平均的変位をすべり面へ射影した成分,  $N$  は砂のマスの単位面積に存在する粒子の数,  $d$  は平均の粒子間距離,  $\theta$  は粒子がモビライズされる方向とすべり面とがなす角,  $\delta$  は砂の粒子間摩擦角,  $\sigma_m$  は平均主応力,  $\sigma_1$  は最大主応力,  $\sigma_3$  は最小主応力でありこの場合, 中間主応力  $\sigma_2$  は  $\sigma_3$  に等しい。

さて, 粘土の構造に目を向けると, 一般に粘土はその周囲を吸着二重水層によって取り囲まれた粒子が拡散イオン層を媒介としてランダムに累積した構造を形成しており, 粘土粒子がモビライズされる際には, 土粒子は水膜とともに一体となって挙動することになる, それゆえ, 粘土は粘土粒子を内蔵した水塊のランダムな集合体であると仮定でき, この概念によって粘土の力学的挙動を砂の挙動のアナロジーとして取扱うことができよう。しかし, 粘土粒子間に作用する粒子間力は, 加えられた外的応力によるものだけでなく, 物理化学的な相互作用によるものにも起因しているため, いま後者の物理化学的な粒子間結合力を力学的な等方圧  $\sigma_0$  と等価であると考えれば, 粘土の場合には応力比として次式の表現が適切であろう。

$$Z = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_m' + \sigma_0} \quad \dots\dots\dots(2)$$

ここに,  $\sigma_m'$  は平均有効主応力である。(2)式を(1)式に代入したものは, 長時間の応力の作用によって粘土が到達する終極の状態(このとき粒子間粘性抵抗は消失している)における応力-ひずみ関係を表現しているため, 粘土のせん断変形の時間依存性を表現するには, 遅延関数  $\phi(t)$  を導入し次式のように書き直せばよい。

$$\gamma(t) = A_e \cdot W \cdot Z \cdot \phi(t) \quad \dots\dots\dots(3)$$

ここに,  $\phi(t)_{t=0} = 0, \phi(t)_{t \rightarrow \infty} = 1$  である。粘土粒子がモビライズされる過程において, 粒子は吸着二重水層の粘性抵抗および粒子間に作用する引力と反発力の不均衡に起因するみかけの弾性抵抗も受ける。またモビライズされる粒子に分配される力の大きさが, 粘土に加えられた応力と近似的に対応すると仮定し, さらに粒子配列および粒子間力の分布がランダムであると仮定すると, このとき粘土の流動特性を表現するクリープコンプライアンス  $f(t)$  は遅延スペクトル  $M(\ln \lambda)$  によって, 次式のように表わされる。(  $\lambda$  は遅延時間)

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} M(\ln \lambda) (1 - e^{-t/\lambda}) d \ln \lambda \quad \dots\dots\dots(4)$$

そして,  $f(t)$  と  $\phi(t)$  との間には次式の関係がある。

$$\phi(t) = \frac{f(t)}{f(t)_{\infty}} \quad \dots\dots\dots(5)$$

ここに,

$$f(t)_{\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} M(\ln \lambda) d \ln \lambda$$

である。したがって, (3)式は形式的には全く線型粘弾性体の遅延関数系の理論と一致するわけである。

### 3. 弾性係数の周波数依存性

2.において粘土の流動特性が線型粘弾性理論と同じ形を有する(3)式によって説明できることを述べたが, この式は, 静的な実験結果を基礎にして誘導したものであり振動応力が作用する場合の挙動に関しては, まだ不確定的要素が残されている。そこで, 非常に形式的ではあるが等方等質粘弾性体に関する Duhamel の式を改めて導入し, 振動応力を受けた場合の粘土の挙動を論じることとする。せん断変形に関しては次式が成立する<sup>2)</sup>。

$$e_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t J(t-\tau) \frac{ds_{ij}}{d\tau} d\tau \quad \dots\dots\dots(6)$$

ここに,  $e_{ij}$  は偏差ひずみテンソル,  $s_{ij}$  は偏差応力テンソル,  $J(t)$  は余効関数である。いま, 応力テンソ

ルを  $\sigma_{ij}$ , ひずみテンソルを  $\varepsilon_{ij}$  とかくと次式の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij} - \frac{\delta_{ij} \cdot \sigma_{kk}}{3} \\ \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij} - \frac{\delta_{ij} \cdot \varepsilon_{kk}}{3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $\delta_{ij}$  は Kronecker delta である。また  $J(t)$  は先述の  $f(t)$  と次の関係がある。

$$J(t) = J_\infty + \frac{t}{\eta} + f(t) \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 $J_\infty$  は瞬間変形に対応するコンプライアンス、 $\eta$  はニュートン粘性率である。いま、非排水状態で周圧一定、軸圧振動という状況を設定すると、次の関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{kk} &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0 \quad (\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}) \\ \sigma_{kk} &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_m \quad (\sigma_{22} = \sigma_{33}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

したがって軸方向に関しては次式の関係が成立する。

$$\varepsilon_{11} = \int_{-\infty}^t J(t-\tau) \frac{d\sigma_{11}}{d\tau} d\tau = \frac{2}{3} \int_{-\infty}^t J(t-\tau) \frac{d(\sigma_{11} - \sigma_{33})}{d\tau} d\tau \dots\dots\dots (10)$$

通常の動的三軸試験において測定されるものは、軸ひずみ  $\varepsilon_{11}$ , 周圧  $\sigma_{33}$  および主応力差  $(\sigma_{11} - \sigma_{33})$  であるから (10) 式を用いればよいことになる。以下簡単のために、 $\varepsilon = \varepsilon_{11}$ ,  $\sigma_1 = \sigma_{11}$ ,  $\sigma_3 = \sigma_{33}$  とかくことにす。さて主応力差が正法的に変動する場合、すなわち次式関係を満足する場合を考える。

$$(\sigma_1 - \sigma_3)(t) = \frac{3}{2} \sigma_{am} \sin \omega t \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 $\sigma_{am}$  は応力振幅、 $\omega$  は角速度である。(11) 式を (10) 式に代入し、複素コンプライアンス  $J^*(i\omega)$  を導入すれば次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(t) &= J^*(i\omega)(\sigma_1 - \sigma_3)(t) \\ J^*(i\omega) &= J_1(\omega) - iJ_2(\omega) \\ \phi(t) &= J_1(\omega) \sin \omega t - J_2(\omega) \cos \omega t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

弾性係数を議論する場合には、上式を取扱うより複素弾性率  $G^*(i\omega)$  を用いて緩和系として次式のように書き直す方が便利である。

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_1 - \sigma_3)(t) &= G^*(i\omega)\varepsilon(t) \\ G^*(i\omega) &= \frac{1}{J^*(i\omega)} = G_1(\omega) + iG_2(\omega) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ここに、 $G_1(\omega)$  は動的弾性率、 $G_2(\omega)$  は動的損失率である。このままの形では議論が進まないで、線型粘弾性を論じるには最も取扱いが簡単である緩和スペクトル  $H(\ln\tau)$  によって  $G_1(\omega)$ ,  $G_2(\omega)$  を表現すると、これはスチルチェス変換によって次式のように書ける<sup>3)</sup>。

$$G_1(\omega) = G_e + \int_{-\infty}^{\infty} H(\ln \tau) \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} d \ln \tau \dots\dots\dots (14)$$

$$G_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\ln \tau) \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} d \ln \tau \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 $G_e$  は平衡弾性率である。緩和スペクトル  $H(\ln\tau)$  について少しふれておくと、緩和時間  $\tau$  が  $\ln \tau$  と  $\ln \tau + d(\ln \tau)$  との間に存在する機構が持っている弾性率が  $H(\ln \tau)d(\ln \tau)$  で表わされるわけで、 $H(\ln \tau)$  はこれらの機構が巨視的な弾性率に寄与する割合を表わしている。さて粘土の緩和スペクトルについてであるが、広範なタイムスケールにわたって求められた例は少ないが、従来の粘土の応力緩和実験<sup>4)</sup>によれば、応力が  $\log t$  に関して直線的に減少し、ある有限の平衡弾性率を持つ場合が多いので、粘土の特性関数として箱型の緩和スペクトルの分布を仮定することができる。このことは応力緩和関数  $G(t)$  と緩和スペクトルとの間に次式の近似的な関係<sup>3)</sup>があることから明らかである。

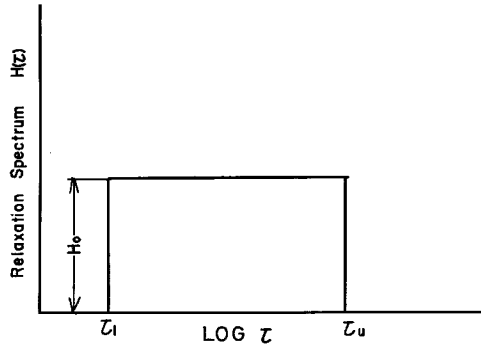


Fig. 1 Box type distribution of relaxation spectrum.

$$H(\ln \tau) \simeq - \left. \frac{dG(t)}{d \ln t} \right|_{t=\tau} \dots\dots\dots(16)$$

いま緩和スペクトルの箱型分布を次式で表わす (Fig. 1)。

$$\left. \begin{aligned} H(\ln \tau) &= H_0 & \tau_l \leq \tau \leq \tau_u \\ H(\tau) &= 0 & \tau < \tau_l, \tau > \tau_u \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

ここに、 $\tau_u$  は最大緩和時間、 $\tau_l$  は最小緩和時間である。(17) 式を (14) 式、(15) 式に代入すると、次式の関係が得られる。

$$G_1(\omega) = G_e + H_0 \int_{\tau_l}^{\tau_u} \frac{\omega^2 \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} d\tau = G_e + H_0 \ln \frac{1 + \omega^2 \tau_u}{1 + \omega^2 \tau_l} \simeq G_e + H_0 (\ln \omega + \ln \tau_u) \dots\dots\dots(18)$$

$$G_2(\omega) = H_0 \int_{\tau_l}^{\tau_u} \frac{\omega}{1 + \omega^2 \tau^2} d\tau = H_0 [\tan^{-1} \omega \tau_u - \tan^{-1} \omega \tau_l] \simeq H_0 \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\omega \tau_u} \right] \dots\dots\dots(19)$$

$H_0$  および  $\tau_u$  が角速度に依存しない場合には、 $G_1(\omega)$  は  $\omega$  の対数に関して直線的な関係があり、 $G_2(\omega)$  は角速度に依存せず一定か、あるいは漸増する傾向を示すことが期待されるが、このことを中崎の実験結果によって確かめてみることにする。中崎<sup>9)</sup> は動的三軸試験装置を用いて、人工的再圧密粘土試料に対し、一連の動的試験を行なったが、応力振幅一定、角速度変化の実験結果をここに引用してみたい。軸方向の静的な応力  $(\sigma_1 - \sigma_3)_s$  が正規圧密粘土に非排水状態で作用させられて5分後に振動応力  $(\sigma_1 - \sigma_3)_{am}$  が加えられた。そして  $(\sigma_1 - \sigma_3)_{am}$  が一定に保たれた状態で、段階的に周波数  $f$  が 1 c. p. s から 10 c. p. s まで増加させられた後、逆にまた 1 c. p. s まで段階に下げられた。各段階は6分間であり、ひずみ振幅については  $f$  の増加時に減少時とでほとんど差はみられなかったと報告されている。そしてこのとき次式で定義される弾性係数  $G_d$  が  $f$  の増加につれて増大すると述べられているが、この関係を  $G_1 \sim \omega$ 、 $G_2 \sim \omega$  関係に再整理したものが Fig. 2 である。

$$\left. \begin{aligned} G_d &= \frac{\sigma_{am}}{\varepsilon_{am}} = |G^*(i\omega)| \\ G_1 &= G_d \cos \delta, \quad G_2 = G_d \sin \delta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

ここに、 $\delta$  は応力とひずみとの位相差である。Fig. 2 からほぼ (18) 式、(19) 式の関係が成立することが認められるが、 $(\sigma_1 - \sigma_3)_s$  あるいは  $\sigma_3$  の影響を考慮していないために定量的に論じることはできない。 $G_d$  から  $G_1$  あるいは  $G_2$  を求めるためには  $\delta$  の測定が必要であるが、これは応力のピークとひずみのピークとの時間差を  $\Delta t$  とすれば、 $\omega \Delta t$  によって求められる。あるいは1サイクルあたりのヒステリシスループの面積をプランメーターによって測定すれば、次式<sup>9)</sup>によって求めることもできる。

$$\sin \delta = \frac{[S]}{\pi \sigma_{am} \varepsilon_{am}} \dots\dots\dots(21)$$

ここに、 $[S]$  はヒステリシスループの面積である。前述の結果は、形式的な色彩が濃いのでもう少し説明

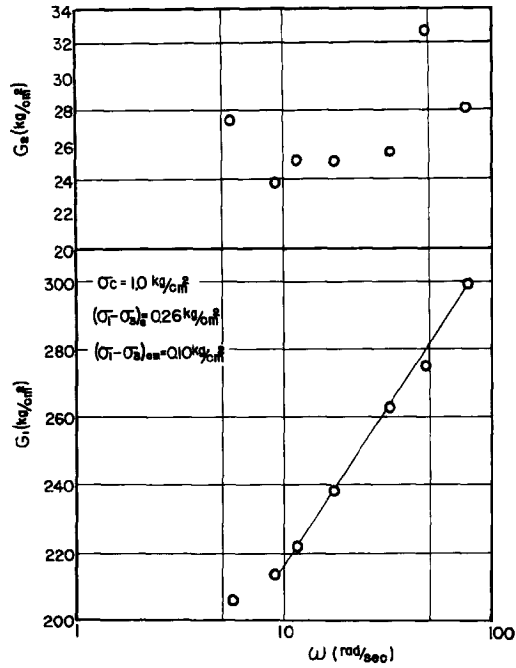


Fig. 2-(a) Experimental relationships of  $G_1-\omega$  and  $G_2-\omega$ .

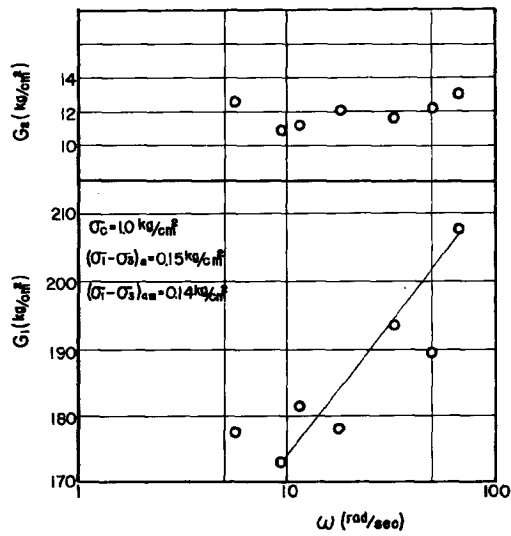


Fig. 2-(b) Experimental relationships of  $G_1-\omega$  and  $G_2-\omega$ .

を加えてみたい。粘土の粒子間結合は Van der Waal 力などの比較的弱い結合であって、エネルギー障壁の高さは金属結晶ほどではない。ポテンシャルの低い山や浅い谷が不規則に混じっているような内部構造を持っていると考えられる。したがって応力の作用によって、一応各粒子は弾性的変位をするわけであるが、容易にポテンシャルの山を越えて、次の平衡位置へ移動しうる粒子も多数存在すると考えられる。粒子が次の平衡位置へ移動してしまえば弾性応力は緩和し、粘性流動に変化するわけであるが、振動実験のような急速な観察に対しては粒子は緩和するひまがないためみかけの弾性係数が増加するわけである。したがって、動的方法で測定される粘弾性は粒子の平衡位置付近での往復的变化に関するものと考えることができるだろう。

#### 4. 弾性係数の温度依存性

いま、粘土には無数の変形機構が存在し、緩和時間の連続的な分布が形成されているものとする。ここでいう変形機構とは、吸着二重水層によって被覆された粘土粒子あるいは粒子群を意味している。第  $i$  種の変形機構が、一つの平衡位置から他の平衡位置へ移動するために、 $\Delta F_i^\ddagger$  だけのポテンシャルの山を越す必要があるとすれば、この変形機構が温度  $T^\circ\text{K}$  のときに、このポテンシャル障壁を越えて単位時間に遷移する確率は、次式で与えられよう。

$$P_i = \exp\left(-\frac{\Delta F_i^\ddagger}{\kappa T}\right) \dots\dots\dots(22)$$

ここに、 $\kappa$  は Boltzmann 定数 ( $1.38 \times 10^{-16} \text{ erg} \cdot \text{deg}^{-1}$ ) である。したがって、ある任意の変形機構が次の平衡位置へ遷移するに要する平均の時間  $\tau_{0i}$  はその逆数に比例し、次の形で書けるであろう<sup>9)</sup>。

$$\tau_{0i} = A \exp\left(\frac{\Delta F_i^\ddagger}{\kappa T}\right) \dots\dots\dots(23)$$

ここに、 $A$  は比例定数である。いま、この微視的緩和時間  $\tau_{0i}$  と巨視的な Maxwell モデルの緩和時間  $\tau_i$  とが対応するものと考えれば次式が得られる。

$$\tau_i = B \exp\left(\frac{\Delta F_i^\ddagger}{\kappa T}\right) \dots\dots\dots(24)$$

ここに、 $B$  は比例定数である。

変形機構を支配する活性化エネルギーが連続的な分布<sup>9)</sup>をしていると考えられる場合には (14) 式において、添字の  $i$  を除くことができる。このとき、最大緩和時間  $\tau_u$  では次式のように表現することができる。

$$\tau_u = B \exp\left(\frac{\Delta F_u^\ddagger}{\kappa T}\right) \dots\dots\dots(25)$$

ここに、 $\Delta F_u^\ddagger$  は最も高いエネルギー障壁を表わしている。(25) 式を (18) および (19) 式に代入すると次式の関係が得られる。

$$G_1(\omega) = G_e + H_0 \left( \ln \omega + \ln B + \frac{\Delta F_u^\ddagger}{\kappa T} \right) \dots\dots\dots(26)$$

$$G_2(\omega) = H_0 \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\omega B} \exp\left(-\frac{\Delta F_u^\ddagger}{\kappa T}\right) \right] \dots\dots\dots(27)$$

減衰の小さい場合には  $G_d \approx G_1(\omega)$  であるから動的弾性係数の温度依存性は (26) 式によって説明することができる。しかし、ここまでの議論では粘土の構造骨格の弾性がエネルギー弾性であることを暗黙のうち仮定していたが、粘土の応力緩和の実験データから判断すると、必ずしも理想的なエネルギー弾性ではなく温度依存性を示すようであるので、これについて以下に考察を加えることにする。

村山・飯田<sup>9)</sup>は粘土骨格の力学モデルに用いられた諸力学要素の温度依存性を明らかにするため、乱さない洪積層粘土を用いて一連の応力緩和実験を行なったが、ここにその一部を紹介する。初期ひずみ  $\epsilon_0$  をパラメーターにした応力緩和速度と温度との関係に注目すると、(16) 式から明らかなように、これから緩和スペクトルの温度依存性を知ることができる。いま、応力が  $\log t$  に関してほぼ直線的に減少するという結

果を考慮すれば、Fig. 3 の関係は  $H_0$  と  $T$  との関係を表現していると解釈できる。すなわち、 $H_0$  は温度の増加につれてほぼ双曲線的に減少する傾向が認められる。 $T$  と  $\theta$  との間には次式の関係がある。

$$T = \theta + 273 \quad \dots\dots\dots(28)$$

いま、応力緩和の実験から求めた次式で定義される瞬間弾性率  $G_\infty$  について考察する。

$$G_\infty = \frac{\sigma_{t=0}}{\epsilon_0} \quad \dots\dots\dots(29)$$

$G_\infty$  と緩和スペクトルとの関係は次式で与えられる。

$$G_\infty = G_e + \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau) d \ln \tau = G_e + \int_{\ln \tau_l}^{\ln \tau_u} H_0 d \ln \tau = G_e + H_0 [\ln \tau_u - \ln \tau_l] \quad \dots\dots\dots(30)$$

最小緩和時間  $\tau_l$  についても (25) 式と同じ関係が成立すると仮定すると次式が得られる。

$$\ln \tau_u - \ln \tau_l = \frac{c(\Delta F_u^\ddagger - \Delta F_l^\ddagger)}{kT} \quad \dots\dots\dots(31)$$

ここに、 $\Delta F_l^\ddagger$  は最も低いエネルギー障壁、 $c$  は比例定数である。(31) 式の関係と  $H_0 \sim T$  の実験結果から、 $(G_\infty - G_e)$  はほぼ温度の増加につれて双曲線的に減少するものと思われる。

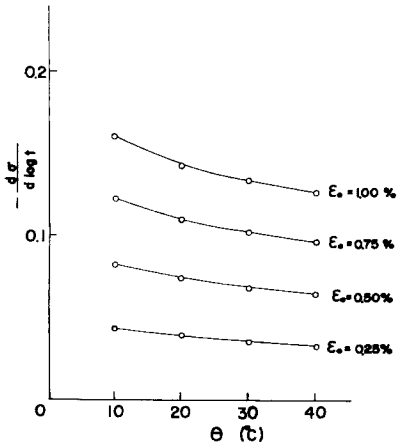


Fig. 3 Relationship between rate of stress relaxation and temperature.

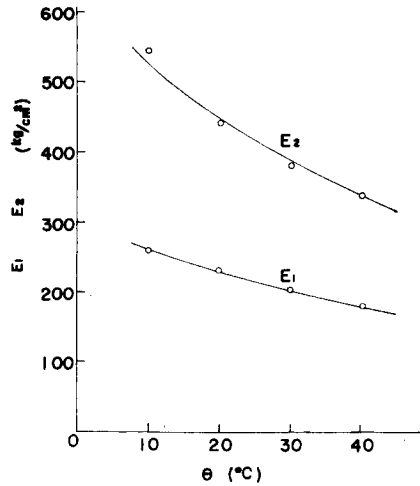


Fig. 4 Relationship between elastic moduli of mechanical model and temperature.

村山・柴田<sup>10)</sup>は粘土の粘弾性挙動を解析するため四要素モデルを導入したが、それらのモデル常数と  $G_\infty$ 、 $G_e$  との関係はスライダーが無視できるものとすれば次式のように表わせる。

$$\left. \begin{aligned} G_\infty &= E_1 = \frac{\sigma_{t=0}}{\epsilon_0} \\ G_e &= \frac{(E_1 + E_2)}{E_1 E_2} = \frac{\sigma_{t \rightarrow \infty}}{\epsilon_0} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(32)$$

したがって  $(G_\infty - G_e)$  は次式のように表現できる。

$$G_\infty - G_e = \frac{E_1}{1 + \frac{E_2}{E_1}} \quad \dots\dots\dots(33)$$

また、最近村山<sup>11)</sup>は  $E_2/E_1$  がほぼ一定の値2をとることを応力緩和実験から求めているが、この結果を(33)式に用いると次式の関係が得られる。

$$G_{\infty} - G_e = \frac{E_1}{3} = \frac{E_2}{6} \dots\dots\dots(34)$$

Fig. 4 に  $E_1, E_2 \sim \theta$  関係を示したが、先述のことはほぼ満足されているようである。 $H_0$  の温度依存性について実験事実から論及したが、これについて若干の補足をすると、緩和スペクトルと緩和時間の分布関数  $F(\tau)$  との間には次式の関係がある。

$$H(\ln \tau) = F(\tau)\tau = H_0 \quad \tau_l \leq \tau \leq \tau_u \dots\dots\dots(35)$$

温度の変化による緩和時間の変化は (24) 式によって表現されているわけであるが、この関係は観測のタイムスケールを変化させる、すなわち reduced time という概念<sup>12)</sup>によって考慮することができるわけで、みかけ上は (35) 式における  $\tau$  を温度変化後もそのまま用いてよい。したがって、 $H_0$  が温度依存性を示すことは  $F(\tau)$  が温度に依存することに帰せられるわけである。 $F(\tau)$  は物理的には弾性率の存在密度を表わしているが、この温度依存性について確かなことはいえないが次のような解釈を与えてもそう大きな誤りはないと思われる。粘土の構造骨格は応力の作用によって変化しようとし、粒子間距離も変化しようとするがこのとき粒子を元の位置へ回復させようとする弾性的回復力  $f$  は粒子間ポテンシャル  $U$  と次式の関係がある<sup>13)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} f &= -\frac{\partial U}{\partial \lambda} \\ U &= U_a + U_r \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

ここに  $\lambda$  は粒子間の平衡距離、 $U_a$  は Van der Waal 力などの結合に起因するポテンシャル、 $U_r$  は静電的な斥力に起因するポテンシャルである。いま温度が上昇した場合を考える。Lambe<sup>14)</sup> によれば反発力のほうが引力よりも環境の変化に敏感であって、温度の上昇とともに flocculation が進行し反発力は減少すると述べられている。したがって、温度の上昇とともに弾性回復力は減少しこの弾性回復力と粒子の微視的変位との比例定数として求められる微視的弾性率も減少し、これが先述の巨視的弾性率の存在密度  $F(\tau)$  の温度とともに減少する傾向と結びつくのではないかと思われる。これについては今後更に研究しなければならない。

## 5. 弾性係数におよぼす応力振幅の影響

3. およば 4. において動的弾性係数の周波数依存性および温度依存性について線型粘弾性理論を基礎にして考察したが、この節では非線型の現象である応力振幅の弾性係数におよぼす影響について、線型粘弾性理論とは別の観点から若干の考察を行ないたい。粘弾性体に周期的な応力が作用する時には、ひずみも周期的な変動をするが、位相は常に応力よりも遅れ力学的エネルギーの一部は熱エネルギーに変換され散逸することが知られている。村山・中崎・福岡<sup>15)</sup>は粘土の動的弾性係数の応力依存性およびエネルギー減衰特性を研究するため、人工的再圧密粘土試料に対し一連の振動三軸試験を行なったが、そのなかから周波数一定 (11c.p.s.)、応力振幅変化の実験結果を粘土のヒステリシスループの例として Fig. 5 に示す。最も内側のループをサイクル No.1 とし、最も外側のループをサイクル No.7 とよぶことにする。Fig. 5 においてサイクル No.1 とサイクル No.2 はほぼ相似形であるが、サイクル No.3 以上のものは次第にその形がくずれて水平にねてきていることが明らかである。

応力振幅とひずみ振幅とによって定義される  $G_d$  と最大の主応力差  $(\sigma_1 - \sigma_3)_{max}$  との関係を図 6 に示したが、これから明らかなのは  $G_d$  は  $(\sigma_1 - \sigma_3)_{max}$  が 0.247 kg/cm<sup>2</sup> を越えるあたりから急激に減少する傾向を示すに対し、それ以下の応力レベルでは応力に依存しない傾向を示していることである。実験に用いられた試料は圧密応力  $\sigma_c = 1.0$  kg/cm<sup>2</sup> を有する正規粘土で、その上限降伏値  $\sigma_u$  は 0.24 kg/cm<sup>2</sup> であると報告されているが、この値はほぼ上述の critical な値 0.247 kg/cm<sup>2</sup> と対応していることは興味深く思われる。Fig. 5 に示したヒステリシスループのサイクル No.3 から No.7 までの頂点の軌跡に注目し、 $Z \sim Z/\epsilon_{am}$  関係に整理したものが Fig. 7 に示されている。

非排水状態であるから、 $Z$  の分母として  $\sigma'_m + \sigma_0$  が入るべきであるが、間げき水圧測定の際の困難によって



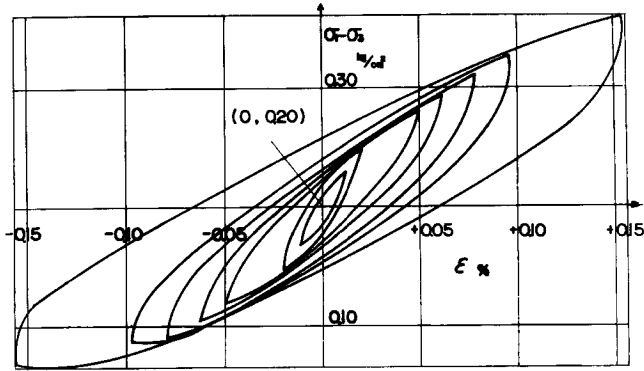


Fig. 5 Hysteresis loop of clay constructed from the results through undrained dynamic triaxial compression test.

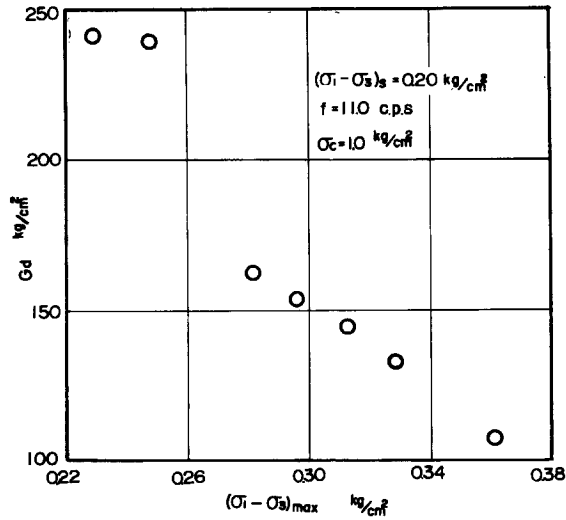


Fig. 6 Experimental relationship between dynamic elastic modulus and deviatoric stress.

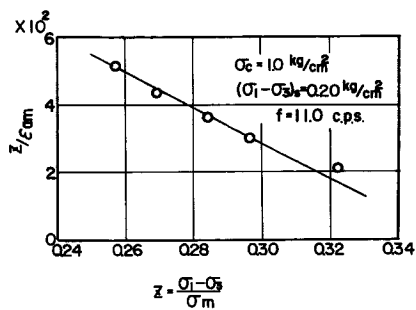


Fig. 7 Experimental relationship of  $Z/\epsilon_{am} - Z$  constructed from Fig. 5.

ここでは便宜的に全応力表示をしている。Fig. 7 から  $Z$  と  $Z/\epsilon_{am}$  との間にはほぼ直線の関係が存在するようであるが、この関係は村山<sup>10)</sup>が砂の disintegration stage において成立するとして提案した塑性ひずみ  $\delta_p$  と応力比  $Z^*$  とのあいだの hyperbolic type の理論式と結びつくように思われる。しかし、間げき水圧の測定、ひずみの原点の選定に問題が残されているため詳しいことは今後の研究を待たねばならない。

## 6. あとがき

線型粘弾性理論を用いて、ややもすれば形式的と思われる叙述を展開したが、その前提となっていた緩和スペクトルについて著者らの考えを述べておきたい。高分子の研究<sup>17)</sup>によれば、緩和スペクトルの箱型分布は溶液状態や分子量の小さい材料にはみられず、流動単位として比較的大きな単位で緩和に関係するような材料において表われることが知られているが、粘土の場合にはまだこうした物性論的解釈をくわし得ない現状にあるように思われる。しかし、いわゆる隠された成分による巨視的な力学挙動への影響を明らかにしていくためには、緩和スペクトルあるいは遅延スペクトルの概念が非常に有効であると思われるので今後こうした方面の研究をさらに進めていくつもりである。

## 参 考 文 献

- 1) Murayama, S.: Dynamic Behavior of clay, Fifth International Congress on Rheology, 1968, Oct., under printing.
- 2) Rivlin, R. S.: Constitutive Equations for Classes of Deformations, in "Viscoelasticity" edited by J. T. Bergen, 1960, Academic Press, pp.93~108.
- 3) 山本三三三: レオロジー, 榎書店, 1964, pp.28~31.
- 4) Murayama, S. and T. Shibata: Flow and Stress Relaxation of Clays, Proceedings of IUTAM Symposium on Rheology and Soil Mechanics, Springer Grenoble, Verlag, 1964, pp.99~129.
- 5) 中崎英彦: 動態時の粘土の力学性について, 修士論文277号, 昭和41.3, 京大土木工学教室.
- 6) 和田八三久: 力学物性, 共立出版, 1968, pp.96~97.
- 7) Ree, T. and H. Eyring: Theory of Non-Newtonian Flow. I. Solid Plastic System, J. Appl. Physics, Vol. 26, No.7 1955, pp.793~800.
- 8) Lyons, W. J.: Viscoelastic Properties as Functions of the Distribution of Activation Energies, J. Appl. Physics, Vol. 24, No.2, 1953, pp.217~221.
- 9) 村山朔郎・飯田邦夫: 粘土のレオロジー特性について, 第21回土木学会年次学術講演会講演概要, 昭和41, III-41.
- 10) Murayama, S. and T. Shibata: Rheological Properties of Clays, Proc. 5th Int. Conf. S. M. F. E. Vol. 1 1961, pp.269~273.
- 11) Murayama, S.: Effect of Temperature on Elasticity of Clays. Int. Symp. on Effects of Temperature and/Heat on Engineering Behavior of Soils, 48 annual Meetings of H. R. B. Jan. 1969, Washington D. C. pp.194~203.
- 12) Tabolsky, A. V.: 高分子の物性と構造, 邦訳, 東京化学同人1960, pp.128~141.
- 13) Salas, J. A. J. and J. M. Sarratosa: Compressibility of Clays. Proc. 3rd Int. Conf. S. M. F. E. Vol. 1, pp.192~198.
- 14) Lambe, T. W.: A Mechanistic Picture of Shear Strength in Clay. Reserch Conference on Shear Strength of Cohesive Soils, Colorado. June, 1960, pp.555~580.
- 15) 村山朔郎・中崎英彦・福岡啓内: 粘土の動的弾性係数について, 第21回土木学会年次学術講演会講演概要, 昭和41, III-107.
- 16) Murayama, S.: Stress-Strain-Time Behavior of Soils Subjected to Deviatoric Stress. Proc. of 7th Int. Conf. S. M. F. E. Vol. 1969, pp.297~305.
- 17) 井本立也: 概説レオロジー (上), 東京化学同人, 1963, pp.109~114.