

## 2次元モデルによる粒状体の せん断現象の微視的考察

村山 朔郎・松岡 元

### A MICROSCOPIC CONSIDERATION ON THE SHEARING BEHAVIOR OF GRANULAR MATERIALS USING THE TWO-DIMENSIONAL MODELS

By *Sakuro* MURAYAMA and *Hajime* MATSUOKA

#### Synopsis

This is a report on a microscopic consideration of the shearing mechanism in granular materials such as sand and gravel. In order to investigate the mechanism through observing the interaction between particles microscopically, the direct shear test was carried out by using a horizontal pile of aluminium rods with various diameters as a simulation of two-dimensional granular mass. Another direct shear test was performed by using a similar horizontal pile of rods made of photoelastic material to measure the interparticle force transmitted during shearing process.

Besides these tests, a simulation of two-dimensional particle arrangement (structure) in an initial state before shearing was obtained analytically by applying Monte Carlo methods.

In these investigations the interparticle force  $f$ , the frictional angle between particles  $\delta$  and the slope angle of the particle surface at the individual contact point against the general shearing plane  $\theta$  were chosen as fundamental factors to control the shearing resistance of the materials. Among these the frequency distribution of  $\theta$  ( $-90^\circ < \theta < 90^\circ$ ):  $N_j(\theta_j)$  ( $\theta_j - \Delta\theta/2 < \theta < \theta_j + \Delta\theta/2$ ) was adopted as a factor to evaluate the particle arrangement on the shearing plane, and it was found that this factor dominated the stress-strain-dilatancy character of the materials. It was also found that  $N_j(\theta_j)$  was related to the sum of the interparticle force in the same small range  $\Delta\theta$  of  $\theta$ :  $F_j(\theta_j)$  as expressed by Eq. (4), which was obtained empirically from Fig. 7. From this relation  $\tan\phi_{m0}(=\tau/\sigma_N)$  can be calculated by Eq. (5) if  $N_j(\theta_j)$  is known. This calculated  $\phi_{m0}$  agrees well with the measured  $\phi_{m0}$  as shown in Table 1. Furthermore some macroscopic mechanical properties obtained by repetitional loading test were explained from the similar microscopic point of view.

#### 1. 緒 言

土質力学の分野では、この10年程の間に三軸試験機の普及ともあいまって土の力学特性に関する種々の実験データが蓄積されてきた。粒状体のせん断試験に限定しても、通常の静的せん断、繰り返しせん断、振動

せん断などがあり、また応力条件や排水条件によっても区別されている。これらの実験では、多くの場合土のエレメントの巨視的応答量を測定し整理して、土の力学特性に関する何らかの評価を行なっているが、なぜそのような巨視的応答がおこるのかといった粒状体の本性にかかわる根本問題を追求した研究は極めて少ない。

砂礫のような粒状体の力学特性のよってきたるべき根本機構を真に解明するには、それらが粒子の集合体であるという本来の姿に着目してその挙動を微視的立場で把握し、微視的特性と巨視的特性との相関を考察しなければならない。ここでは粒状体のせん断現象に対してこの立場でアプローチを行なうため、粒状体の2次元モデルとしてアルミの丸棒および光弾性材料の丸棒の積層体を用いた。これは、粒子が互いに乗り上がり、乗り越えるといったせん断時の基本的な挙動については十分シミュレートしようと考えたからであり、光弾性材料の棒については光弾性実験を行なうことにより、粒子間力の伝達状況が把握できるからである。

まず粒状体の粒度分布が与えられた場合に、2次元問題としてそのせん断前の粒子配置(構造)を推定することを試みた。次にせん断を受けると、その粒子配置(構造)および粒子間伝達力の方向、大きさがいかに変化するかをアルミ棒および光弾性材料の棒の積層体についてのせん断試験から解析し、それをもとにせん断抵抗力の変化を微視的立場から評価して、粒状体の応力-ひずみ-ダイレタンシー関係との相関を考察した。さらに繰り返しせん断試験の示す力学特性の一例についても、その本質的な意味を微視的立場から明らかにした。

## 2. 従来 の 研 究

粒状体の巨視的な力学特性を、その構成単位である粒子の挙動の微視的考察をもとにして解明しようとした研究の代表的なものを次にあげる。

P. L. Newland と B. H. Allely (1957)<sup>1)</sup> は、せん断時に粒状体中の個々の粒子間でおこるすべり現象に着目し、粒子間摩擦角 ( $\phi_\mu$ ) と粒子接点角 ( $\theta$ ) を微視的要因としてピーク強度 ( $\tau_{max}$ ) と残留強度 ( $\tau_R'$ ) の差を次式によって説明しようとした。

$$\frac{\tau_{max}}{\sigma_n} = \tan(\phi_\mu + \theta)$$

$$\frac{\tau_R'}{\sigma_n} = \tan \phi_\mu$$

$$\left( \frac{\delta v}{\delta \Delta} \right)_{max} = \tan \theta$$

ここに、 $(\delta v / \delta \Delta)$  はせん断にともなう体積変化(ダイレタンシー)に係わる量である。しかし上式より算出した  $\tau_R'$  の値は実験値 ( $\tau_R$ ) と一致せず、その原因を微視的な粒子の破壊様式(mode of failure)の差に求めて補正を行なっている。微視的な考察から出発しているが、すべての粒子接点で  $\theta$  が等しいとしているため、せん断にともなう粒子構造の変化を評価できず破壊様式の差という言葉で説明しなければならなくなったように思われる。

P. W. Rowe (1962)<sup>2)</sup> も、同じくせん断時に粒子間でおこるすべり現象に着目し、粒子間力、粒子間摩擦角 ( $\phi_\mu$ )、粒子接点角 ( $\beta$ ) および粒子配列の幾何学的な尺度をあらわす角度 ( $\alpha$ ) を要因として、等大径の棒および等大球の規則配列の場合について解析を行ない、応力-ひずみ-ダイレタンシーの関係として次式を導びいている。

$$\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'} = \tan \alpha \cdot \tan(\phi_\mu + \beta)$$

$$\frac{\sigma_1' \dot{\epsilon}_1}{2\sigma_3' \dot{\epsilon}_3} = \frac{\sigma_1'}{\sigma_3' \left(1 + \frac{dV}{V \dot{\epsilon}_1}\right)} = \frac{\tan(\phi_\mu + \beta)}{\tan \beta}$$

さらに一般的な粒子配列の場合に拡張するため、実際におこるせん断にともなう粒子の再配列は、 $\beta$ が内部的に行なわれる仕事を最小にするようなものであると考え、 $\sigma_1 \dot{\epsilon}_1 / 2\sigma_3 \dot{\epsilon}_3 \equiv \dot{E}$  として  $d\dot{E}/d\beta = 0$  の条件から  $\beta = (45^\circ - \phi_\mu/2)$  を求めた。この  $\beta$  を原式に代入すれば次式を得る。

$$\frac{\sigma_1'}{\sigma_3' \left(1 + \frac{d\dot{V}}{V\dot{\epsilon}_1}\right)} = \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi_\mu}{2}\right)$$

せん断中に体積が増加する場合には、部分的に小さなすべりが発生していると考え、上式は破壊前の全変形過程で成立するとし、これが応力-ダイレタンシー関係の基本式であるとしている。規則配列の場合は、応力と粒子間力、ひずみと変位と体積変化との関係が幾何学的性質から決定されるので、応力-ひずみ-ダイレタンシー関係は容易に規定することができる。しかし、エネルギー比最小の条件によって一般的な粒子配置の場合に拡張するとき、粒子接点角  $\beta = (45^\circ - \phi_\mu/2) = \text{const.}$  となるが、後述するように著者の実験事実と合わない。

最上 (1965)<sup>3)</sup> は、粒状体の力学特性は平均間げき比とその偏差 (deviation) によって規定されると主張し、統計力学的手法を用いて次の関係式を誘導した。

$$\sin \phi = \frac{k}{1+e}$$

ここに、 $\phi$  は内部摩擦角、 $e$  は全体としての間げき比、 $k$  は間げき比の偏差に関する係数をあらわしている。また上式中の係数  $k$  は粒度との間に次の関係式が成り立つとしている<sup>4)</sup>。

$$k = -\lambda \cdot \log_{10} U + \alpha$$

ここに、 $U$  は均等係数 ( $D_{60}/D_{10}$ ) を示し、 $\lambda$ 、 $\alpha$  は定数である。しかしこの係数  $k$  のもつ物理的、力学的意味については不明確な点が多いように思われる。

村山 (1964, 1969)<sup>5), 6)</sup> は、砂粒子がモービライズされる機構を微視的に考察し、統計的な手法を適用して弾性状態にある砂の応力-ひずみ関係を次のように導びいた。

$$\gamma_e = A_e \cdot \frac{(P - P_0)}{\cos \beta} = A_e \cdot W \cdot Z$$

ここに、

$$A_e = \frac{c \cdot \lambda_e \cdot N}{d}, \quad W = \frac{1}{4} \cos \frac{\theta + \delta}{2}, \quad Z = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_m}$$

上式において、 $Z$  は作用応力比、 $\gamma_e$  は弾性状態での最大せん断ひずみをあらわしており、 $P$  は  $\sigma_1$  と  $\sigma_3$  を受けている三軸圧縮応力状態のもとでの粒子の滑動確率 (probability of mobilization)、 $P_0$  は等方応力状態のもとでの粒子の滑動確率を意味している。 $A_e$  は変位係数 (displacement factor)、 $W$  は構造係数 (structural factor) と呼ばれるものである。さらに、このような弾性状態において得られた砂の応力-ひずみの関係式を砂の弾性限界をこえた状態や粘土の挙動に対しても拡張し、実験事実と検証しながら理論的な考察を加えている。

### 3. 2次元粒状体の粒度分布と粒子配置 (構造) の関係について

一定の粒度分布をもった粒状体を箱の中へ同じ方法で何回も注ぎ込むと、ある幅のばらつきはあるがほぼ一定の間げき比となることが経験される。このことは、その粒度分布のもとではほぼ同様の粒子配置 (構造) が形成されることを暗示している。ここでは粒状体の粒度分布が与えられた場合に、2次元問題としてそのせん断前の粒子配置をシミュレートすることを試みた<sup>7), 8)</sup>。

箱の中に粒状体を注ぎ込むと個々の粒子はおそらく粒子の落下地点付近の安定する位置に順次積み上げられるであろう。この間の状況をシミュレートするため、まず粒子の抽出法としてモンテカルロ法を採用した。2種の径 ( $\phi 1.6 \text{ mm}$ ,  $\phi 3 \text{ mm}$ ) および4種の径 ( $\phi 1.6 \text{ mm}$ ,  $\phi 3 \text{ mm}$ ,  $\phi 5 \text{ mm}$ ,  $\phi 9 \text{ mm}$ ) のアルミ棒の積層体について実験を行なったことが多いので、多種の径の場合でも同じであるが、ここではこの2つの場合について説明する。まず2種の径のときは、2種の径の混合重量比 (60 : 40) を粒子数比 (84 : 16)

に換算し、一様乱数表をひいて例えば01~84の数字が出たときは $\phi 1.6 \text{ mm}$ の粒子を、85~00(00は100を意味する)のときは $\phi 3 \text{ mm}$ の粒子を順次抽出することにする。また4種の径のときも同様に、4種の径の混合重量比(10:40:40:10)を粒子数比(39:44:16:1)に換算し、一様乱数表をひいて01~39の数字が出たときは $\phi 1.6 \text{ mm}$ 、40~83のときは $\phi 3 \text{ mm}$ 、84~99のときは $\phi 5 \text{ mm}$ 、00のときは $\phi 9 \text{ mm}$ の粒子をそれぞれ抽出することにする。このようにすれば、その粒度分布にしたがって粒子をランダムに抽出したことになる。

次にくるのはこの抽出した粒子をいかに配置するのが自然の理にかなっているかという問題である。順次安定する位置に積み上げるとしても、それを適確にシミュレートすることは困難である。例えば、ある粒子を一時的に安定すると思われる位置に配置しても、それから上に積み上げられた粒子の自重や外力あるいは攪乱によってその粒子配置をくずす可能性がある。このような検討には粒子間力のもとでの粒子配置の安定性という力学法則の導入が必要であり、モンテカルロ法などの統計法則だけでは規定できないように思われる。しかしここでは最初の試みとして、次のような単純化したルールにしたがって抽出した粒子を順次配置した。

最下段では、あるシミュレートしたい容器の幅の左端から右端へ、抽出した粒子を順次横につめて並べるものとした。その上の段では、再び左端からすでに配置の終わった最下段の粒子の谷間に、新たに配置する粒子がその自重のもとで安定する位置に積み上げ、順次左から右へ配置するものとした。そして、このような方法を繰り返して下から上の段へ順次積み上げ粒子配置をシミュレートした。ここで「左から右へ」というのは配置順序を決める一つのルールであるから、これを「右から左へ」としても乱数表にしたがって粒子を抽出しているので本質的な差はあまりないように思われる。4種の径の場合は、最下段では左から右へ並

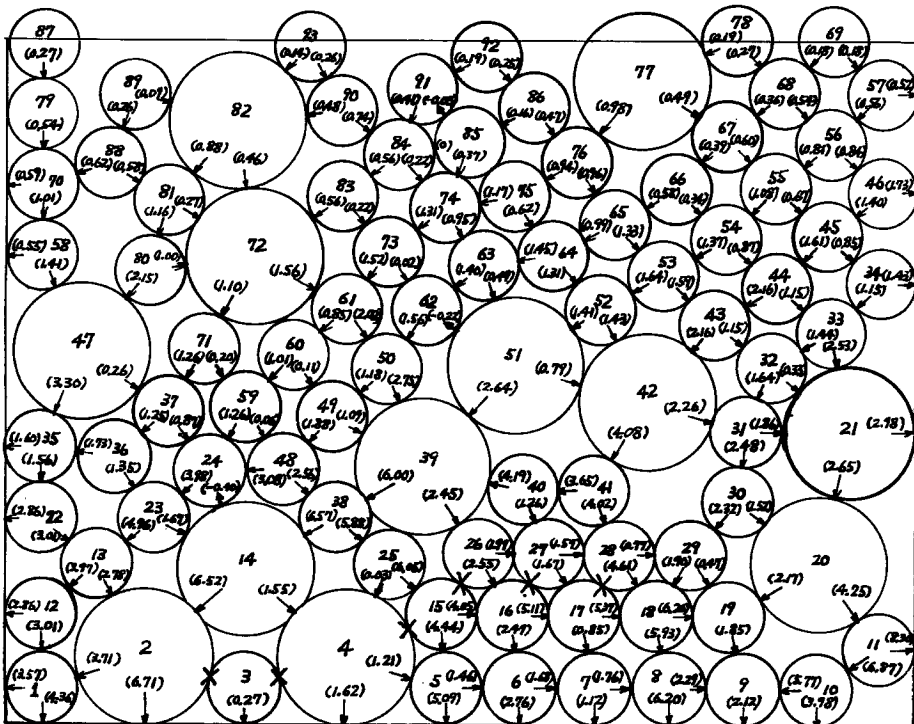


Fig. 1 Simulation of particle arrangement obtained by applying Monte Carlo methods and transmission of interparticle force due to own weight of particles.

べ、その上の段では右から左へ、さらにその上の段では再び左から右へ配置するというように左右にふりながら粒子をばらまくような配置順序とした。

上述のルールにしたがって、2種の径 ( $\phi 1.6 \text{ mm}$ ,  $\phi 3 \text{ mm}$ ) の混合粒子が  $2 \text{ cm} \times 1.5 \text{ cm}$  の箱の中へ入れられた場合の2次元的な粒子配置をシミュレートしたのが Fig. 1 である。図中の連続番号は配置順序を意味している。この間げき比を計算すると0.23となり実際のアルミ棒を用いた実験で得た間げき比とよく一致した。したがって Fig. 1 はこの2種の径の粒状体の粒子配置のシミュレーションとしてはほぼ妥当であると判断する。

次に、この Fig. 1 の状態にある粒子配置の粒子の自重による安定性を考察するため、粒子の自重にもとづく粒子間伝達力を各接点で力のつり合いより計算した。計算上の仮定として、粒子は剛体であるとし、この状態では粒子間の相対変位はないものと考えて粒子間摩擦力を無視した。また伝達力の未知の接点が3個以上の場合には合力方向に近い2方向に伝達されるものとした。したがって図中の×印のついている6個所の接点では力の伝達を無視している。なおアルミ棒(長さ5cm)の重量は  $\phi 1.6 \text{ mm}$  で0.27g,  $\phi 3 \text{ mm}$  で0.95gである。粒子間伝達力の大きさはg単位で図中のカッコの中に記入した。この図より、配置番号14と24の粒子の接点と配置番号51と62の粒子の接点および配置番号85と91の粒子の接点において伝達力の大きさが負の値となり、その粒子配置ではつりあいが破れることを意味しているが、いずれも小さい負値であるので粒子間摩擦力が発揮されれば安定を保ちうる程度の値と考えられる。したがって Fig. 1 は粒子の自重に対する安定性の点からほぼ実在可能な粒子配置をシミュレートしているといえる。またこの計算結果より、底面にかかる合力は34.23gであり、側面では左が11.37g, 右が14.96gであった。これに対して単位体積重量が  $2.18 \text{ g/cm}^3$  ということより巨視的に求めた底面合力は32.7g, 側面合力は  $K_0$  を静止土圧係数として  $12.26 \times K_0$  である。粒子間力より求めた左右の側面合力と比較すると  $K_0=1$  となるのは、実際には局所的にわずかの粒子間の相対変位があるのに、粒子間摩擦力を無視しているためと考えられる。

また同様な方法で4種の径 ( $\phi 1.6 \text{ mm}$ ,  $\phi 3 \text{ mm}$ ,  $\phi 5 \text{ mm}$ ,  $\phi 9 \text{ mm}$ ) の混合粒子が  $6 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$  の箱の中へ入れられた場合の粒子配置をシミュレートしたのが Fig. 2 である。図中の連続番号は前と同じく配置順序を示している。この間げき比を計算すると約0.31となり、この値は実物の棒を用いた実験での間げき比より少々大きくなっている。このことは、実験での粒子配置が前述のように粒子の自重、外力あるいは攪乱によってシミュレーションにより定めた粒子配置より密な間げき比をもつ粒子配置になったことを意味している。Fig. 1 と Fig. 2 を比較すればわかるように、4種の径の場合は同じルールにしたがえば2種の径の場合より緩い構造を形成するので、構造の変化がおりやすいと考えられる。先に述べたように、ここで採用した粒子配置のルールには、配置の完了した粒子の上に新たな粒子をその自重のもので安定するように配置すること以上の力学性は加味されていないので、粒子の自重や上載荷重による力が上方より伝達されない状態を想定しており、その粒度分布を有する粒状体のとりうる最も緩い構造に対応するものではない

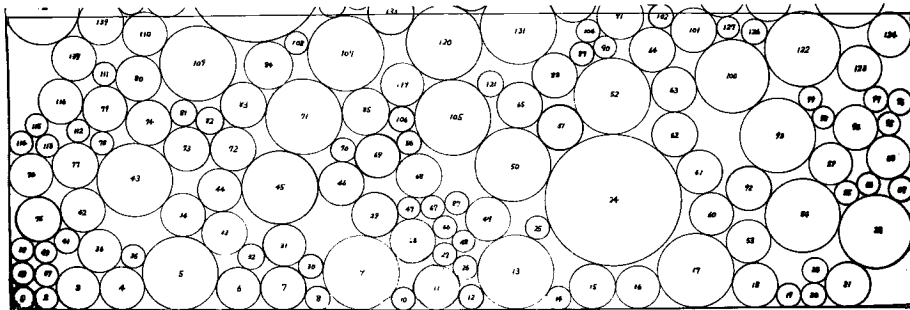


Fig. 2 Simulation of particle arrangement obtained by applying Monte Carlo methods.

かと考えられる。この粒子配置のシミュレーション法にここで述べたような力学性をいかに適確に加味して自然の理にかなわしめるかが今後の課題である。

#### 4. せん断試験に用いた試料と装置

さきに述べたように、粒状体のせん断現象を微視的立場で把握するため、ここでは粒状体の2次元モデルとしてアルミ丸棒および光弾性林料の丸棒を用いてせん断試験を行なった。アルミ棒は長さが3 cmで2種の径( $\phi 1.6$  mm,  $\phi 3$  mm)の混合積層体(混合重量比60:40)および4種の径( $\phi 1.6$  mm,  $\phi 3$  mm,  $\phi 5$  mm,  $\phi 9$  mm)の混合積層体(混合重量比10:40:40:10)として用いている。なおアルミ棒の長さ3 cmは、粒子の接点の判別に容易なように従来から模型実験<sup>9)</sup>などに用いていた長さ5 cmのものを切断して短くしたものである。また光弾性せん断試験の試料に用いた光弾性材料(アラルダイトB, 光弾性感度10.7 kg/cm)の棒は長さが2 cmで、2種の径( $\phi 6.2$  mm,  $\phi 10$  mm)の混合積層体(混合重量比60:40)として使用した。この光弾性林料の丸棒は厚さ2 cmのアラルダイト板から所定の中空内径( $\phi 6.2$  mm および  $\phi 10$  mm)をもったカッターによりせん孔して得たものである。

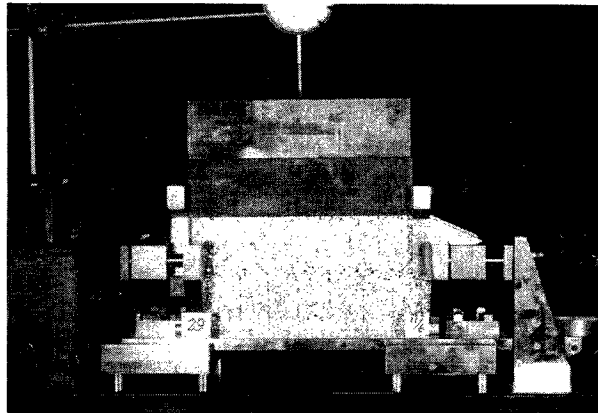


Photo. 1 Direct shear apparatus for pile of rods.

ここで用いたせん断試験装置は Photo. 1 に示すような一面せん断型のものである。水平力(せん断力)は右端のプルービング・リングで測定し、垂直荷重は直方体(20 cm×5 cm×5 cm)状の鉄製の錘を重ねて与えた。水平変位および垂直変位はダイヤル・ゲージにより測定した。また繰り返しせん断ができるよう水平変位を与えるシャフトは前進および後退が可能な構造とした。試料の大きさは幅を20 cmとし、アルミ棒の積層体の場合せん断面上で100個前後の接点が存在し統計的な処理ができるよう考慮した。試料の高さは10 cm~13 cmとした。せん断にともなう粒子配置(構造)の変化は棒の端面を前面から写真撮影することにより知ることができる。光弾性実験の場合は、光弾性縞の様相を写真撮影することによって、粒子間力の伝達状況も解析できる。

#### 5. 通常の静的せん断試験とその微視的考察

##### 5.1. せん断抵抗を支配する微視的要因

すべての材料はそのもの固有の性質一本性ともいべきもの一をもっており、そのような本性をもっている材料にいかなる外的刺激を与えるかによって、その応答としての現象が規定されるわけである。したがって粒状体のせん断抵抗に影響をおよぼす要因を考える場合でも、粒状体の固有の性質と外的刺激とに分けて考えねばならない。せん断抵抗に影響をおよぼす粒状体固有の性質としては、粒子の大きさ、粒度分布、粒子の表面摩擦、粒子の形、粒子の硬さ、粒子の付着水などが考えられ、外的刺激の要因としては試験機およ

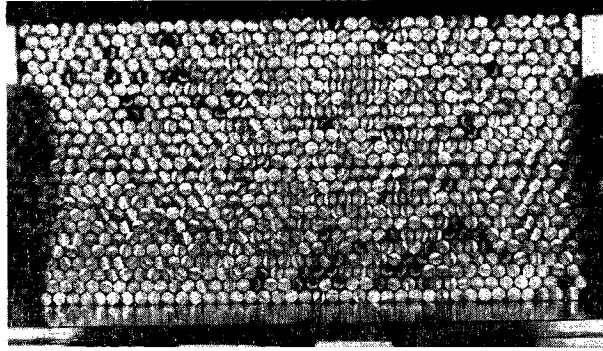


Photo. 2 Particle arrangement during shear for pile of rods with one kind of diameter  $\phi$  5 mm.

び試験方法によって異なる応力条件，変形条件，排水条件などが考えられる。またこれらの要因から定まるものであるが，粒子のつまり具合の平均的な評価量をあらわす間げき比も重要な支配要因としてよく用いられる。最近，間げき比とそのバラツキの概念<sup>2)</sup>が重要視されているようであるが，後に述べるようにせん断現象を考察する場合には，より明確な力学的意味をもつ「粒子構造」あるいは「粒子配置」という概念の重要性を強調したい。

さて上述の要因をすべて同一に考慮することは得策でないので，微視的立場から，せん断抵抗を直接的に支配する基本的な要因として，粒子間伝達力  $f$ ，粒子間摩擦角  $\delta$  および粒子接点角  $\theta$  の3つを選んだ。ここに粒子接点角  $\theta$  は着目している接点で接触する2個の粒子の中心を結んだ直線と鉛直線とのなす角度であらわし，せん断方向に対して乗り上がるときを正，真上で0，下るときを負とする。したがって理論的には  $\theta$  は  $-90^\circ$  から  $+90^\circ$  までの値をとりうることになる。Photo. 2 は  $\phi$  5 mm のアルミ棒だけの積層体がせん断変位を受けた状態を示しているが，せん断面上の粒子が一つの面で一斉に乗り上がるのが観察される。このような規則配列の場合には，粒子間伝達力  $f$  はせん断面上のすべての粒子にほぼ等しく伝えられると考えられるし，粒子接点角  $\theta$  は幾何学的関係からせん断変位にしがって決定されるから，アルミ棒の粒子間摩擦角  $\delta$  が既知であれば，せん断変位にともなう巨視的質量としてのモーブリイズされた  $\phi$  ( $\phi_{m0}$  と表わす； $\tan \phi_{m0} = \tau/\sigma_N$ ) は算定できる。例えば，せん断初期の正三角形の粒子配置のときせん断力による粒子間力が伝達されると， $\theta = 30^\circ$  であり， $\delta = 20^\circ$  であることが測定されているので  $\phi_{m0}$  はおよそ  $50^\circ$  となり，これは実測値と一致する。また真上に乗り上がった場合は  $\theta = 0^\circ$  で， $\phi_{m0}$  は粒子間摩擦角  $\delta$  に等しほぼ  $20^\circ$  となり，これも実測値と一致する。なお粒子間摩擦角  $\delta$  は，アルミ棒とアルミ板の間の摩擦角あるいは互に直交する位置に置かれたアルミ棒どうしの摩擦角を測定して定めたものである。このように規則配列の場合は容易に応力一ひずみ関係が規定されるわけであるが，Rowe<sup>2)</sup> は前述のようにこのような場合の解を与えている。Photo. 3 は4種の径 ( $\phi$  1.6 mm,  $\phi$  3 mm,  $\phi$  5 mm,  $\phi$  9 mm) からなるアルミ棒積層体のせん断時 (水平変位  $h=10$  mm) の状況を示したものであるが，せん断面上の粒子接点角  $\theta$  は種々の角度をとるし，粒子間伝達力  $f$  の大きさも同じではないようである。このように一般の粒子配置の場合は簡単に規定することができないので，次に粒子接点角  $\theta$  と粒子間伝達力  $f$  に分けて考察する。

## 5.2. 粒子接点角 $\theta$ について

Photo. 3 に示すような一般の粒子配置の場合に，せん断面上の粒子接点角  $\theta$  をどう整理し，評価するかということであるが，ここでは  $-90^\circ$  から  $+90^\circ$  までの  $\theta$  の範囲を  $10^\circ$  間隔18の変域に区分し，写真よりせん断面上の粒子接点角  $\theta$  を読み取ってこの18の変域について粒子接点角  $\theta$  の度数分布<sup>3)</sup>を求めた。Fig. 3 は Photo. 3 から読み取ったせん断面上の  $\theta$  の度数分布である。この図中の黒の矢印はこのときモーブリイズされている  $\phi$  ( $=\phi_{m0}$ ) の実測値を示し，白の矢印は計算値を示している。この計算値については 5.4.

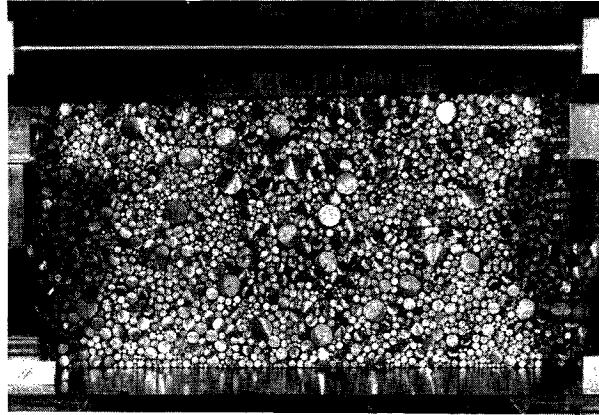


Photo. 3 Particle arrangement during shear for pile of rods with four kinds of diameters  $\phi$  1.6, 3, 5, 9 mm.

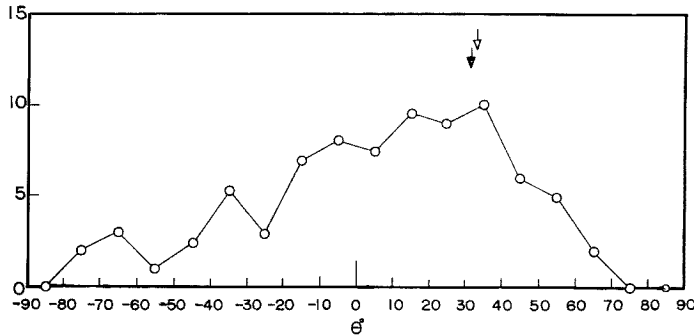


Fig. 3 Frequency distribution of  $\theta$  obtained from Photo. 3.

で説明する。この  $\theta$  の度数分布形のもつ特性について述べると、せん断前の初期状態では、 $\theta$  の度数分布は両端付近の変域をのぞいてほぼ一様にランダムな左右対称的な分布をなす傾向がある。これは多数の粒子を対象とした場合は、ほぼ同じ程度の確率で種々の粒子接点角  $\theta$  をなして接し得ることを意味している。その後、せん断変位が進むにつれてピークが右の方 ( $\theta$  の正の領域) に現われてくる。ピークが右へ寄るほど抵抗しやすい角度になるわけであるが、たとえば Fig. 3 に示す  $\theta$  の度数分布は応力-ひずみ関係のピーク強度付近に対応している。せん断変位がさらに進むと、粒子は強制的にずらされるので、度数分布のピークは右から中央の方へどり、それにつれてせん断抵抗も弱まりやがて残留強度になる傾向がみられる。このことは、せん断時に隣接粒子は互に何回も乗り越えるものではなく、大部分の粒子は精々一回程度の乗り越えしかおこさないことと考えあわせれば、粒状体の応力-ひずみ関係の源を示さず興味ある事実のように思われる。

### 5.3. 粒子間伝達力 $f$ について

Figs. 4~6 は光弾性材料の棒 ( $\phi$  6.2 mm,  $\phi$  10 mm) の積層体の光弾性せん断試験<sup>9)</sup>の結果を示したものである。各図の上の図は  $20^\circ$  間隔の  $\theta$  の度数分布を示し、下の図は  $\theta$  をなして伝達される粒子間力の大きさを縞次数 (Fringe Value) で表わしたものである。したがって、図中の黒丸は横軸であらわされる粒子接点角をなす接点に縦軸に対応する縞次数の大きさの粒子間力が伝達されていることを意味している。なお、粒子の径の大きさによって同じ力を受けても縞次数が異なる性質があるが、図には同じように比較できるようにこの粒子径による縞次数の補正を行なったものを示してある。Fig. 4 は上載荷重だけを受けている



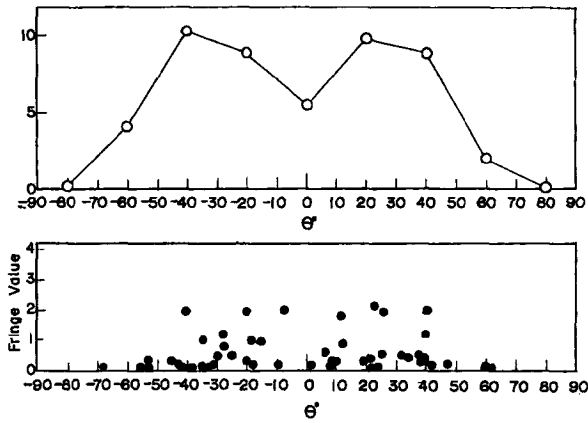


Fig. 4 Frequency distribution of  $\theta$  and distribution of magnitude of interparticle force  $f$  before shear.

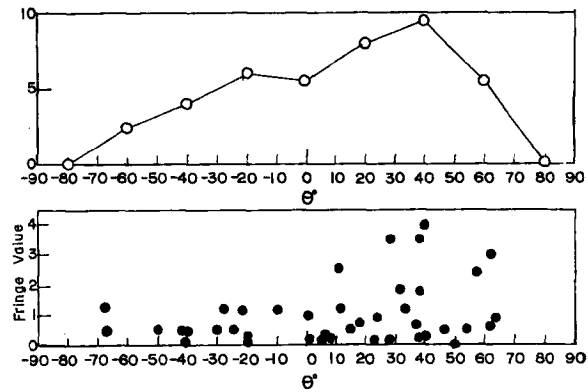


Fig. 5 Frequency distribution of  $\theta$  and distribution of  $f$  after shear.

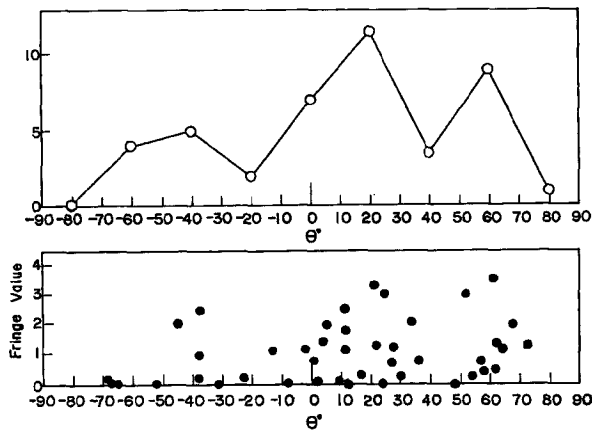


Fig. 6 Frequency distribution of  $\theta$  and distribution of  $f$  after shear.

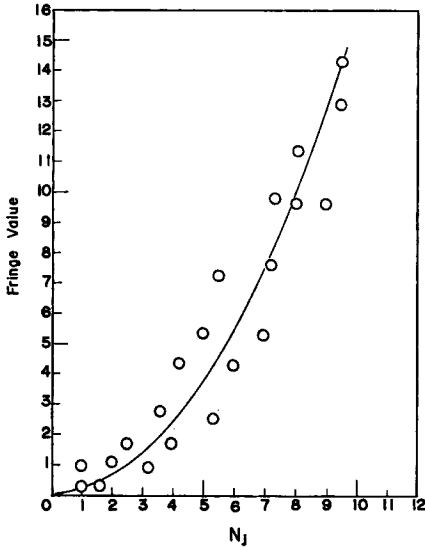


Fig. 7 Relation between frequency of  $\theta$  in  $\Delta\theta$ :  $N_j$  and magnitude of interparticle force in  $\Delta\theta$ .

せん断前の初期状態を示しており、Fig. 5、Fig. 6はせん断後の状態を示している。これらの図より、 $\theta$ の度数分布の形と粒子間伝達力  $f$  の大きさの分布の間には相関性があるように思われる。この原因として考えられることは、多くの度数をもつ粒子接点角  $\theta$  はそのときの粒子間力の伝達に対していわば安定した角度であって、そういう角度の接点を通してより多くの力が伝達されるのではなからうかということである。そこで粒子間伝達力  $f$  についても、 $\theta$  をある幅（この場合は  $20^\circ$  間隔）の変域に区分し、その変域内の粒子間伝達力  $f$  の和をとり同じ変域内の  $\theta$  の度数との相関をみた。

Fig. 7 は、Figs. 4~6 をもとにして  $20^\circ$  間隔 9 変域に分けた各変域内の  $\theta$  の度数  $N_j$  と同じ変域内の繰回数であらわされた粒子間伝達力の大きさ（個々の粒子間伝達力  $f$  の和）との関係を示したものである。なお Fig. 7 には、Fig. 4 から Fig. 6 にせん断が進むにつれてせん断力が増加するため、せん断面を通して伝達されるべき粒子間力の絶対量が増すことおよびせん断が進むにつれてせん断面上の粒子の接点数が

減ることを考慮して、その補正が加えられている。この図より、多くの度数をもつ  $\theta$  の接点を通してはより多くの力が伝達される傾向にあるが、その粒子間伝達力の大きさは  $\theta$  の度数  $N_j$  の 2 乗に比例すると仮定する。

5.4. せん断抵抗の微視的評価

以上に述べたことをまとめて粒状体のせん断抵抗を微視的立場から評価する。Fig. 8 に示すようにせん断面上の滑動している個々の粒子接点に着目すると、 $i$  番目の接点の粒子間伝達力を  $f_i$ 、粒子接点角を  $\theta_i$ 、粒子間摩擦角を一定値  $\delta$  とすれば、せん断抵抗（せん断応力・垂直応力比）は一般に次のようにあらわされる。

$$\tan \phi_{m0} = \frac{\tau}{\sigma_N} = \frac{S}{N} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \cdot \sin(\theta_i + \delta)}{\sum_{i=1}^n f_i \cdot \cos(\theta_i + \delta)} \dots\dots\dots(1)$$

ここに  $n$  はせん断面上の滑動している粒子の接点数である。この式は個々の粒子に作用する粒子間力  $f_i$  お

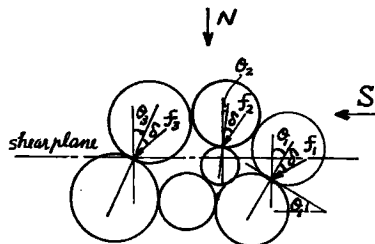


Fig. 8 The interparticle force  $f_i$ , the frictional angle between particles  $\delta$  and the slope angle of the particle surface at the individual contact point on the shearing plane  $\theta_i$ .

よびその作用方向 ( $\theta_i + \delta$ ) から、巨視的量としての  $\tan \phi_{m0}$  を評価しているのが極めて一般的な表示であるが、このままでは  $f_i$  と  $\theta_i$  の間に全く関係がないため考察は行きづまる。従来の研究では、ここで  $\theta_i$  がすべて等しいとか  $f_i$  がすべて等しいあるいはそれに類似した仮定を設けて解析しているが、著者は  $f_i$  や  $\theta_i$  の変化特性こそ粒状体のせん断抵抗を特性づける極めて重要な要因であると考え。そこで  $\theta_i$  を適確に評価し、あわせて  $f_i$  と  $\theta_i$  を関係づけるため、5.2. および 5.3. で述べたように、粒子接点角  $\theta$  の全範囲 ( $-90^\circ \sim +90^\circ$ ) をある間隔  $\Delta\theta$  の変域 (中央値を  $\theta_j$  とする) に区分し、 $\theta_j$  変域内の  $\theta$  の度数  $N_j$  とか粒子間伝達力の大きさ  $F_j$  という概念で解析を進めた。

$\theta_j$  変域の粒子間伝達力の大きさ  $F_j$  はその変域内の個々の粒子間伝達力  $f_i$  の和であるから、

$$F_j(\theta_j) = \sum f_i \quad \left( \theta_j - \frac{\Delta\theta}{2} < \theta < \theta_j + \frac{\Delta\theta}{2} \right) \dots\dots\dots(2)$$

とあらわされる。この  $F_j$  を用いれば、 $\theta_j$  なるその変域の代表的な角度をなして  $F_j$  なる大きさの粒子間力が伝達されると考えられるので、(1) 式は次のように変換できる。

$$\tan \phi_{m0} = \frac{\sum_{j=1}^m F_j \cdot \sin(\theta_j + \delta)}{\sum_{j=1}^m F_j \cdot \cos(\theta_j + \delta)} \dots\dots\dots(3)$$

ここに  $m$  は粒子接点角  $\theta$  の分割変域の数である。

また  $\theta_j$  変域の  $\theta$  の度数を  $N_j$  とすれば、5.3. で判断したように、

$$F_j = C \cdot N_j^2 \quad (C : \text{const.}) \dots\dots\dots(4)$$

Table 1 Comparison of measured  $\phi_{m0}$  with calculated  $\phi_{m0}$  obtained by Eq. (5).

Shear Displacement $h$	Measured $\phi_{m0}$	Calculated $\phi_{m0}$
0.0 mm	0°	0°
0.5	20	25
1.0	23	30
1.5	27	27
2.0	30	26
2.5	32	31
3.0	33	33
3.5	33	29
4.0	32	32
4.5	32	29
5.0	32	33
5.5	32	36
6.0	33	33
6.5	35	34
7.0	34	33
7.5	35	31
8.0	35	31
8.5	33	33
9.0	36	34
9.5	36	28
10.0	34	33
14.5	25	28

とあらわされる。(4)式を(3)式に代入すると次式を得る。

$$\tan \phi_{m_0} = \frac{\sum_{j=1}^m N_j^2 \cdot \sin(\theta_j + \delta)}{\sum_{j=1}^m N_j^2 \cdot \cos(\theta_j + \delta)} \dots\dots\dots(5)$$

(5)式より、巨視的なせん断抵抗  $\tan \phi_{m_0}$  ( $\phi_{m_0}$ :モービライズされた内部摩擦角)は $\theta$ の度数分布  $N_j(\theta_j)$  さえ求めれば算定することができる。この意味からも粒子接点角 $\theta$ の度数分布  $N_j(\theta_j)$  はせん断抵抗を支配する極めて重要な要因であると判断される。

**Table 1** は4種の径 ( $\phi 1.6 \text{ mm}$ ,  $\phi 3 \text{ mm}$ ,  $\phi 5 \text{ mm}$ ,  $\phi 9 \text{ mm}$ ) のアルミ棒の混合積層体についてのせん断試験の  $\phi_{m_0}$  の実測値と、せん断中の写真から粒子接点角 $\theta$ を読み取り、 $\theta$ の度数分布  $N_j(\theta_j)$  を求めて、(5)式により計算した  $\phi_{m_0}$  の計算値の比較を示したものである。粒子間摩擦角 $\delta$ はせん断変位が0のときは $0^\circ$ 、せん断が始まると一定値  $20^\circ$  として計算した。この場合は $\theta$ を $10^\circ$ 間隔の変域に分けたので、計算値の $\pm 5^\circ$ 程度の誤差はやむをえないわけであるが、計算値と実測値はかなりよく合っているようである。

**5.5. 粒状体の応力-ひずみ-ダイラテンシー関係に対する微視的考察**

以上の考察を通して、せん断面上の粒子接点角 $\theta$ の度数分布が粒状体のせん断抵抗を支配する重要な要因であることや、粒状体の応力-ひずみ関係と密接な相関があることを述べてきた。ここでせん断面上の粒子接点角 $\theta$ の度数分布のもつ意味を考えると、これはせん断面における「粒子配置」あるいは「粒子構造」を評価する一つの指標であるといえる。したがってせん断にともなう粒子配置あるいは粒子構造の変化は、 $\theta$ の度数分布形の変化によって評価することができるであろう。このように考えると、 $\theta$ の度数分布の形が粒

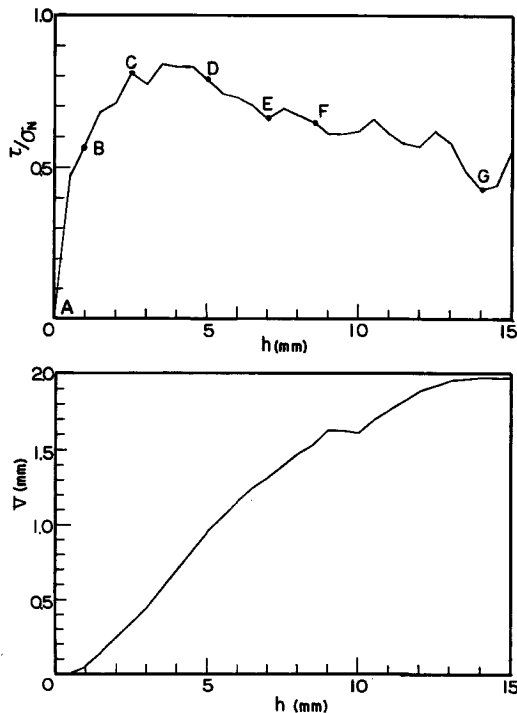


Fig. 9 Stress ratio ( $\tau/\sigma_N$ )-shear displacement ( $h$ )-dilatancy ( $V$ ) curve for pile of aluminium rods.

状態の応力-ひずみ-ダイレタンス-関係と相関性を示すことは当然のことのように思われる。

Fig. 9 は4種の径 ( $\phi 1.6 \text{ mm}$ ,  $\phi 3 \text{ mm}$ ,  $\phi 5 \text{ mm}$ ,  $\phi 9 \text{ mm}$ ) のアルミ棒の混合積層体のせん断試験結果の一例を示したものである。上の図はせん断応力・垂直応力比 ( $\tau/\sigma_N$ ) とせん断変位  $h$  の関係を示し、下の図は体積増加量 (ダイレタンス量)  $V$  とせん断変位  $h$  の関係を示している。この応力-ひずみ-ダイレタンス-関係は密な砂のものと類似しているので、棒状のモデルであっても基本的な挙動については十分シミュレートできるものと考え、一般に密な粒状体が Fig. 9 のような形の応力-ひずみ関係、ダイレタンス-ひずみ関係を示す本質的な意味について考察した。図中に示した A-G 点における  $\theta$  の度数分布を Figs. 10~16 に示す。

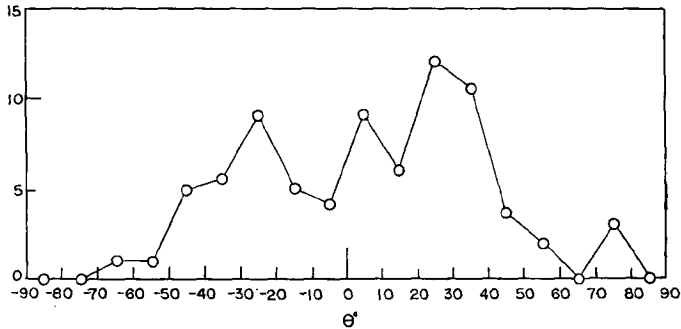


Fig. 10 Frequency distribution of  $\theta$  at point A in Fig. 9.

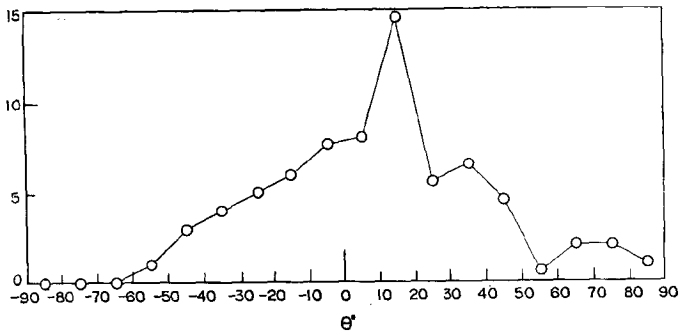


Fig. 11 Frequency distribution of  $\theta$  at point B in Fig. 9.

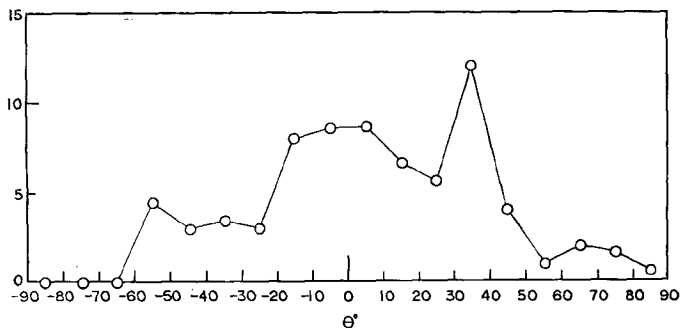


Fig. 12 Frequency distribution of  $\theta$  at point C in Fig. 9.

5.2.においても述べたように、せん断変位を与えられる以前の初期の状態では、直観的にも理解されるように、 $\theta$ の両端の変域をのぞいてはほぼ一様にランダムな左右対称的な分布をなす傾向があり、A点の $\theta$ の度数分布をあらわす Fig. 10 も大体そのような傾向を示している。せん断変位が与えられてB点に至ると、Fig. 11 に示すように分布形は $\theta$ の正の変域にかたより、ピークをもつようになる。さらにせん断が進んでピーク強度付近のC点、D点に至ると、Figs. 12 および 13 にみられるように $\theta$ の度数分布のピークが右の方へ寄ってくる。ピークが右へ寄るほど抵抗しやすい角度になるわけであるが、その粒状体のもつ固有の性質（たとえば、粒子の大きさ、粒度分布、粒子の形など）などによっていくらかでも右へ寄れるわけではない。この $\theta$ の度数分布形のピークがどれだけ右に寄れるかという問題は、粒状体のせん断強度（ピーク強

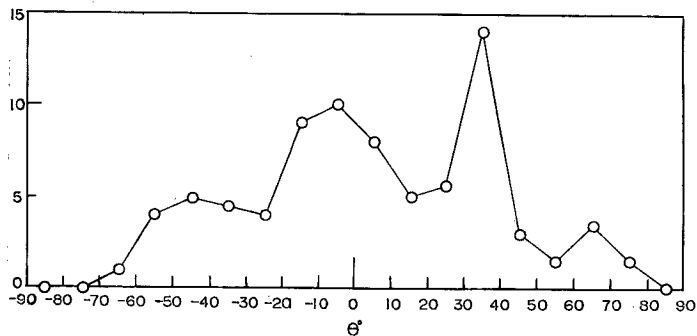


Fig. 13 Frequency distribution of  $\theta$  at point D in Fig. 9.

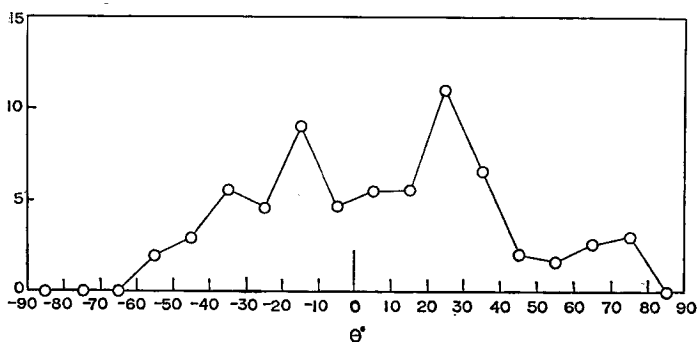


Fig. 14 Frequency distribution of  $\theta$  at point E in Fig. 9.

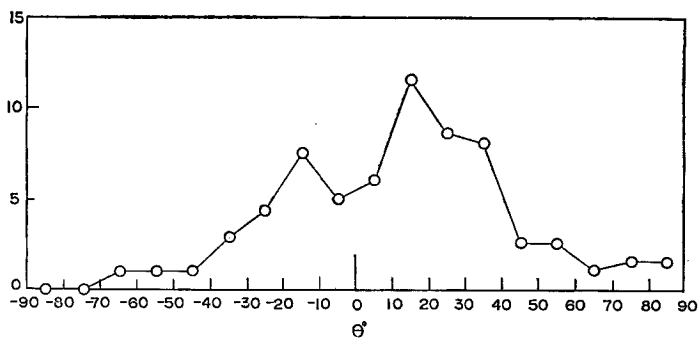
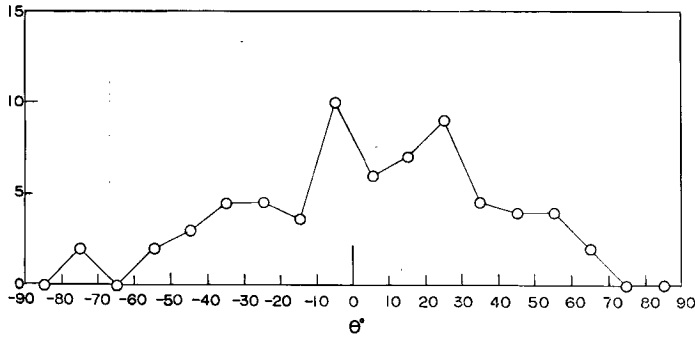


Fig. 15 Frequency distribution of  $\theta$  at point F in Fig. 9.

Fig. 16 Frequency distribution of  $\theta$  at point G in Fig. 9.

度)の推定にもつながる重要な問題である。この粒状体の場合には、 $\theta$ の度数分布のピークが $30^\circ$ から $40^\circ$ の間にあるとき最も右寄りとなるようである。このとき(5)式の形から明らかにせん断抵抗(せん断応力・垂直応力比)は最大となるし、 $\theta$ の値が右に寄っているほど( $+90^\circ$ に近いほど)単位せん断(水平)変位あたりの垂直変位が大きくなることを思えば、このときダイレタンシー—せん断変位図の勾配( $\Delta V/\Delta h$ )が最大となることも理解できる。 $(\Delta V/\Delta h)$ が最大となる点でピーク強度になることは、従来より密な砂のせん断試験などでよくいわれていることである。

さてせん断変位がさらに進むと、粒子はせん断面で強制的にずらされるので、E点、F点での $\theta$ の度数分布を示す Fig. 14 および 15 からわかるように度数分布形のピークが右から中央の方へもどり、それにつれてせん断抵抗も弱まってくる。統計的にみて $\theta$ の値が小さくなっていくわけであるから、当然せん断抵抗も弱まり、 $(\Delta V/\Delta h)$ も小さくなっていく。最後に体積増加(ダイレタンシー)のほとんどおこらないG点の度数分布をみると、Fig. 16 に示すように分布形のピークは $\theta=0^\circ$  近くになっており、このとき体積増加のほとんどおこらないことも、せん断抵抗が小さいことも容易に理解される。このあたりのせん断抵抗が残留強度と呼ばれるものであり、残留強度は Fig. 16 に示すような状態の粒子構造にある粒状体の強度であると考えることができる。

以上、粒子接点角 $\theta$ の度数分布の形と粒状体の応力—ひずみ—ダイレタンシー関係との相関性について微視的立場から考察し、あわせてピーク強度、残留強度のもつ意味も考えた。ここで述べたようにピーク強度、残留強度の本質的な意味を微視的立場から明らかにすれば、次にはせん断試験をせずにこのような強度を推定するという問題にもアプローチが可能となってくる。さらに進んで、このような微視的考察をもとにして粒状体の応力—ひずみ—ダイレタンシー関係を規定したいと考えている。

## 6. 繰り返しせん断試験とその微視的考察

繰り返しせん断試験は、通常の静的せん断試験と振動せん断試験の間の力学特性を表現するであろうという考えからも、応力履歴の影響を調べるためにも、よく行なわれている。繰り返しせん断により得られた力学特性はよく通常の静的せん断試験の示す力学特性と比較されその差が議論されるが、最終的には粒子構造の差にその原因を求めることが多いようである。そこで 5. で述べたように、粒子構造を評価する一つの指標と考えられる粒子接点角 $\theta$ の度数分布の概念を用いて、繰り返しせん断試験の示す力学特性の本質的な意味を微視的立場から考察する。ここでは通常の静的せん断と繰り返しせん断の示す力学特性の差のうち、最も代表的な次の問題を取り上げた。繰り返しせん断を受けると、間げき比が大きくなっている場合でも、なぜ応力—ひずみ関係の勾配が通常のせん断のときの勾配と比べて大きくなるかという問題である。

5. で述べたように通常の静的せん断の場合には、初期状態のほぼランダムな $\theta$ の度数分布形から、せん断変位にともなってせん断抵抗に有利な $\theta$ の正の変域にかたよったピークをもつ分布形に変化し、やがて

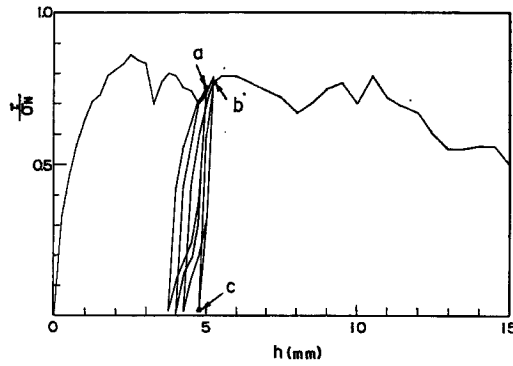


Fig. 17 Stress ratio ( $\tau/\sigma_N$ )-shear displacement ( $h$ ) curve obtained by repetitional loading test for pile of aluminium rods.

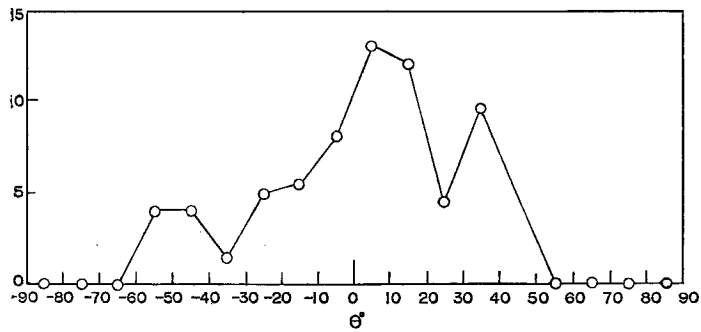


Fig. 18 Frequency distribution of  $\theta$  at point a in Fig. 17.

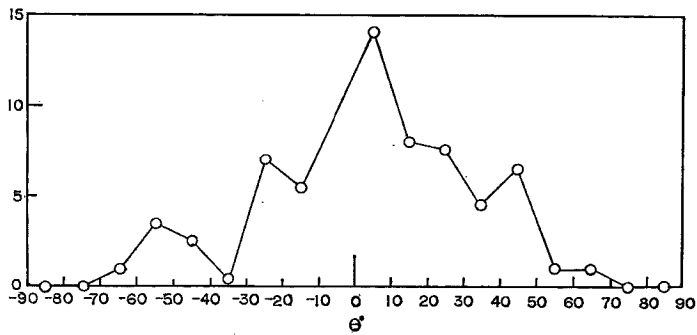


Fig. 19 Frequency distribution of  $\theta$  at point c in Fig. 17.



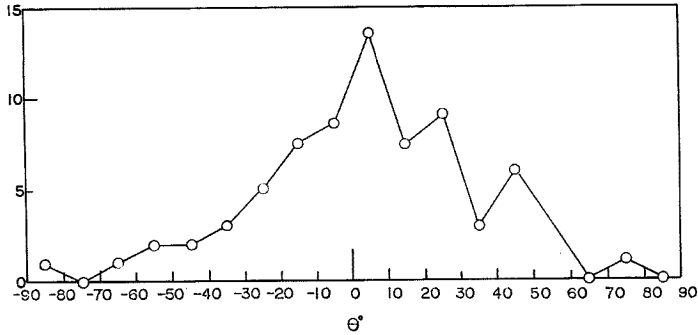


Fig. 20 Frequency distribution of  $\theta$  at point b in Fig. 17.

ピーク強度になるようである。したがって、せん断変位にともなって粒子構造を変化しつつせん断抵抗を發揮しピーク強度に至ると考えられ、そのとき単位せん断変位量あたりに發揮されるせん断抵抗が、応力-ひずみ関係の勾配に対応することになる。

Fig. 17 は4種の径 ( $\phi 1.6 \text{ mm}$ ,  $\phi 3 \text{ mm}$ ,  $\phi 5 \text{ mm}$ ,  $\phi 9 \text{ mm}$ ) のアルミ棒の混合積層体の繰り返しせん断試験結果を応力比-せん断変位関係で示したものである。Fig. 18 は Fig. 17 の繰り返し開始点 a 点での  $\theta$  の度数分布を示しており、Fig. 19 は5回目の繰り返しで応力の下った c 点での  $\theta$  の度数分布であり、Fig. 20 は5回目の繰り返しで応力がもともどった点 b での  $\theta$  の度数分布である。この実験では5回の繰り返しを行なっている。なお Fig. 17 で繰り返しで応力を下げたときに正確に0となっていないのは、試験機の欠陥によるものであるが、この程度の誤差はこれからの議論の本質的な障害にはならないと考える。

さて繰り返しせん断の場合には、たとえば Fig. 17 の a 点までせん断され Fig. 18 に示される  $\theta$  の度数分布に対応する粒子構造になった粒状体に対して、逆方向にせん断変位を与えて応力を下げ、その後再びもとの方向にせん断変位を与えて、もとの応力レベルまで上げることを行なうわけである。5回繰り返された後の c 点での  $\theta$  の度数分布 (Fig. 19) は、a 点での  $\theta$  の度数分布 (Fig. 18) と類似しており、また c 点から応力を上げた b 点での  $\theta$  の度数分布 (Fig. 20) は c 点での  $\theta$  の度数分布と極めてよく似ているのが

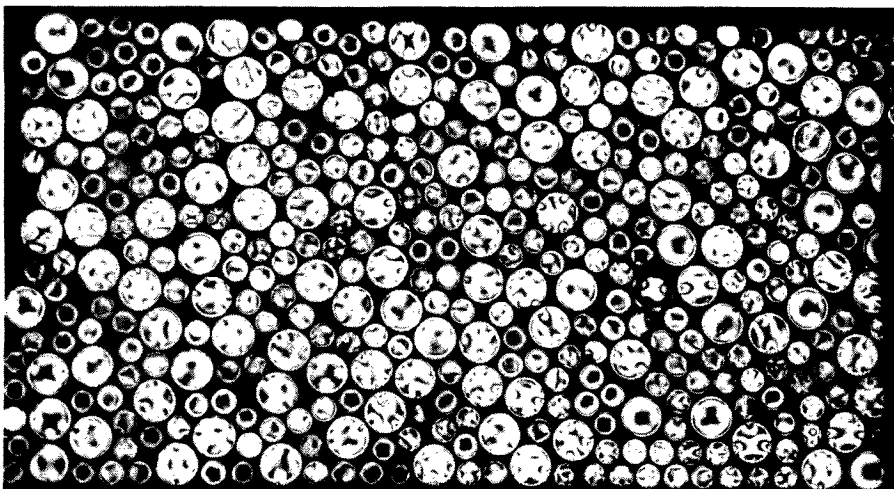


Photo. 4 Photograph obtained by the photoelastic experiment for pile of rods at the final point on reloading curve.

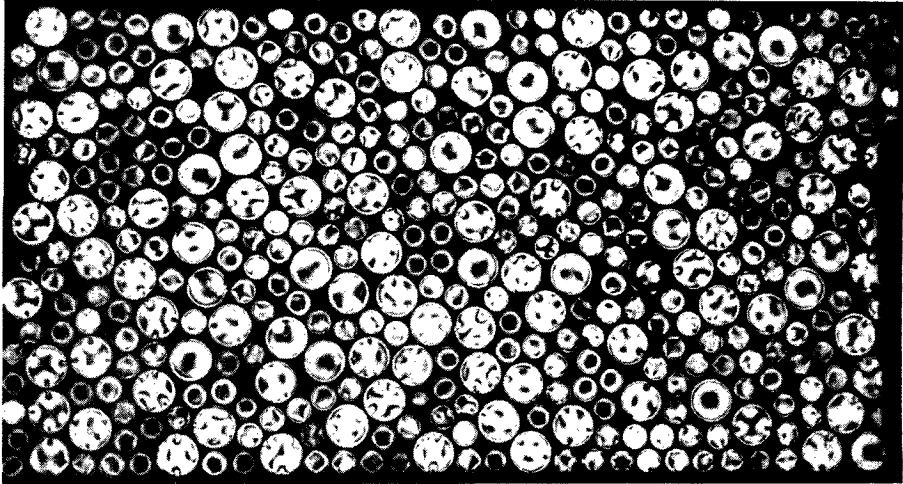


Photo. 5 Photograph obtained by the photoelastic experiment for pile rods at the final point on unloading curve.

みられる。したがって5回繰り返されても粒子構造は少々詰まる程度で根本的には変化しないと考えられ、c点からb点へ行く間には粒子構造上の変化はほとんどないと思われる

**Photos. 4** および **5** は光弾性材料の棒 ( $\phi 6.2$  mm,  $\phi 10$  mm) の混合積層体に対する繰返しせん断試験時の光弾性縮写真である。**Photo. 4** はせん断応力が作用しているときを示し **Photo. 5** は逆方向にせん断変位を与えてせん断応力を0としたときを示している。これらの写真より、繰返しせん断を受けても粒子構造はあまり顕著な変化をせず、ただせん断変位を与える方向によって粒子間力が作用したり、ぬけたりあるいはその伝達方向を変えたりするのが観察される。なお、これらの写真で粒子が互いに離れてみえるのは棒の長さが2cmあるため平行光線を通して棒の断面の周辺部までは光が十分通らないからである。

以上の考察より、繰返しせん断の場合には、ある応力を発揮しうる粒子構造になっている粒状体に対してその応力値と0の間(片振りの場合)を往復させるのであるから、粒子構造を根本的に変化させなくても、粒子間力が伝達されるか、ぬけるかによって繰返しの応力条件は満足させることができる。したがって粒子間力を伝達させるだけの微小なひずみで所要の応力値が得られるわけであり、たとえそれまでに受けた粒子構造の変化により間き比がより大きい状態にあっても、応力-ひずみ関係の勾配は大きくなる。これに対して、通常の静的せん断の場合には、先に述べたように、所要の応力値を発揮させるには粒子構造を変えねばならないので、比較的大きなひずみを与える必要があり、そのとき間き比がより小さい状態にあっても応力-ひずみ関係の勾配は繰返しせん断の場合と比べて小さくなると考えられる。したがって粒状体のせん断抵抗の大きさは必ずしも間き比のみによって規定されるものではなく、せん断面上の「粒子構造」を評価する粒子接点角  $\theta$  の度数分布の概念が重要となってくる。

このようにして、一例ではあるが繰返しせん断試験の示す力学特性の本質的な意味を微視的立場から明らかにすることができた。

## 7. 結 語

以上、粒状体の力学特性のよってきたるべき根本機構を解明するため、それらが粒子の集合体であるという本来の姿に着目してその挙動を微視的立場で解析し、微視的特性と巨視的特性との相関を考察した。この立場で解析するため、粒状体の2次元モデルとしてアルミ棒および光弾性材料の棒の積層体を用いて、せん断試験を行なった。これより粒状体のせん断抵抗を支配する微視的要因として、粒子間伝達力  $f$ 、粒子間摩

擦角  $\bar{\theta}$  および粒子接点角  $\theta$  をあげ、それらを適確に評価して巨視的量としてのせん断抵抗 ( $\tau/\sigma_N$ ) をせん断面上の  $\theta$  の度数分布  $N_j(\theta_j)$  の関数として規定した。ここに  $\theta$  の度数分布はせん断面上の「粒子配置」あるいは「粒子構造」を評価する極めて重要な指標であって、粒状体の応力-ひずみ-ダイレタンス-関係と密接な相関性を示すものである。さらにこの  $\theta$  の度数分布の概念をもとにして、繰り返しせん断を受けるとなぜ応力-ひずみ関係の勾配が大きくなるのかという問題を明らかにした。

今後の研究課題としては、棒状モデルを用いて動的繰り返しせん断試験を行ない同様な微視的立場から解析すること、せん断ひずみ  $\gamma$  と  $\theta$  の度数分布の関係を求め粒状体の応力-ひずみ-ダイレタンス-関係を規定すること、および  $\theta$  の度数分布の概念によって3次元の実際の粒状体、例えば砂、砂利、碎石などの強度推定を行なえないかという問題などを考えている。

終りにあたり、修士卒業研究の一部として本研究に協力していただいた本学大学院修士課程学生坂東弘君および光弾性実験の協力を得た本学大学院修士課程学生森竹淳君に心からの謝意を表する次第である。

### 参 考 文 献

- 1) Newland, P. L. and B. H. Alley: Volume Change in Drained Triaxial Tests on Granular Materials, *Geotechnique*, Vol. 7, No.17, 1957, pp.17~34.
- 2) Rowe, P. W.: The Stress-dilatancy Relation for Static Equilibrium of an Assembly of Particles in Contact, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, Vol. 269, 1962, pp.500~527.
- 3) Mogami, T.: A Statistical Theory of Mechanics of Granular Materials, *Journ. Faculty of Eng. Univ. of Tokyo, Ser. (B)*, Vol. 28, No.2, 1965, pp.65~79.
- 4) 最上武雄・吉越洋: 砂礫の内部摩擦角について, 土木学会第23回年次学術講演概要Ⅲ-17, 昭和43, pp.51~52.
- 5) Murayama, S.: A Theoretical Consideration on a Behaviour of Sand, *Rheology and Soil Mechanics, Symposium Grenoble, April 1-8, 1964*, pp.146~159.
- 6) Murayama, S.: Strees-Strain-Time Behavior of Soils subjected to Deviatoric Stress, *Proc. 7th Int. Conf. SMFE, Vol. 1, 1969*, pp.297~305.
- 7) 村山朔郎・松岡元: 2次元粒状体の応力伝達についての試み, 土木学会関西支部年次学術講演会講演概要Ⅲ-17, 昭和44.
- 8) 村山朔郎・松岡元: 粒状体のせん断現象の微視的考察, 土木学会第24回年次学術講演会講演概要Ⅲ-8, 昭和44, pp.25~26.
- 9) たとえば, 村山朔郎・松岡元: 粒状土地盤の局部沈下現象について, 土木学会論文報告集, 第172号, 昭和44, pp.31~41.