

# 土中の応力波減衰に対する考察

赤井 浩一・堀 正幸

## CONSIDERATION ON THE STRESS WAVE ATTENUATION IN SOILS

By *Koichi AKAI* and *Masayuki HORI*

### Synopsis

In this paper the authors are mainly concerned with the propagation problem of stress wave through confined soils from a viewpoint of its attenuation by viscous damping. First the analytical solution is obtained for semi-infinite one-dimensional rods of some linear viscoelastic models, in the case of boundary stress forming a spike pulse with exponential decay. The results are confirmed by the shock tube test originally performed in the authors' laboratory. It is known that this type of apparatus is satisfactorily applicable to soil dynamics problems as the impact loading technique.

### 1. 序

土構造物を含む各種の土木構造物の設計に耐震の考慮が必要なことは、わが国においては論をまたない。ところで地震動を対象とする場合、衝撃に近いような短期の不規則な振動荷重に対する土や地盤の応答特性を調べる必要があり、とくに土や地盤の強度特性とともにその振動減衰特性を把握することが重要視される。

物質が振動の場に置かれるとき、入力エネルギーのいくらかは種々の機構で消散するが、これは内部摩擦という言葉で総称される。液体やガスに比べて固体のエネルギー消散特性は複雑であり、とくに土の場合には多くの実験データが要求される。元来、物質のエネルギー消散を定義する間接的な方法はいくつかあるが、それらのほとんどは復元力が振動振幅に比例し、消散力が速度に比例するという線形粘弾性減衰機構を仮定しているものが多い。

本文では、おもに表面に衝撃を与えた場合の土中の一次元応力波減衰について理論的考察を行ない、側方拘束土に対する実験結果を用いてその妥当性を検討するものである。

### 2. 双曲型方程式と放物型方程式の特性と相互の関連性

土質力学において現われる問題を、基礎となる準線形二階偏微分方程式

$$Ar + Bs + Ct = D \dots \dots \dots (1)$$

によって分類すれば、双曲型・放物型・楕円型の3つとなり、これらはそれぞれ伝搬問題・擬似定常問題・平衡問題として現象的に説明される<sup>1), 2)</sup>。ここでは考察の対象上平衡問題を論外として、双曲型と放物型の両方程式の特性と相互の関連性について調べよう。

通常、双曲型の代表的な方程式として、線形弾性体内の波動の式があげられる。すなわち変位を  $u$  として、

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

ただし添字  $t, x$  はそれぞれ時間および距離に関する偏微分を表わす。上式は伝搬過程の式であって、境界で与えられた攪乱が一定速度  $c = \sqrt{E/\rho}$  ( $E$ : 弾性体のヤング率,  $\rho$ : 密度) をもって媒質内を伝わり、波形に崩れはない。しかし実際の波動伝搬では、種々のエネルギー吸収によって通過距離による波形の崩れが観察

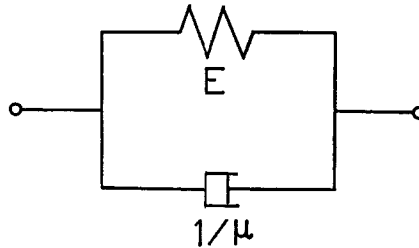


Fig. 1 Voigt model.

される。この現象を説明するためには、たとえば媒質を弾性体から粘弾性体に変えて、(2)式に減衰項を付加すればよい。

いま線形粘弾性体として Fig. 1 の Voigt のモデルをとれば、波動の式は

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - \alpha u_{xxt} = 0 \quad (3)$$

となる。ここに  $\alpha = 1/\rho\mu$ 、 $1/\mu$  は粘性係数である。このモデルでは、ばねとダッシュポットが並列につながっているため波速は無窮大となり、衝撃的攪乱に対して媒質は剛体のようにふるまうが、ピークを過ぎてからの波形の崩れは十分説明することができる。

一方、放物型の代表例として、線形媒質内の非定常熱伝導の式

$$u_t - \kappa^2 u_{xx} = 0 \quad (4)$$

を考える。ここに  $u$  は温度、 $\kappa$  は媒質の熱伝導率である。元来、特性帯の理論からみると、放物型においては距離  $x$  に関しては楕円型に似て、時間  $t$  に関しては双曲型に近い。つまり空間 ( $x$ ) 方向に対して解析接続が唯一であるという意味において、熱の伝搬には速度無限大という概念が関連している。しかし楕円型と異なり、すべての方向に伝搬速度  $c \rightarrow \infty$  なる性質があるのではなく、時間 ( $t$ ) 方向には双曲型を有し、時とともに温度分布  $u$  が変化してゆく<sup>3)</sup>。

このような性質から、波動伝搬における前述の波形の崩れと、いまの温度分布の時間的変化を類似しておくことが可能であろう。すなわち (3) 式と (4) 式の等価性が予想される。

いま (4) 式を形式的に時間  $t$  に関して微分すると、

$$u_{tt} - \kappa^2 u_{xxt} = 0 \quad (4)'$$

となり、これは (3) 式の左辺第2項を消去したものと同型である。(3)式において左辺第3項が第2項に比べてかなり大きい場合第2項を無視することができ、その結果は (4)' 式の形となって放物型と考えることができる。このことは、元来保存系であった双曲型の波動伝搬の式に減衰項を付加することによって非保存系としての放物型に変えるということであって、伝搬問題から擬定常問題への推移に果す減衰項の役割が非常に大きいことがわかる。以下では、土中の応力波伝搬を例にとってこの機構を論じよう。

### 3. ステップ型またはスパイク型パルスを一端にうける Voigt 体内の応力波伝搬

ステップ型の衝撃荷重に対する粘弾性ロッド内の一次元応力波伝搬問題は、Morrison らによって解かれている<sup>4), 5)</sup>。しかし、われわれが粘性土を用いて行なってきた縦衝撃実験において、表面で得られる衝撃応力の波形は瞬間的に立ち上がり、指数的に減衰するスパイク型のものであり、実際の地震波動の特性もむしろこれに近いものと考えられる。

いま半無限の一次元ロッドを考え、その表面で  $x=0$  とし、深さ方向に  $x$  軸の座標を考えると、運動方程式は

$$\rho u_{tt} = -\sigma_x \quad (5)$$

ここに  $\rho$  は媒質の密度、 $u$  は変位を表わし、応力  $\sigma$  は引張を正にとる。

変位  $u$  とひずみ  $\varepsilon$  の関係は、

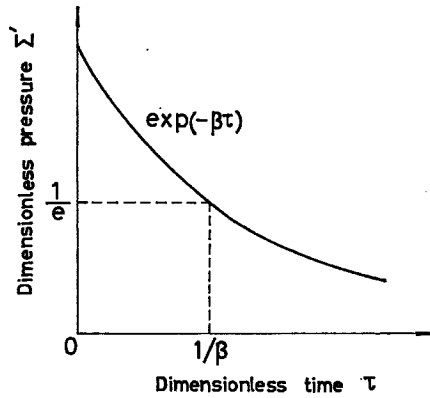


Fig. 2 Surface pressure.

$$\epsilon = -u_x \dots\dots\dots (6)$$

構成方程式は Fig. 1 の Voigt のモデルに対して

$$\sigma = E\epsilon + 1/\mu \cdot \dot{\epsilon} \dots\dots\dots (7)$$

(5), (6), (7) 式より基礎微分方程式は

$$\rho \sigma_{tt} = E\sigma_{xx} + 1/\mu \cdot \sigma_{xxt} \dots\dots\dots (8)$$

となる。この式の応力  $\sigma$  を変位  $u$  または粒子速度  $v$  と入れ換えても等価である。ここで無次元変数

$$\tau = E\mu t, \xi = \sqrt{\rho E \mu} x, \Sigma' = \sigma(x,t)/\sigma_0 \dots\dots\dots (9)$$

を用いると、式 (8) は次の偏微分方程式となる。

$$\Sigma'_{\tau\tau} = \Sigma'_{\xi\xi} + \Sigma'_{\xi\tau} \dots\dots\dots (10)$$

境界条件として

$$\Sigma'(\infty, \tau) = 0, \Sigma'(0, \tau) = \exp(-\beta\tau) \dots\dots\dots (11)$$

なるスパイクパルスをとれば、とくにステップパルスに対しては表面圧力の減衰に関するパラメーターを  $\beta=0$  とおくことにより一般化される (Fig. 2 参照)。

ラプラス変換の式

$$L\{f(\xi, \tau)\} = \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\xi, \tau) d\tau \dots\dots\dots (12)$$

を用いて、(10) 式より

$$s^2 L\{\Sigma'\} = (1+s)L\{\Sigma'\}_{\xi\xi} \dots\dots\dots (13)$$

(11) 式より

$$L\{\Sigma'(\infty, \tau)\} = 0, L\{\Sigma'(0, \tau)\} = \frac{1}{s+\beta} \dots\dots\dots (14)$$

常微分方程式 (13) を変換された境界条件 (14) のもとで解けば

$$L\{\Sigma'(\xi, \tau)\} = \frac{1}{s+\beta} \exp\left\{-\frac{\xi s}{1+s}\right\} \dots\dots\dots (15)$$

が写像場の解として得られる。そこで

$$\left. \begin{aligned} x(s) &= L\{x(t)\} && \text{および} \\ \phi(s) \exp\{-u\phi(s)\} &= L\{K(t, u)\} \\ \text{ならば} \\ \phi(s) x\{\phi(s)\} &= L\left\{\int_0^\infty K(t, u) x(u) du\right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

なる積分定理<sup>5)</sup>を用いて(15)式を実の場合へ逆変換すれば次式の解が求められる。

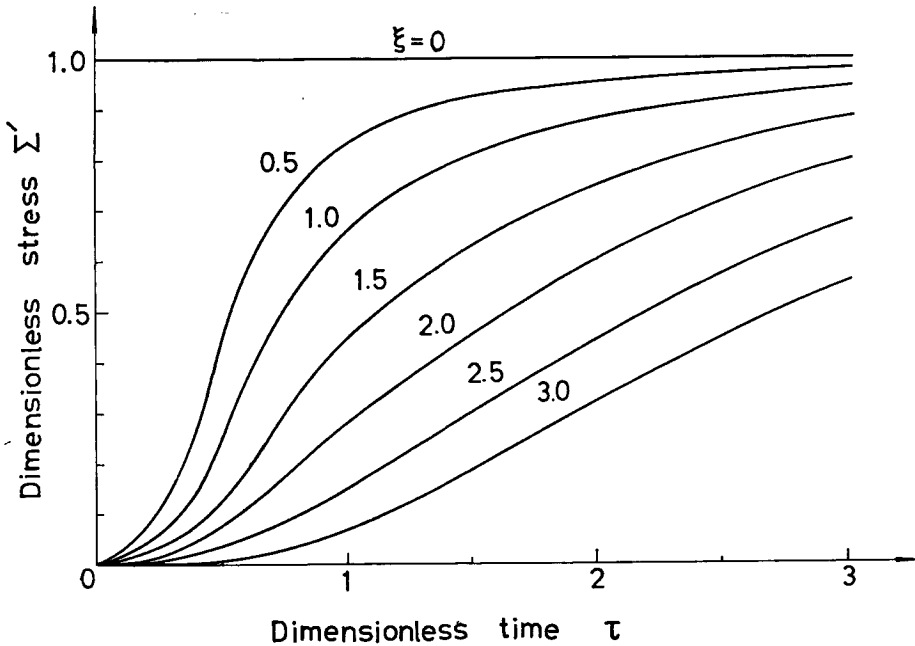


Fig. 3 (a) Response of Voigt model subjected to a step pulse.

$$\Sigma'(\xi; \tau) = \frac{\xi}{2\sqrt{\pi}} \exp(-\beta\tau) \int_0^\tau \frac{g(\tau, \eta)}{\sqrt{\eta^3}} \exp\left\{(\beta+1)\eta - \frac{\xi^2}{4\eta}\right\} d\eta \dots\dots\dots (17)$$

ここに

$$g(\tau, \eta) = \int_0^{\tau-\eta} \left\{ \exp(\beta-1)t \left\{ \delta(t) - \left(\frac{\eta}{t}\right)^{\frac{1}{2}} J_1(2\sqrt{\eta t}) \right\} dt \right\} \dots\dots\dots (18)$$

$$J_1(2\sqrt{\eta t}) = \sqrt{\eta t} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\eta t)^m}{m! \Gamma(m+2)}$$

とくに表面圧力の減衰に関するパラメーター  $\beta=0$  (ステップパルス) および  $\beta=1$  のときは、別の逆変換形を用いることによりそれぞれ次の解を得る。

1)  $\beta=0$  のとき :

$$\Sigma'(\xi; \tau) = \frac{e^{-\tau}}{\pi} \int_0^\tau \frac{\cos\{2\sqrt{\eta(\tau-\eta)}\}}{\sqrt{\eta(\tau-\eta)}} \exp\left(2\eta - \frac{\xi^2}{4\eta}\right) d\eta \dots\dots\dots (19)$$

2)  $\beta=1$  のとき :

$$\Sigma'(\xi; \tau) = \frac{e^{-\tau}}{\pi} \int_0^\tau \left[ \frac{\cos\{2\sqrt{\eta(\tau-\eta)}\}}{\sqrt{\eta(\tau-\eta)}} - \frac{\sin\{2\sqrt{\eta(\tau-\eta)}\}}{\eta} \right] \exp\left(2\eta - \frac{\xi^2}{4\eta}\right) d\eta \dots\dots\dots (20)$$

(19) 式は Morrison らが得たものであるが、これは (20) 式の右辺かっこ内第 2 項を除去した形となっており、(20) 式から表面圧力がスパイク型のときはステップ型の場合に比べて応力波が急速に減衰することを知らることができる。

Fig. 3 (a), (b) はそれぞれ (19) 式と (20) 式による応力解を示す。前者は Morrison が計算したものであり、後者は著者らが Simpson の積分公式により、京都大学大型計算機センター FACOM 230-60 で数値計算したものである。Voigt のモデルでは、その機構からも知られるとおり、衝撃をうけた瞬間には完全剛体の挙動を示し、無限大の波速で波のフロントがロッド内を進行する。また各深さにおける波動継続時間は波の進行とともに非常に大きくなり、波形の崩れがいちじるしい。これは同じ線形粘弾性体でも Maxwell のモデルと大いに異なる点である。

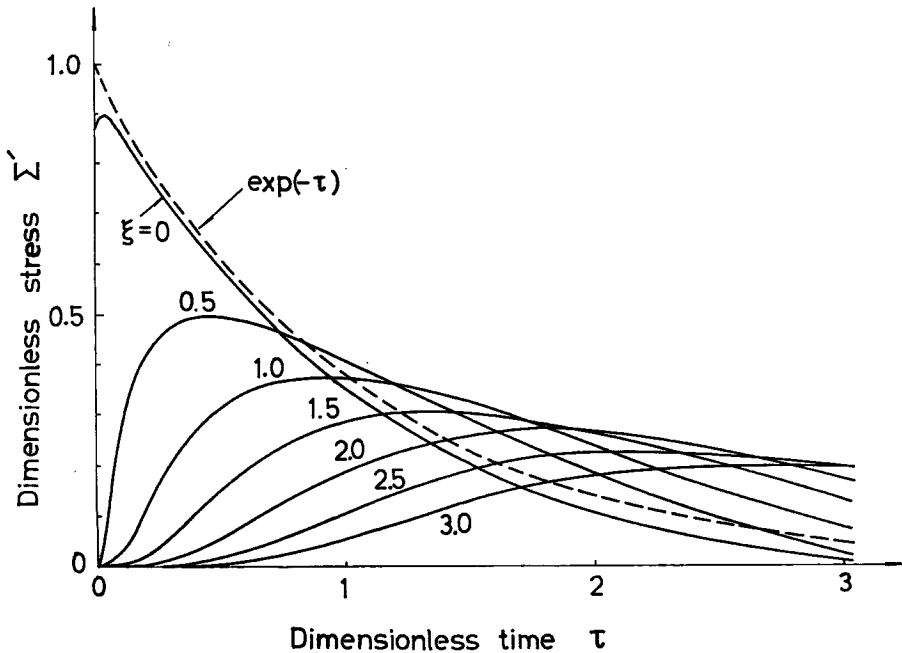


Fig. 3 (b) Response of Voigt model subjected to a spike pulse.

これらの図において、横軸とパラメーターにはそれぞれ(9)式の第1式および第2式で定義した無次元時間 $\tau$ と無次元距離 $\xi$ をとっているため、波動伝搬におよぼす減衰項の効果が陽に示されていない。そこで横軸を実時間 $t$ 、パラメーターを粘性係数 $1/\mu$ とした作図を行なって考察しよう。

Fig. 4 (a) はヤング率  $E=50\text{kg/cm}^2$ 、密度  $\gamma=1.65\text{g/cm}^3$  をもつ半無限の Voigt 体のロッドの端部にステップパルスを与えたとき、深さ  $x=50\text{cm}$  の位置における圧力の時間的変化を示したものであって、材料の粘性係数は  $1/\mu=0\sim 1.0\text{kg}\cdot\text{sec/cm}^2$  をとっている。 $1/\mu=0$  はダッシュポットのない完全弾性体を表わしており、このとき波のフロントは有限速度  $\sqrt{E/\rho}$  をもち、しかも波形の崩れは全くなく、ステップパルスがそのままの形でロッド内を伝わる。 $1/\mu$  がわずかでもあると、Voigt 体の機構からして理論上波速は無限大となるが、Fig. 4 (a) からわかるように実際は  $1/\mu$  が小さいほど有限なフロント波速が現われる。また  $1/\mu$  が大きいほどピーク応力に達する時間が遅れることが明らかである。

次にスパイク型の境界応力 ( $\beta=1$ ) に対しては、同様に Fig. 4 (b) が描かれる。この図においては  $E\mu=100\text{sec}^{-1}$  を一定とし、 $E$  と  $1/\mu$  の組合わせに対してさきの Fig. 4 (a) と同じく  $x=50\text{cm}$  の位置での応力波形が示されている。この図から土のレオロジー定数 ( $E, 1/\mu$ ) が小さくなるほど応力波がフラットになる傾向がみられる。Fig. 4 (a), (b) で同一のレオロジー定数をもつものは  $E=50\text{kg/cm}^2$ 、 $1/\mu=0.5\text{kg}\cdot\text{sec/cm}^2$  である。両図における曲線の形を比較するとわかるように、境界応力に時間的な減衰があるスパイクパルスの場合には、前述したとおり材料内を伝搬する応力波も急速に減衰することが明らかである。

ここで Voigt のモデルに用いられるダッシュポットについて、波動伝搬における応答特性を調べてみよう。粘性係数  $1/\mu$  の値で検討すると、 $1/\mu\rightarrow\infty$  では材料は剛体と考えられ、入力エネルギーはロッドの長さ方向に無限大の速さで伝搬してしまい、その過程にエネルギーの減衰はない。また  $1/\mu\rightarrow 0$  であれば、ひずみ速度  $\dot{\epsilon}$  は無限大となってエネルギーをすべて吸収してしまい、長さ方向へのエネルギー伝搬はなくなる。このとき吸収されたエネルギーは時間方向へ伝搬してゆく。すなわち、2 で述べたように粘性係数  $1/\mu$  は熱伝導率  $\kappa$  に相当し、現象的に上記のことは  $\kappa=0$  のときに温度こう配があるにもかかわらず、媒質内を温

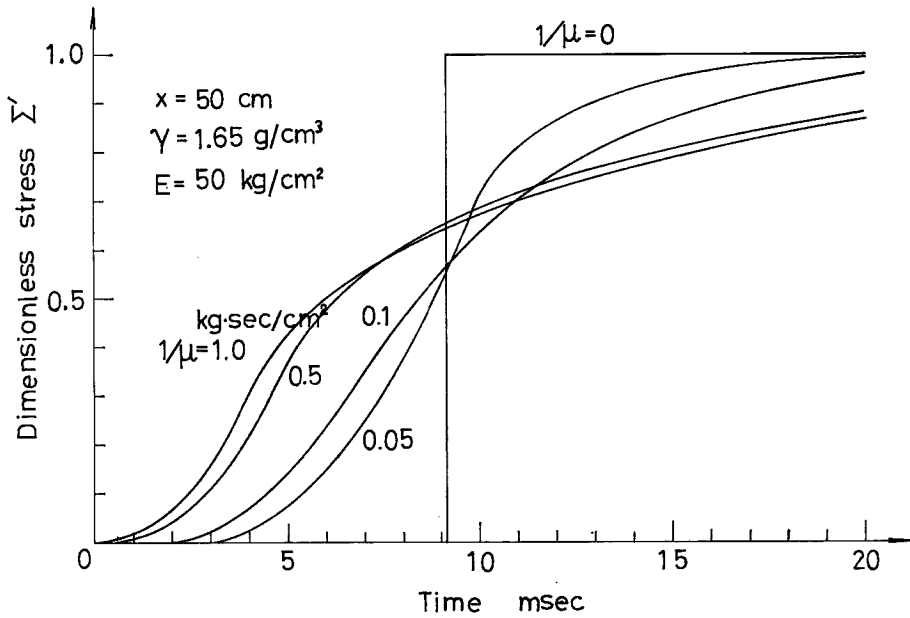


Fig. 4 (a) Variation of wave form with viscoelastic constant in Voigt model under a step pulse.

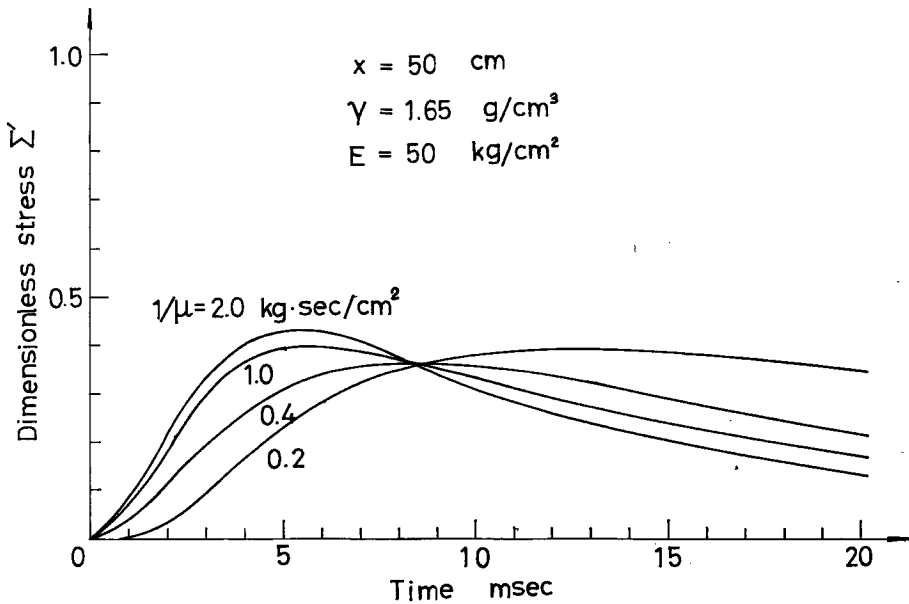


Fig. 4 (b) Variation of wave form with viscoelastic constant in Voigt model under a spike pulse.

度が伝わらないことと対応する。

Voigt 体では、その構造上、粘性係数  $1/\mu$  が小さいと、応力（エネルギー）はおもにばねによって伝達され、ダッシュポットによるエネルギーの吸収は少なく、したがって波形の崩れも少ない。これとは逆に  $1/\mu$  が大きいと、応力（エネルギー）はおもにダッシュポットによって伝達されるが、粘性が大きいのでエネルギーの吸収はやはり少なく、波動伝搬は剛体の波形に近づいてゆく。結局、 $E$  と  $1/\mu$  の相対的な大きさによってばねとダッシュポットに分担される伝搬応力（エネルギー）の割合が変わり、 $E$  の値に応じてエネルギー吸収が最大となるような  $1/\mu$  の値が決まるものと考えられる。

4. 三要素線形粘弾性モデル

3 で述べた Voigt のモデルでは、媒質内の有限な波速を理論的に説明することが不可能であり、また波のフロントの到達時における応力の鋭い立上りを表現することができない。このような現象は一般にばねが直列に入ったレオロジー・モデルによって説明されるが、最も簡単な Maxwell のモデル (Fig. 5 参照) では波形の減衰が速すぎて波動の持続が表現されない。そこで衝撃荷重をうける物質表面の近傍で応力の不連続なジャンプがあり、しかも波の後方で波形の崩れをもつような特性を表わすのに、三要素線形粘弾性モデルが導入される。

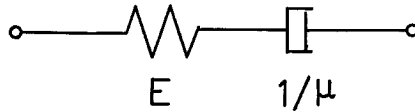


Fig. 5 Maxwell model.

一般に有限波速を示しうる真の三要素線形粘弾性モデルには 2 種類ある。すなわち Fig. 6 (a) の標準線形粘弾性モデルと、(b) のばね-Voigt 系モデルである。これらはいずれも 2 つのばねと 1 つのダッシュポットの組合わせであり、その構成方程式はそれぞれ次のように表わされる。

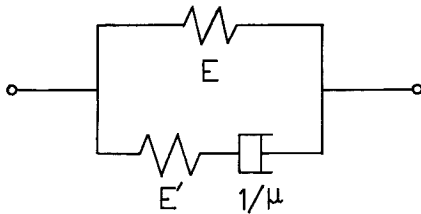


Fig. 6 (a) Standard linear viscoelastic model.

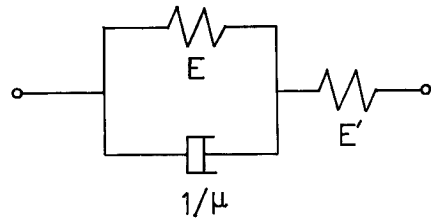


Fig. 6 (b) Spring-Voigt model.

(a) 標準線形粘弾性モデル

$$\frac{\sigma_t}{E'} + \mu \sigma = \epsilon_t \left(1 + \frac{E}{E'}\right) + E \mu \epsilon \dots\dots\dots (21)$$

(b) ばね-Voigt 系モデル

$$E \epsilon + \frac{1}{\mu} \epsilon_t = \sigma \left(1 + \frac{E}{E'}\right) + \frac{\sigma_t}{E' \mu} \dots\dots\dots (22)$$

いま添字  $a, b$  で双方のレオロジー一定数を区別すれば、Morrison により

$$\frac{E_b}{E_a} = \frac{E_b'}{E_a'} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\mu_b}} = 1 + \frac{E_a}{E_a'} \dots\dots\dots (23)$$

なる関係があるとき、両者は同一のものとなる<sup>4)</sup>。

(21) 式で表わされる標準線形粘弾性モデルについては、ステップパルスに対して Morrison の解があり、またその重ね合わせにより著者らはスパイクパルス ( $\beta=1$ ) に対する一次元波動伝搬応答を Fig. 7 のよう

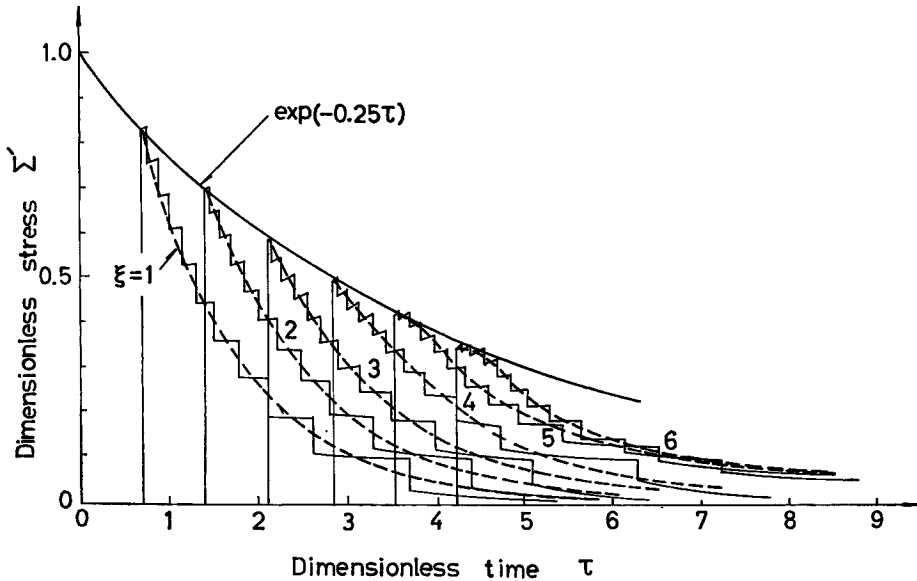


Fig. 7 Response of standard linear viscoelastic model subjected to a spike pulse. ( $k=1$ )

に示した。ただし  $E/E'=k=1$  としてある。このとき図から明らかなように、衝撃面での圧力の減衰は  $\exp(-0.25\tau)$  の形となる。また応力伝搬の特性は、衝撃荷重をうける表面の近傍で応力の不連続なジャンプがあり、この部分で波形の崩れはない。そしてやや深いところになると、波のフロントに丸味を帯びるようになり、さらに深部ではピーク応力はもはやフロントでは生ぜず、波形の崩れがいちじるしくなる。

一方、(22) 式のばね -Voigt 系モデルでは、(9) 式の無次元変数を用いて基礎微分方程式は

$$\Sigma_{\xi\xi}' + \Sigma_{\xi\xi r}' = (1+k)\Sigma_{\xi\xi r}' + k\Sigma_{\xi\xi r r}' \dots\dots\dots (24)$$

で表わされる。そこで (11) 式と同じ境界条件 (写像場では (14) 式) のもとでの写像解を求めると、

$$L\{\Sigma'(\xi, \tau)\} = \frac{1}{s+\beta} \exp\left\{-\frac{s\sqrt{ks+k+1}}{\sqrt{s+1}}\xi\right\} \dots\dots\dots (25)$$

となり、ラプラスの逆変換定理を用いて次の解を得る。

$$\Sigma'(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} \frac{1}{s+\beta} e^{s\tau} e^{-\frac{s\sqrt{ks+k+1}}{\sqrt{s+1}}\xi} ds \dots\dots\dots (26)$$

式 (26) は  $s=-\beta$  で simple pole,  $s=-1, -\frac{k+1}{k}$  で branch point をもつ。そこで Fig. 8 に示す contour ABCDA を考え、積分

$$I = \int_{s+\beta} \frac{1}{s+\beta} e^{s\tau} e^{-\frac{s\sqrt{ks+k+1}}{\sqrt{s+1}}\xi} ds \dots\dots\dots (27)$$

とおく。

(1)  $\beta > \frac{k+1}{k}$  の場合

simple pole  $s=-\beta$  は Fig. 8 の contour ABCDA の外側にあり、Cauchy の積分定理により

$$\left. \begin{aligned} \oint &= I_{AB} + I_{BC} + I_{CD} + I_{DA} = 0 \\ \therefore I_{AB} &= -I_{BC} - I_{CD} - I_{DA} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

ここで  $(I_{BC} + I_{DA})$  は弧 BCDA の半径  $R$  を無限大にもつていくとき、Jordan's lemma<sup>7)</sup> により次式の条



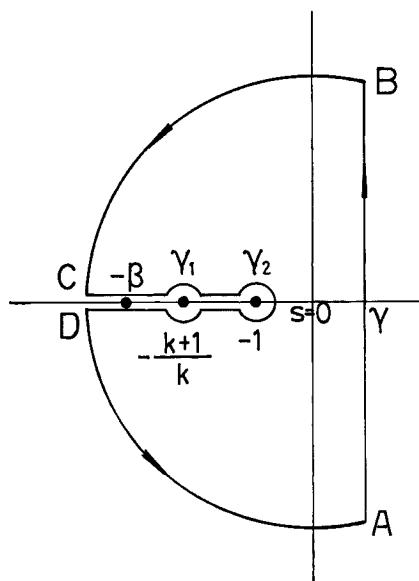


Fig. 8 Integral contour with the simple pole outside.

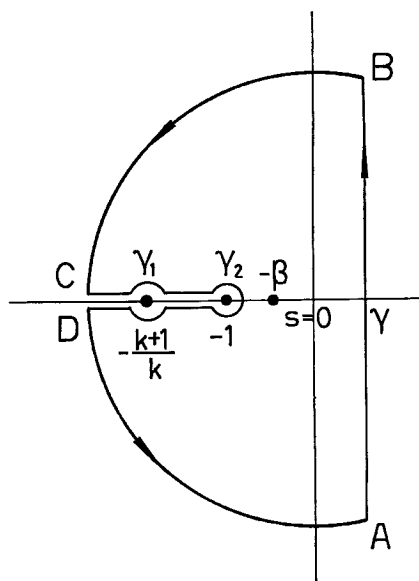


Fig. 9 Integral contour with the simple pole inside.

件が満足されれば収束して 0 となる。

$$\tau - \sqrt{k}\xi > 0 \dots\dots\dots (29)$$

すなわち、逆変換積分は  $I_{AB} = -I_{CD}$  となり、contour CD についてののみ求めればよいことになる。そこで C 点から D 点までの経路を Fig. 8 のように数個に区切って個別に計算すると、結局 (26) 式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Sigma'(\xi, \tau) &= e^{-\beta\tau} e^{\frac{\beta\sqrt{k}\xi - k - 1}{\sqrt{\beta-1}}\tau} - \frac{1}{\beta-1} \xi^2 e^{-\tau} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^k \frac{1}{q+1-\beta} e^{-(q+1)\tau} \cdot \sin\left\{ \frac{(q+1)\sqrt{1-kq}\xi}{\sqrt{q}} \right\} dq \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

(2)  $\frac{k+1}{k} \geq \beta > 1$  の場合

(1) と同様な方法で次式の解を得る。

$$\begin{aligned} \Sigma'(\xi, \tau) &= e^{-\beta\tau} \cdot \cos\left\{ \frac{\beta\sqrt{k+1-k\beta}\xi}{\sqrt{\beta-1}} \right\} - \frac{1}{\beta-1} \xi^2 e^{-\tau} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^k \frac{1}{q+1-\beta} e^{-(q+1)\tau} \cdot \sin\left\{ \frac{(q+1)\sqrt{1-kq}\xi}{\sqrt{q}} \right\} dq \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

(3)  $\beta=1$  の場合

(27) 式の積分において  $\beta=1$  をとれば、

$$I = \int \frac{1}{s+1} e^{s\tau} e^{\frac{s\sqrt{k}\xi + k + 1}{\sqrt{s+1}}\tau} ds \dots\dots\dots (32)$$

Fig. 8 の contour  $\gamma_2$  のまわりの値を知るには、(32) 式の被積分関数の  $s=-1$  における留数を求めればよい。その値は明らかに 1 である。残りの contour については (1) と同様な手法により、結局次式が得られる。

$$\Sigma'(\xi, \tau) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^k \frac{1}{q} e^{-(q+1)\tau} \cdot \sin\left\{ \frac{(q+1)\sqrt{1-kq}\xi}{\sqrt{q}} \right\} dq \dots\dots\dots (33)$$

(4)  $0 \leq \beta < 1$  の場合

simple pole  $s = -\beta$  が Fig. 9 のように contour ABCDA の内部にあるため, Cauchy の積分定理より

$$\oint = I_{AB} + I_{BC} + I_{CD} + I_{DA} = 2\pi i \quad \dots\dots\dots (34)$$

$$\therefore I_{AB} = 2\pi i - I_{BC} - I_{CD} - I_{DA}$$

(1) と同様に  $I_{BC} + I_{DA} = 0 \quad \therefore I_{AB} = 2\pi i - I_{CD}$

また

$$I_{CD} = \frac{2\pi i}{\beta - 1} \xi^2 e^{-\tau} + 2i \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{1}{q+1-\beta} e^{-(q+1)\tau} \cdot \sin\left\{\frac{(q+1)\sqrt{1-kq}\xi}{\sqrt{q}}\right\} dq$$

したがって,

$$\Sigma'(\xi, \tau) = 1 - \frac{1}{\beta - 1} \xi^2 e^{-\tau} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{1}{q+1-\beta} e^{-(q+1)\tau} \cdot \sin\left\{\frac{(q+1)\sqrt{1-kq}\xi}{\sqrt{q}}\right\} dq \quad \dots\dots\dots (35)$$

以上の結果を総合して考察してみると, Jordan's lemma によって得られた (29) 式の条件は  $Re(s) < 0$  において得られるものである。そして  $Re(s) > 0$  での contour を考えた場合, Jordan's lemma は

$$\tau - \sqrt{k}\xi < 0 \quad \dots\dots\dots (36)$$

となる。しかるに  $Re(s) > 0$  の平面には特異点を含まないため, 半径  $R$  を無限大にしたとき式 (27) の積分は (36) 式の条件下で 0 に収束する。

このことから知られるように, Jordan's lemma は数学的には, ある単一閉曲線に沿う積分の収束条件を表わすものであり, 物理的には双曲型偏微分方程式によって解かれた波動のフロント (wave front) を表わすものである。この場合, もちろん用いたモデルが Fig. 6 (a), (b) のような瞬間応答 (instantaneous response) をもつものでは有限の波速を表わし, Voigt のモデル (Fig. 1) のようにこれをもたないものでは無限大の波速となる。また

$$\tau - \sqrt{k}\xi = 0 \quad \dots\dots\dots (37)$$

の場合は,  $\tau$  と  $\xi$  を式 (9) によりもとの変数に変換すると

$$E\mu t = \sqrt{\frac{E'}{E}} \sqrt{\rho E} \mu x$$

$$\therefore \frac{x}{t} = \sqrt{\frac{E'}{\rho}} \quad \dots\dots\dots (38)$$

この式で表わされる波速は, 明らかに rod velocity である。

## 5. Shock-tube による波動伝搬実験

### 5.1 概 説

地震波の震源から地表面までの伝搬過程における波動特性の研究, あるいは土が応力波に対して影響をおよぼす減衰特性の研究, ならびに急速载荷による土中の波動効果を含めた土の動的挙動を調べる上に, 一次元応力波伝搬問題の研究は重要な意義を有している。

従来的一次元応力波伝搬実験では, ある材料供試体のロッドの一端を物体で打撃することによりパルスのな応力を得て, ロッド内を伝わる応力をピックアップするという手法が多く用いられてきた。しかし打撃による表面応力はその都度波形もまちまちであり, また得られる応力の大きさの調整もむづかしく, 実験手法としてはむしろ原始的な方法である。

一方, Shock-tube では画一的で明瞭な衝撃面をもつ非常に高速の衝撃波が得られる。Shock-tube の歴史は古く, 気体力学の分野においてその理論は十分体系化されており, この装置を用いて得られる衝撃波の大きさおよび波形は理論的に計算でき, かつ調節が容易である。われわれは Shock-tube で得られる衝撃波を一次元側方拘束ロッドの土供試体の表面に加えるべく装置を製作し, 応力波伝搬実験の精度を増すことを意図した。

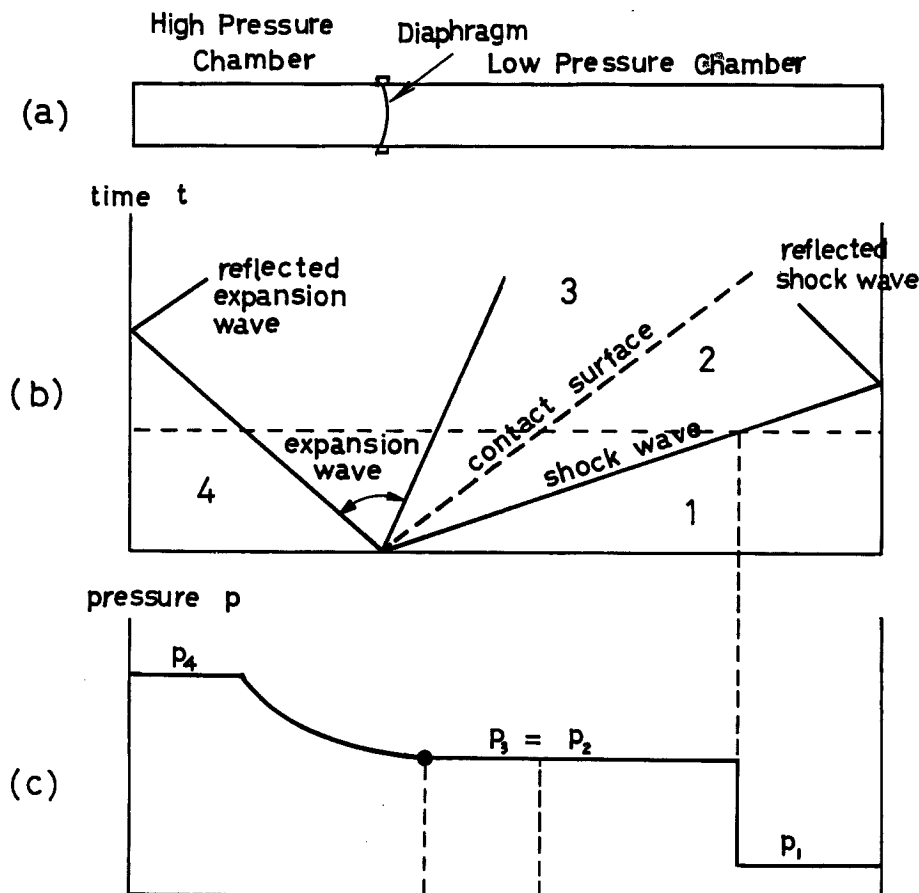


Fig. 10 Simple shock tube.

### 5.2 Shock-tube の原理

最も簡単な断面積一定の Shock-tube について述べる。Fig. 10 (a) はその代表的な型式のものである。この図のように、Shock-tube は高圧室 (drive) と低圧室 (driven) から構成されており、2つの室は膜 (たとえばアルミ板) で仕切られている。高圧室の圧力を徐々に上げてゆき、高圧室と低圧室の圧力差がある値に到達すると膜は破れ、その瞬間に高圧室の圧力が低圧室の管へ衝撃波となって伝搬する。

Fig. 10 (b), (c) は膜が破れた後  $t$  の時刻における Shock-tube 軸に沿う圧力分布を示す。図において、衝撃波と接触面との間の領域には添字 2 を、接触面と膨張波との間の領域には添字 3 を、そして高圧室の膨張波にまだ接していない領域には添字 4 をそれぞれつける。

衝撃波の強さは普通 Mach 数を用いて表わすが、それは得られる衝撃波の衝撃圧力と用いる気体の比熱比によって次式から求められる。

$$M_1^2 = \frac{(\gamma+1) \frac{P_2}{P_1} + (\gamma-1)}{2\gamma} \dots\dots\dots (39)$$

ここに  $M_1$  : Mach 数,  $\gamma$  : 比熱比 (=定圧比熱/定積比熱, 空気 1.404, 窒素 1.404)。

衝撃波の低圧室末端での反射圧力を考慮したときの圧力の大きさ  $p_s$  は次式で与えられる<sup>8)</sup>。

$$\frac{P_5}{P_1} = \left\{ \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \right\} \left\{ \frac{(3\gamma - 1)M_1^2 - 2(\gamma - 1)}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2} \right\} \dots \dots \dots (40)$$

このようにして発生した衝撃波は、高圧室の圧力が放出されて管内が一様な圧力となるまで Shock-tube の両端を何回か往復する。

### 5.3 Shock-tube の構造

今回設計製作した Shock-tube による土の衝撃载荷装置を Fig. 11 に示す。一般に低圧室の長さが管の内径の10倍以上あれば、得られる衝撃波は一様となることが実験的に知られている。

実験の安全性を高めると同時に、正確に制御された衝撃圧力を得るため、Shock-tube には窒素ガスを用いる2段隔膜方式を採用した。すなわち Fig. 11 (a) のように Shock-tube は高圧・中圧・低圧の3室からなり、隔膜は高圧室と中圧室の間と、中圧室と低圧室の間との合計2枚装置される。たとえば、高圧室と低圧室にそれぞれ 20bar と 1 bar の圧力を吸入させる場合には、中圧室にはその中間の圧力、すなわち 10.5 bar の圧力を吸入しておけばよい。そのさい膜は 9.5 bar の圧力差に十分耐えることができるが、圧力差 19 bar では完全に破れるものが必要である。実際の操作は、各室にそれぞれの圧力を吸入しおえたのち、中圧室の圧力を抜き去ることにより高圧室と中圧室の圧力差が大きくなって膜Aが破れ、それとほとんど同時に膜Bも破れて衝撃波が低圧室に伝搬する。膜 A, B にはアルミ板 (厚さ 0.05 mm, 0.1 mm, 0.2 mm および 0.3 mm) を用いた。この Shock-tube の部分全体は十分高圧に耐えうる良質の鉄管を用いており、80 bar の油圧耐圧試験に合格したものである。

次に低圧室の末端に接続させる供試体部分の寸法は内径 76mm, 長さ 2m である。このように長い供試体を用いるのは、土中を伝わる応力波が供試体の最終端 (反力端) で発生する反射波をできるだけ除外するためと、波速の観測精度を向上させるためである。この供試体部分は取り外しが可能な5つのセグメントからなり、実験用に製作した長さ 40 cm, 内径 74 mm の特殊モールドで突固めた土試料を挿入しやすいように考慮されている。供試体部分の鉄管の内面は十分研磨されており、土試料には非常に薄いテフロンシートを巻

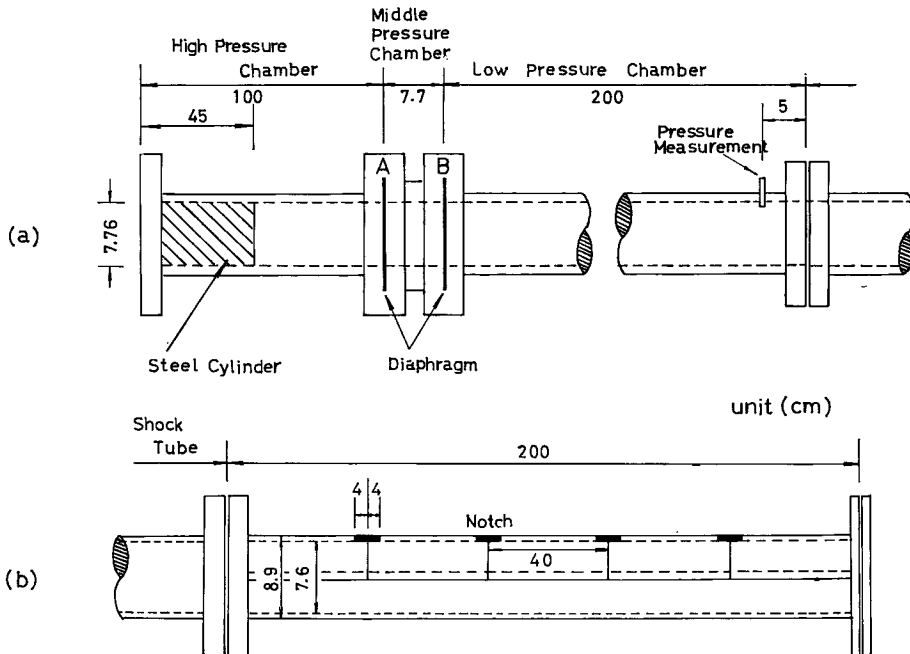


Fig. 11 Schematic diagram of shock tube and confining tube designed.

き、さらにその間には油を塗布して管の内面での摩擦を減じ、できるだけ正確な拘束一次元状態をつくり出すようにしている。各セグメントの頂部に設けた切欠きは、土中に埋め込んだ各種ピックアップのリード線を引き出すためのものである (Fig. 11 (b) 参照)。

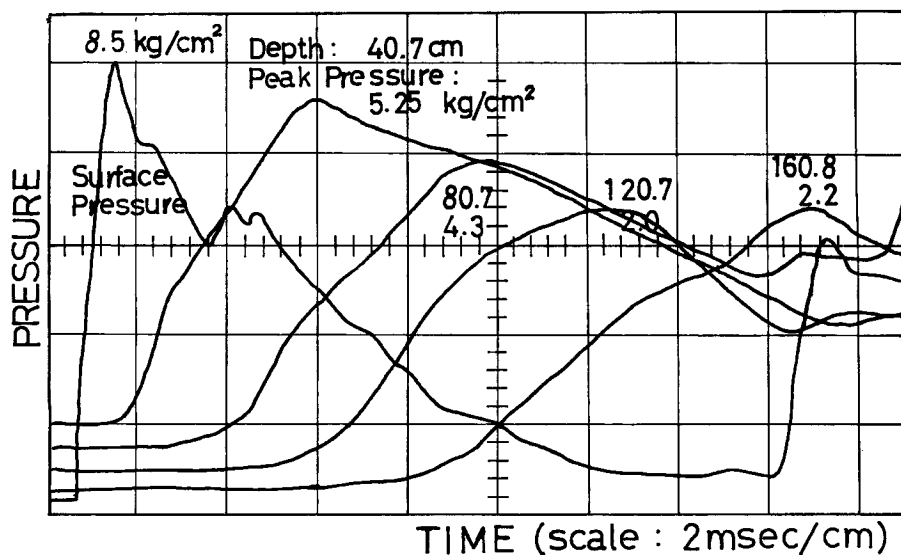


Fig. 12 Typical record of wave forms obtained from synchroscope.

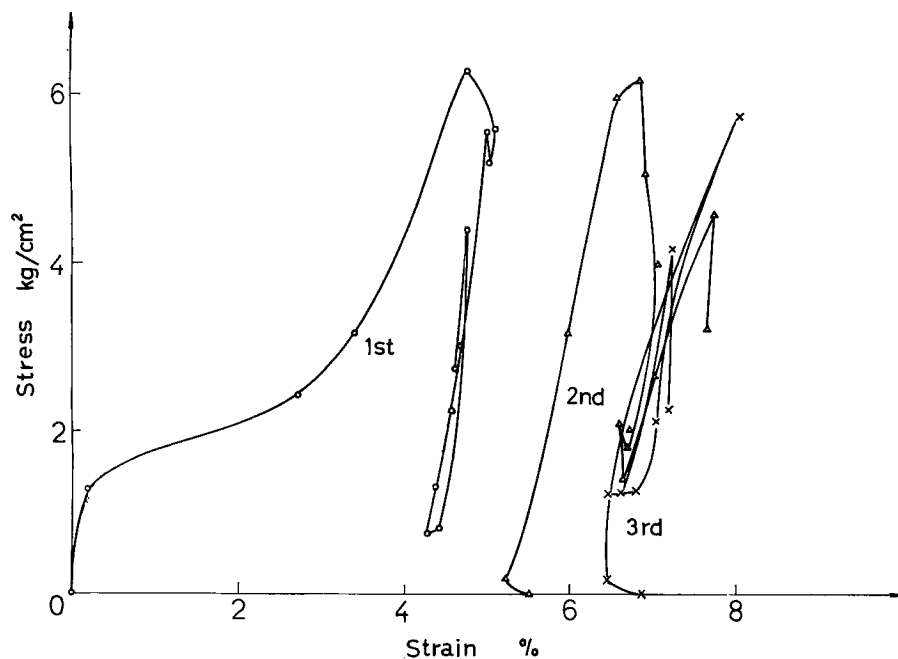


Fig. 13 Dynamic stress-strain curve.

#### 5.4 実験方法と実験結果

土試料として砂質ロームが用いられた。この実験シリーズにおいて試料の含水比は 5~7% とほぼ一定に保たれ、供試体作成時に突固め回数を調節することにより、見かけ密度として  $1.7\text{g/cm}^3$ ,  $1.8\text{g/cm}^3$  および  $1.9\text{g/cm}^3$  の 3 種類が使用された。これより間げき比を求めると、それぞれ  $0.66\sim 0.67$ ,  $0.56\sim 0.58$  および  $0.47\sim 0.49$  であり、いずれもほぼ一定の間げき比が保たれた。

供試体の衝撃端に作用する衝撃応力は、低圧室の末端から 5 cm の距離の点に取りつけられた圧力変換器によって観測される。Fig. 12 はこの表面圧力と供試体内各深さの点における応力をシンクロスコープで記録した一例である。また 1 つの測点について応力と同時に土中ひずみの測定も行ない、動的応力-ひずみ曲線を描いたものが Fig. 13 である。このさい、ひずみ計には静電容量式のものをを用いた<sup>9)</sup>。

土供試体にかかる表面圧力波形は、半対数紙上で時間に対して Fig. 14 のように直線となり、衝撃面を含んで  $0.6\sim 1.4\text{m sec}$  で急激に立ち上り、最大応力に達したのち指数的に減衰してゆく。立上り時間は圧力レベルに無関係のようであるが、いま表面圧力を

$$\sigma(0,t) = \sigma_0 \exp(-\alpha t) \quad \dots \dots \dots (41)$$

の形に近似したときのパラメーター  $\alpha$  は圧力レベルに応じて Fig. 15 の関係がある。

上述のように、実験では供試体表面での圧力レベルの大きさによる影響を観察するためにいくつかの表面

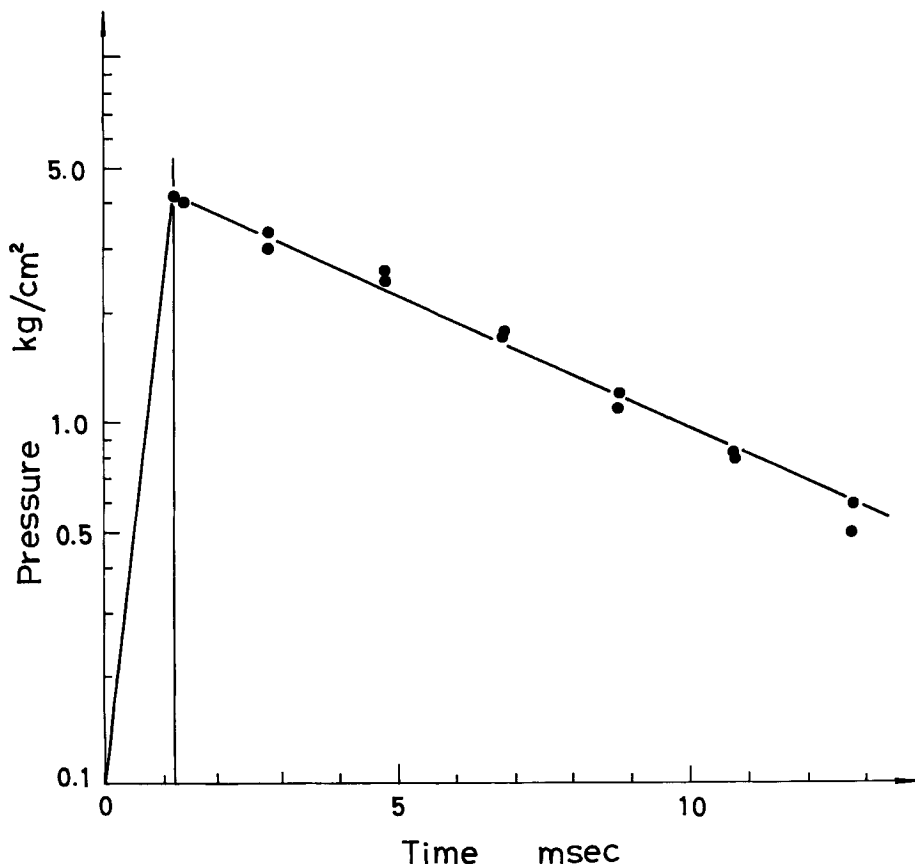


Fig. 14 Semi-logarithmic plot of soil surface pressure.

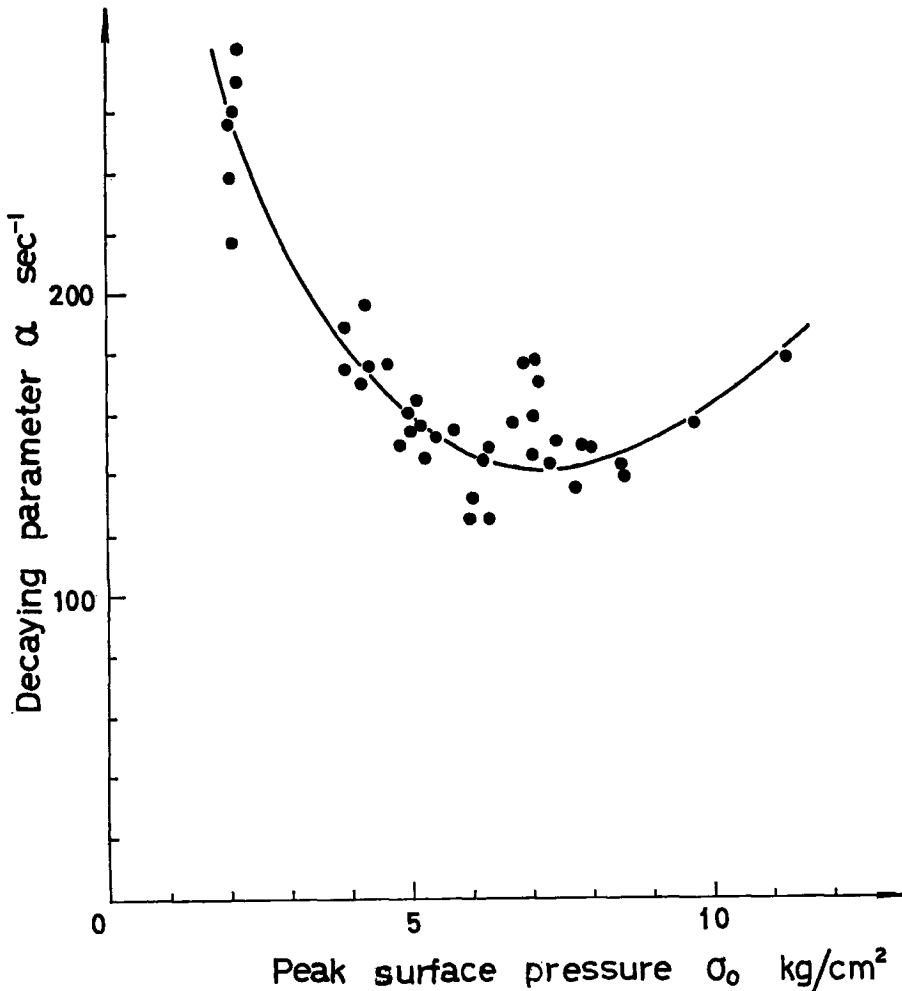


Fig. 15 Relationship between the decaying parameter and the peak surface pressure.

圧力が用いられた。しかしピーク応力  $\sigma$  の距離による減衰の様子は、無次元応力  $\Sigma' (= \sigma/\sigma_0)$  で整理すればそれほど表面応力  $\sigma_0$  の大きさには依存しないことがわかる。そこですべての実験結果の平均をとってプロットしたのが Fig. 16 である。この図から明らかなように、供試体の間げき比が小さいほど、応力の減衰は少ない。また Fig. 17 は Fig. 16 を半対数紙上にプロットしなおしたものであるが、これから距離によるピーク応力の減衰はほぼ指数関数的であると認められる。すなわち無次元応力  $\Sigma'$  は

$$\Sigma' = \exp(-\delta x) \dots \dots \dots (42)$$

で近似することが許されよう。ここに  $\delta$  は距離による波動伝搬の減衰係数である。いま  $x$  をメートルの単位で表わしたとき、各間げき比に応じて Fig. 17 に記入した  $\delta$  の値が求められ、これらの間げき比の対数に対してプロットすると Fig. 18 が描かれる。両者の関係はこの実験の範囲内では直線的である。

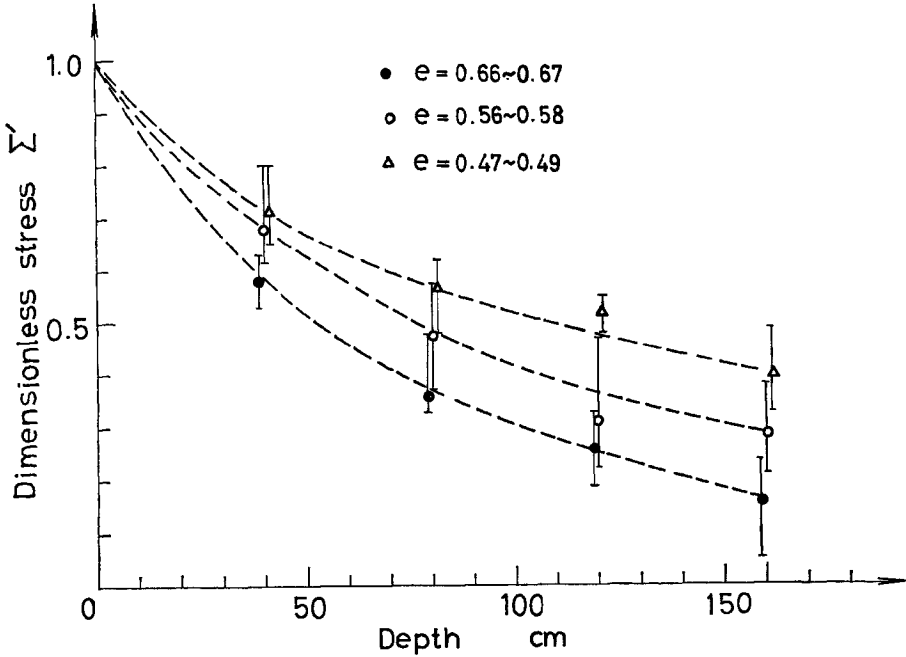


Fig. 16 Average peak stress attenuation.

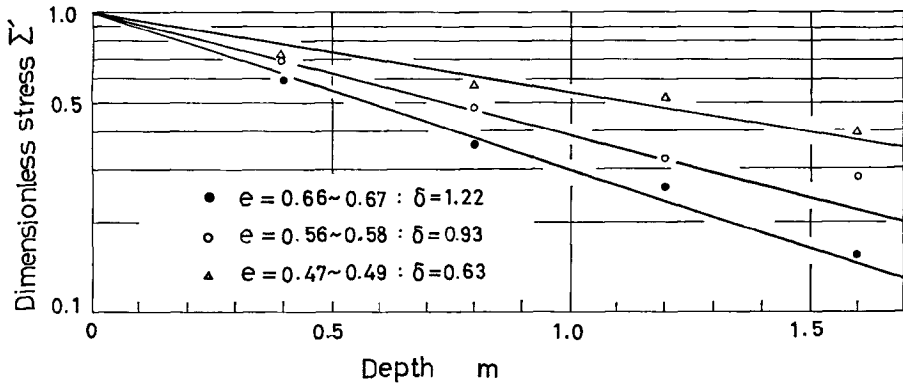


Fig. 17 Semi-logarithmic plot of average peak stress attenuation.

Fig. 18 の直線を左方へ延長すると、縦軸との交点として  $e=0.35$  を得る。これは減衰係数  $\delta=0$  なる間げき比に相当し、一次元応力波伝搬では弾性体を意味する。このときの間げき比が等半径の球の種々の詰め方のうちで最も密な詰め方としての pyramidal packing と tetrahedral packing の両者の理論的間げき比<sup>10)</sup>に一致していることは興味深い。



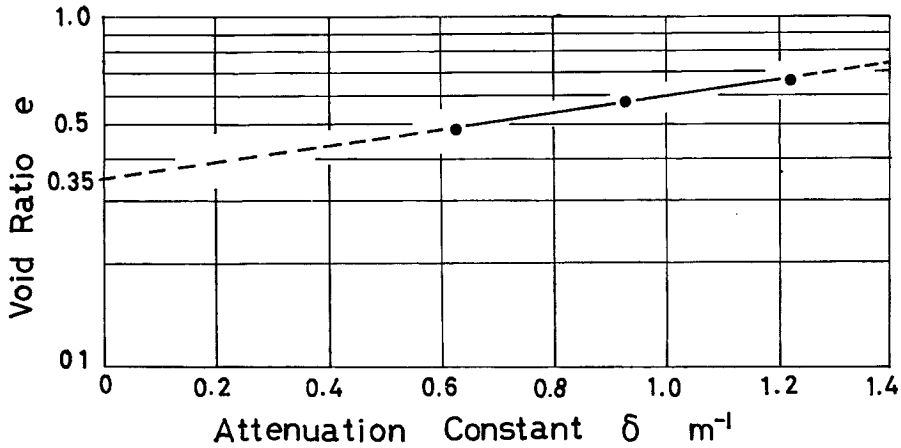


Fig. 18 Relationship between the void ratio (log.) and attenuation constant.

6. 解析式の数値計算と土の粘弾性定数の推定

前節で述べた Shock-tube による波動伝搬実験により得られた土の動的性質のうち、とくに伝搬距離によるピーク応力の減衰に注目して土の粘弾性定数を推定することを試みよう。

まず簡単なモデルとして、3 で述べた Voigt のモデル (Fig. 1) を仮定した場合、伝搬波の応力解は (17), (18) 式で与えられる。そこで Fig. 12 および Fig. 13 に示したような実験記録を用いて解析曲線の

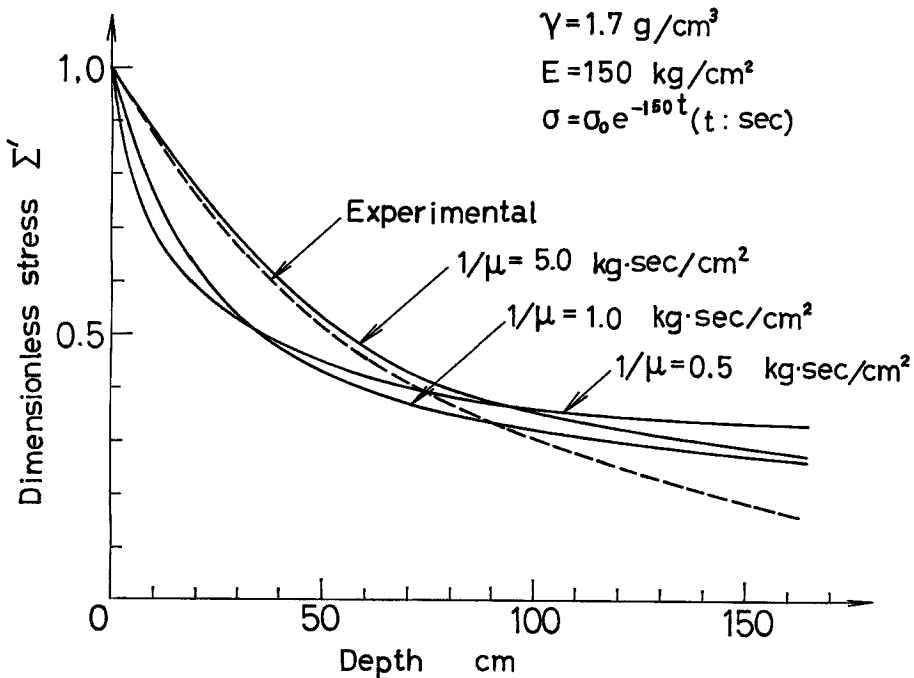


Fig. 19 Comparison of experimental with theoretical results. (Voigt model)

あてはめを行なうと、一例として Fig. 19 のような結果が得られる。このデータは、見かけ密度  $1.7\text{g/cm}^3$  の砂質ローム供試体に  $\sigma = \sigma_0 e^{-150t}$  ( $t$ : sec) なる表面荷重が作用したときの深さ方向のピーク応力を無次元化して、(42)式の形で示したものである。解析曲線としては、 $E = 150\text{kg/cm}^2$  で  $1/\mu = 0.5\text{kg}\cdot\text{sec/cm}^2$ ,  $1.0\text{kg}\cdot\text{sec/cm}^2$  および  $5.0\text{kg}\cdot\text{sec/cm}^2$  の 3 種類の場合のものを描いてある。これより  $x \approx 60\text{cm}$  までの波動減衰の様子は、粘弾性定数  $E = 150\text{kg/cm}^2$ ,  $1/\mu = 5.0\text{kg}\cdot\text{sec/cm}^2$  ( $\beta = 5$ ) をあてはめれば実験値とよく合うことが知られる。さらに距離の大きいところでは、実験値は理論値よりもいくぶん減衰が大きいことがわかる。したがって次に三要素線形粘弾性モデルとして、4 で述べたばね -Voigt 系モデルをとって考察しよう。

このモデルの場合、波速  $c$  は (38)式、すなわち  $c = \sqrt{E'/\rho}$  で与えられる。したがって、実験から得られた波速を使って  $E' = \rho c^2$  により  $E'$  を推定することができる。次に残り 2 つの粘弾性定数  $E$  と  $1/\mu$  の推定にさいし、畑野ら<sup>11)</sup> によって得られた実験結果は非常に参考となるであろう。彼らは粘土供試体について三軸セル内で強制振動実験を行ない、Fig. 20 に示される四要素の Burgers モデルを仮定して、その粘弾性

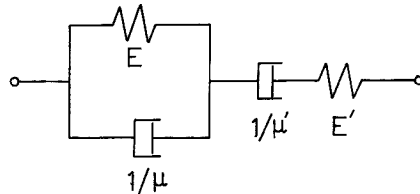


Fig. 20 Burgers model.

定数がある限られた領域における振動数と振幅の条件のもとで求めている。ばね -Voigt 系モデルおよび Burgers モデルの複素コンプライアンス  $E^*(\omega)$  は、それぞれ次の (43)式 と (44)式 で与えられる。

(a) ばね -Voigt 系モデル

$$E^*(\omega) = \left( \frac{1}{E'} + \frac{E}{E^2 + \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 \omega^2} \right) + i \left( -\frac{\frac{\omega}{\mu}}{E^2 + \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 \omega^2} \right) \dots\dots\dots (43)$$

(b) Burgers モデル

$$E^*(\omega) = \left( \frac{1}{E'} + \frac{E}{E^2 + \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 \omega^2} \right) + i \left( -\frac{\frac{\mu'}{\omega}}{E^2 + \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 \omega^2} + \frac{\frac{\omega}{\mu}}{E^2 + \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 \omega^2} \right) \dots\dots\dots (44)$$

上の 2 式を比較することにより、複素コンプライアンスの実数部は同一であり、仮に応力とひずみの位相差が無視しうる程度に小さければ、虚数部を省略することにより、両モデルの複素コンプライアンスが一致することがわかる。したがって、畑野らが Burgers モデルを用い、かつ応力とひずみの位相差がないという実験事実を考慮して求めた動的粘弾性定数は、われわれが考察しようとしているばね -Voigt 系モデルの定数の推定に役立つことが期待できる。参考のために求められた粘弾性定数のオーダーを Table 1 に示す。またすべての結果よりヤング率比  $k = E/E'$  を計算すると、その値はほぼ 1.0~4.0 の範囲にあることがわかった。実験により測定された波速  $c$  を用いて  $E' = \rho c^2$  から求めた  $E'$  は、砂質ローム供試体の見かけ密度

Table 1 Order of viscoelastic constants of Burgers model.

| $E$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $E'$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $1/\mu$<br>kg·sec/cm <sup>2</sup> | $1/\mu'$<br>kg·sec/cm <sup>2</sup> |
|---------------------------|----------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| 10 <sup>3</sup>           | 10 <sup>3</sup>            | 10 <sup>-4</sup>                  | 10 <sup>-2</sup>                   |

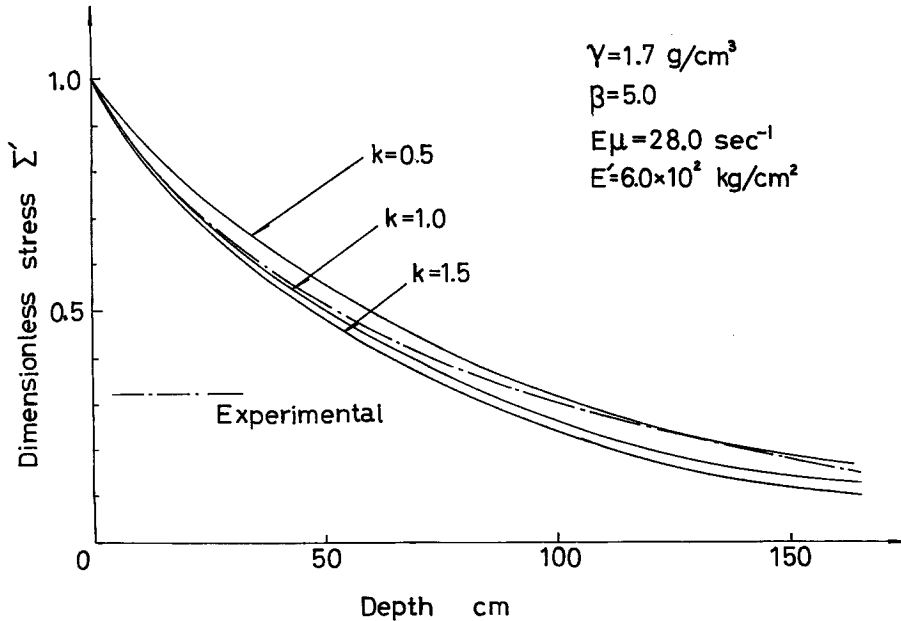


Fig. 21 Comparison of experimental with theoretical results. (spring-Voigt model)

$1.7\text{g/cm}^3$  の場合  $6.0 \times 10^2 \text{kg/cm}^2$ ,  $1.8\text{g/cm}^3$  の場合  $1.0 \times 10^3 \text{kg/cm}^2$ , さらに  $1.9\text{g/cm}^3$  の場合  $1.5 \times 10^3 \text{kg/cm}^2$  である。

これらの値を採用すると、表面荷重の波形を表わす  $\beta$  は上述の  $k$  の範囲でほぼ  $1.0 \sim 5.0$  の範囲にあるであろう。ここでは前述の Voigt モデルとの対比のため、見かけ密度  $1.7\text{g/cm}^3$  のものについてのみ考察しよう。Fig. 21 はピーク応力減衰に関する実験結果を用いて解析曲線のあてはめを行なった一例である。解析曲線としては、 $E\mu = 28.0 \text{sec}^{-1}$ ,  $\beta = 5.0$  として、波動伝搬の応力解 (30) 式により計算したものが描かれている。ただしこの図には、代表例として  $k = 0.5, 1.0, 1.5$  の3種類の結果だけが示されている。これより、Voigt のモデルでは波形の崩れを説明し得ても有限波速を表現できないという欠陥が存在したが、ばね - Voigt 系モデルでは有限波速と同時にピーク応力 (エネルギー) の減衰をもかなり良好な精度で説明しうることがわかる。この事実から衝撃応力をうける土の理論モデルとしてばね - Voigt 系モデルが有効であることが推定され、さらに粘弾性定数として Fig. 6 (b) の  $E'$  をフロントの波速に適合するように、またヤング率比  $k$  の値を  $0.5 \sim 1.0$  の範囲にあてはめれば、土中の応力波伝搬時に生ずるピーク応力の減衰に関する実験値とよく合うことが知られる。

## 7. 結 論

この研究では、減衰を考慮した地盤内応力波伝搬問題に対する理論解を得ることを目的として、おもに指数減衰特性をもつスパイク型の衝撃応力に対する飽和粘土の一次元応答を計算し、側方拘束土に対する実験結果を用いてその妥当性を検討した。得られた結論を列記すれば次のようである。

(1) 保存系としての双曲型の波動伝搬の式に減衰項を付加することによって非保存系としての放物型に変換することが可能であり、伝搬問題から擬定常問題への推移に果す減衰項の役割は非常に大きい。

(2) ステップ型またはスパイク型パルスを一端にうける Voigt 体内の応力波伝搬はラプラス変換の積分公式を用いて理論的に計算することができ、表面圧力がスパイク型のときはステップ型の場合に比べて応力波

が急速に減衰する。

(3) Voigt のモデルでは、衝撃をうけた瞬間には完全剛体の挙動を示し、無限大の波速で波のフロントがロッド内を進行する。また各深さにおける波動継続時間は波の進行とともに非常に大きくなり、波形の崩れがいちじるしい。粘弾性定数  $E$  と  $1/\mu$  の相対的な大きさによってばねとダッシュポットに分担される伝搬応力の割合が変り、 $E$  の値に応じてエネルギー吸収が最大となるような  $1/\mu$  の値が決まる。

(4) 有限波速を表現しうる三要素線形粘弾性モデルとして標準線形粘弾性モデル (Fig. 6 (a)) とばね-Voigt 系モデル (Fig. 6 (b)) をとり、それぞれの波動伝搬特性を比較した。ことに後者のモデルについては contour integral により検討を行ない、表面圧力の無次元減衰係数  $\beta$  の大小により理論解を分類して誘導した。

(5) さきに述べたように、Voigt のモデルでは波形の崩れを説明し得ても有限波速を表現できないという欠陥が存在したが、ばね-Voigt 系モデルでは有限波速と同時にエネルギー減衰をもかなり良好な精度で説明しうる。このさい粘弾性定数として Fig. 6 (b) のばね  $E'$  をフロントの波速に適合するように、またヤング率比  $k=E/E'$  の値を 0.5~1.0 の範囲にあてはめれば、土中の応力波伝搬時に生ずるピーク応力の減衰に関する実験値とよく適合する。

(6) 応力波伝搬の実験的手法として Shock-tube の応用を試み、側方拘束ロッドの土供試体に対する衝撃載荷装置としての適性と、応力およびひずみ計測に必要なピックアップ類の精度を検討して満足すべき結果を得た。本文で述べた実験はごく限られた条件下のものに過ぎないが、Shock-tube によって指数減衰的なスパイクパルスを発生させうること、および伝搬過程における土の動的特性を明らかにする端緒が得られたものと考えられる。

本研究には昭和 45 年度文部省科学研究費 (特定研究) の補助をうけた。また Shock-tube の設計と製作にあたって工学部航空工学科神元五郎教授の有益な指導と助言をいただいた。さらに実験には大学院学生、安藤信夫・霜上民生両君の助力を得た。いずれも付記して感謝の意を表わすものである。

#### 参 考 文 献

- 1) Harr, M. E.: Foundations of Theoretical Soil Mechanics, McGraw-Hill, 1966, pp. 352-355.
- 2) Abbott, M. B.: An Introduction to the Method of Characteristics, Elsevier, 1966, pp. 65-66.
- 3) 犬井鉄郎: 応用偏微分方程式論, 岩波書店, 昭26, pp. 270-272.
- 4) Morrison, J. A.: Wave Propagation in Rods of Voigt Material and Visco-Elastic Materials with Three-Parameter Models, Q. Appl. Math., Vol. 14, 1956, pp. 153-169.
- 5) Lee, E. H. and J. A. Morrison: A Comparison of the Propagation of Longitudinal Waves in Rods of Viscoelastic Materials, J. Polymer Sci., Vol. 14, 1956, pp. 93-110.
- 6) Churchill, R. V.: Modern Operational Mathematics in Engineering, McGraw-Hill, 1944, p. 299.
- 7) Thomson, W. T.: Laplace Transformation, Maruzen, 1960, pp. 232-234.
- 8) Kamimoto, G.: Shock Tube Theory (Preprint), 1965, pp. 1-31.
- 9) 堀 正幸・安藤信夫: 土中のひずみ測定について, 昭和46年度土木学会関西支部年次学術講演会講演概要, 昭46.
- 10) 最上武雄編著: 土質力学, 技報堂, 昭44, pp. 904-909.
- 11) 畑野 正・渡辺啓行: 粘土, 砂, 碎石の動的, 静的粘弾性定数ならびにポアソン比について, 土木学会論文報告集, No. 164, 昭44, pp.33-49.