

# 粘土の3次元圧密に関する一考察

大 槇 正 紀

## ON THE THREE DIMENSIONAL CONSOLIDATION THEORY OF CLAY

By *Seiki OMAKI*

### Synopsis

The theory of three dimensional consolidation for the two phase porous media, which is composed of the linear viscoelastic skeleton and the incompressible pore water, is derived by employing the Biot's consolidation theory. The linear viscoelastic skeleton is characterized by the Gurtin-Sternberg theory. The author's theory is applied to discuss the deformation-time relation of clay under the triaxial drained creep conditions and the results are given in the form of deformation or excess pore pressure-time relations.

### 1. ま え が き

飽和粘土の3次元変形を論じるとき、粘土を土-水系より成る2相系材料として、構造骨格である土粒子実質部分の挙動と間げき水の挙動に分けて考える。有効応力の概念にもとづいた Tezaghi の1次元圧密理論<sup>1)</sup>が発表されて以来、粘土の圧密理論は急速な進歩を遂げてきた。この圧密理論を3次元理論に拡張するとき、ある仮定のもとに過剰間げき水圧のみに関する3次元の熱伝導型偏微分方程式を導びく場合 (Rendulic<sup>2)</sup>, Schiffman<sup>3)</sup> など) と過剰間げき水圧と構造骨格の挙動を同時に未知数として理論を展開する場合 (Biot<sup>4)</sup> など) とに大別される。前者の場合の境界値問題としての取り扱いは古くから Carrillo<sup>5)</sup>, Barron<sup>6)</sup>, Richart<sup>7)</sup>, 赤井<sup>8)</sup> などにより行なわれている。この理論においては、未知量が間げき水圧のみであるのでその扱いは比較的容易であるが、構造骨格の変形を取り扱うことはできないのが欠点である。一方、後者の場合は、未知量として過剰間げき水圧のほか、構造骨格の変位または有効応力が加わるため多元連立偏微分方程式を解くことになり、境界値問題の解を得るのが困難な場合が多い。しかし、得られた解から構造骨格と間げき水の挙動が同時にわかるので2相系材料の境界値問題を解く方法としては本来の方法である。特に、粘土地盤上の局部載荷による地盤の沈下、側方流動の解析などのように、多孔質材料の圧密による変形を問題にする場合にはこの解析法は特に重要である。線型弾性理論を基礎とした Biot の圧密理論<sup>4)</sup> は、このような条件を満たすものである。この圧密理論による境界値問題の取り扱いとして、McNamee と Gibson が新しい変位関数を導入して平面ひずみ問題および軸対称問題の解き方について述べており<sup>9), 10)</sup>、この方法を用いていくつかの境界値問題も解かれている。(Gibson and McNamee<sup>11)</sup>, Schiffman<sup>12)</sup>) 他方、Taylor と Merchant が粘土の二次圧縮現象が粘土の構造骨格の粘弾性的性質によるものであることを指摘して以来、粘土の経時変形を脱水作用による圧密現象と構造骨格の粘弾性的性質による変形の和として考えるようになった。Biot は熱力学の立場から線型粘弾性を有する異方性多孔体の圧密理論を展開している<sup>14), 15)</sup>。線型粘弾性理論は材料の刺激-応答に重ね合わせの原理が成立するという仮定 (Boltzmann の重量原理) に基礎を置くもので、Biot<sup>16)</sup> をはじめ多くの研究者により体系化がなされてきた。また、上に述べたように、線型粘弾性理論と Terzaghi の有効応力の概念を結びつけて2相系多孔質材料の圧密理論をうち立てることは特に新しいことではないが、これを用いて境界値問題の解かれた例は少ない。近年、電子計算機とその計算手法

の発達により、2相系地盤の圧密問題も次第に解かれるようになってきた。

本文においては、Stieltjesの合成積をもとにGurtinとSternbergにより展開された線型粘弾性理論<sup>18)</sup>を用い、線型粘弾性を有する構造骨格と非圧縮性の間げき水より成る2相系多孔質材料の3次元圧密理論について述べる。さらに、粘土の3軸圧縮クリープ試験を想定した境界条件のもとに、この3次元圧密理論を用いて軸対称問題を解き、供試体の変形挙動について考察を加える。

## 2. 3次元圧密理論の基礎式

### 2.1 理論に用いる仮定

粘土-水系をつぎのような性質をもつ材料と仮定する。

- 1) 粘土-水系は均質等方で、ひずみ、速度、応力の変化は微小である。
- 2) 粘土の間げきは完全に水で飽和されている。
- 3) 土粒子実質部分および水は非圧縮性である。
- 4) 間げき水の移動に関しては、Darcyの法則が適用され、透水係数  $k$  の性質は等方的である。
- 5) 粘土-水系の間げき率  $n$  は

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta V_v}{\Delta V}$$

ここに、 $V_v$ : 間げきの体積、 $V$ : 土-水系の体積で、各点で定義できるものとする。

6) 間げき水圧と有効応力、全応力の間には、直交デカルト座標において

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}' + u \delta_{ij} \dots \dots \dots (1)$$

が成立する。ここに、 $\tau_{ij}$ ,  $\tau_{ij}'$ ,  $u$  はそれぞれ全応力テンソル、有効応力テンソルおよび間げき水圧である。また、 $\delta_{ij}$  は Kronecker のデルタである。応力テンソル  $\tau_{ij}$ ,  $\tau_{ij}'$  の向きは、 $x_1$  一面では Fig. 1 に示す方向を正とする。(垂直力は圧縮力を正にとる。) 他の面の応力も同様である。

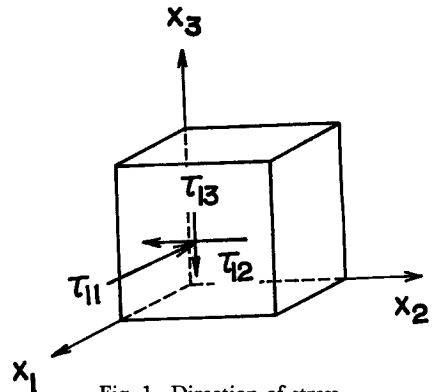


Fig. 1 Direction of stress.

7) 構造骨格は線型粘弾性応力~ひずみ関係をもつ。すなわち等方性材料においては、つぎのような有効応力~ひずみ関係をもつ。

クリープ積分法則

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{ij} &= s_{ij} * dJ_1 \\ e_{kk} &= \tau_{kk}' * dJ_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

緩和積分法則

$$\left. \begin{aligned} s_{ij} &= \epsilon_{ij} * dG_1 \\ \tau_{kk}' &= e_{kk} * dG_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

微分演算法則

$$\left. \begin{aligned} P_1(D)s_{ij} &= Q_1(D)\epsilon_{ij} \\ P_2(D)\tau_{kk}' &= Q_2(D)e_{kk} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

ここに、 $e_{ij}$ : ひずみテンソル (向きは応力テンソルに対応するようにきめる。圧縮: 正)

$$e_{ij} = -\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

また、 $\epsilon_{ij}$ ,  $s_{ij}$  は、それぞれひずみおよび応力の偏差成分で

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= e_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} e_{kk} \\ s_{ij} &= \tau_{ij}' - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk}' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

また、 $J_1, J_2$  はせん断および等方圧縮におけるクリープ関数、 $G_1, G_2$  は同様の場合の緩和関数である。\*印は、Stieltjes の合成積を示し、

$$\varphi * d\psi = \int_{-\infty}^t \varphi(t-\tau) d\psi(\tau)$$

で  $(-\infty, 0)$  で  $\psi \equiv \varphi \equiv 0$  のとき、 $[0, \infty)$  において

$$\begin{aligned} \varphi * d\psi &= \psi(0+) \varphi(t) + \int_0^t \varphi(t-\tau) \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} d\tau \\ &= (\psi(0+) \varphi(t) + \varphi * \psi^{(1)}) \end{aligned}$$

(2), (3), (4) 式はいずれもそれぞれの対応する応力成分とひずみ成分の間に線型刺激-応答関係 (Boltzmann の重畳原理) が成立することを示すもので、 $J_i, G_i (i=1, 2)$  の間にはつぎの関係がある。

$$\begin{aligned} G_1 * dJ_1 &= J_1 * dG_1 = h \\ G_2 * dJ_2 &= J_2 * dG_2 = h \end{aligned}$$

ここに、 $h$  は単位階段関数で

$$h = \begin{cases} 0 & -\infty < t < 0 \\ 1 & 0 < t < \infty \end{cases}$$

また、 $D$  は  $\partial/\partial t$  を示し、 $P_i(D), Q_i(D) (i=1, 2)$  は  $D$  の多項式を示す。 $P_i(D), Q_i(D)$  と  $J_i, G_i (i=1, 2)$  の間にも特定の関係がある。

以上に述べた仮定に基づいて飽和粘土の3次元圧密に関する関係式を導びく。

2.2 力のつり合い式

力のつり合い式は、

$$\tau_{ij,j} = F_i \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $F_i$  は自重の  $i$  軸方向成分である。間げき率  $n$  の粘土においては、

$$F_i = -\{(1-n)\gamma_s + n\gamma_w\} n \cdot e_i$$

ここに、 $n$ : 鉛直上向き単位ベクトル、 $e_i$ :  $i$  軸方向の単位ベクトル、 $\gamma_s, \gamma_w$ : 土粒子実質部分および水の単位体積重量である。ところが、間げき率  $n$  と体積ひずみ  $e_v$  の間には、

$$n = \frac{n_0 - e_v}{1 - e_v}$$

ここに、 $n_0$ : 初期間げき率、したがって

$$F_i = -\frac{1}{1 - e_v} \{(1 - n_0)\gamma_s + (n_0 - e_v)\gamma_w\} n \cdot e_i \dots\dots\dots (7)$$

2.3 連続の式

Fig. 2 のように、 $h_e, H$  をきめると

$$\begin{aligned} u &= \gamma_w(H + h_e - n \cdot r) \\ &= \gamma_w(H - n \cdot r) + u_e \end{aligned}$$

ここに、 $r$ : 位置ベクトル、 $u_e$ : 過剰間げき水圧、Fig. 3 のように、体積  $V$  における連続の条件を考える。土-水系のみかけの密度を  $\rho$  とすると

$$\rho = (1 - n)\rho_s + n\rho_w \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 $\rho_s$ : 土粒子実質部分の密度、 $\rho_w$ : 水の密度、構造骨格および水の変位ベクトルをそれぞれ  $u, U$ 、変位速度ベクトルをそれぞれ  $\dot{u}, \dot{U}$  とすると、体積  $V$  からの実質的な流出質量は、

$$\int_V \{(1 - n)\rho_s \dot{u} + n\rho_w \dot{U}\} \cdot \nu dS$$

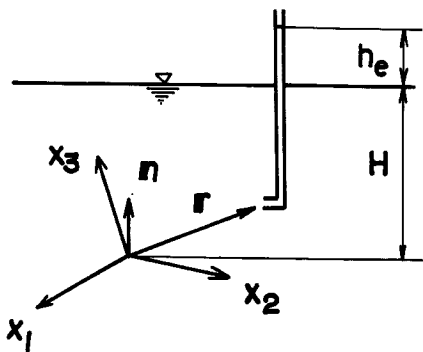


Fig. 2 A piezometric tube in the soil.

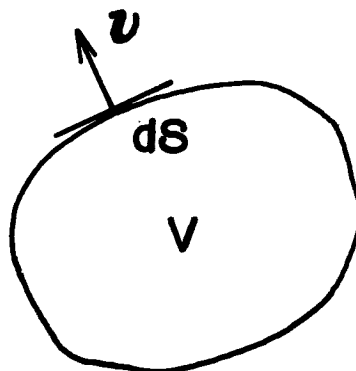


Fig. 3 Arbitrary closed volume within soil mass.

ここに、 $\nu$  は体積  $V$  の表面  $S$  に立てた外向き単位法線ベクトルである。これは、体積  $V$  の単位時間当たりの質量の減少

$$-\int_V \dot{\rho} dV$$

に等しい。したがって、

$$\int_S \{ (1-n)\rho_s \dot{u} + n\rho_w \dot{U} \} dS + \int_V \dot{\rho} dV = 0$$

Gauss の定理を用いると

$$\int_V [ \nabla \cdot \{ (1-n)\rho_s \dot{u} + n\rho_w \dot{U} \} + \dot{\rho} ] dV = 0$$

これは、任意の体積について成り立つから

$$\nabla \cdot \{ (1-n)\rho_s \dot{u} + n\rho_w \dot{U} \} + \dot{\rho} = 0$$

(8) 式を用いて  $\rho$  を消去し、 $\rho_s g = \gamma_s$ ,  $\rho_w g = \gamma_w$  を考慮すると

$$\nabla \cdot \{ (1-n)\gamma_s \dot{u} + n\gamma_w \dot{U} \} - (\gamma_s - \gamma_w) \dot{n} = 0$$

これに、Darcy の法則

$$n \dot{U} - \dot{u} = -\frac{k}{\gamma_w} \nabla u_e$$

を代入すると、

$$\nabla \cdot \left\{ \gamma_s (1-n) \dot{u} + \gamma_w \left( \dot{u} - \frac{k}{\gamma_w} \nabla u_e \right) \right\} - (\gamma_s - \gamma_w) \dot{n} = 0$$

これに間げき率  $n$  と体積ひずみ  $e_v$  の関係

$$n = \frac{n_0 - e_v}{1 - e_v}, \quad \dot{n} = \frac{(1 - n_0) \dot{e}_v}{(1 - e_v)^2}$$

を代入すると、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[ \left\{ \gamma_s \frac{(1 - n_0)}{1 - e_v} + \gamma_w \right\} \dot{u} \right] - \nabla \cdot (k \nabla u_e) \\ + (\gamma_s - \gamma_w) \frac{1 - n_0}{(1 - e_v)^2} \dot{e}_v = 0 \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

したがって、これが連続の式である。これは、非線型微分方程式なので、いま、

$$\frac{1}{1 - e_v} \simeq 1 + e_v, \quad \frac{\dot{e}_v}{(1 - e_v)^2} \simeq (1 + 2e_v) \dot{e}_v \simeq \dot{e}_v$$

$$\nabla k = 0, \quad \nabla n_0 = 0$$

とおくと、(9) 式は、

$$\nabla \dot{u} - \frac{k}{\alpha} \nabla^2 u_e = 0 \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 $\alpha = (2 - n_0)\gamma_w$  これは、従来求められている連続の式と同形であるが圧密係数が少し異なる。

**2.4 変位ベクトル  $u$  および過剰間けき水圧  $u_e$  による圧密理論の基礎式**

ここでは、(3) 式を用いて (6) 式および (10) 式より圧密式を導びく。(1) 式から

$$\tau_{ij,j} = \tau_{ij,j}' + u_{,j} \delta_{ij}$$

ところが、(3)、(5) 式から

$$\tau_{ij}' = e_{ij} * dG_1 + \frac{1}{3} \delta_{ij} e_{kk} * d(G_2 - G_1)$$

これを上式に代入して

$$e_{ij,j} * dG_1 + \frac{1}{3} e_{kk,j} * d(G_2 - G_1) + u_{,i} = F_i$$

さらに、これを変位とひずみの関係を用いて書くと、

$$\nabla^2 u * dG_1 + \nabla \nabla \cdot u * dK - 2 \nabla u_e + 2 \gamma_w \nabla (n \cdot r) + 2F = 0 \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 $H = \text{一定}$ 、 $K = (G_1 + 2G_2)/3$  としている。したがって、(10)、(11) 式を連立し、与えられた境界条件のもとに解けばよい。

**3. 軸対称条件における境界値問題の解**

前節において、線型粘弾性理論を用いた3次元圧密理論式(10)、(11)を導びいたが、この節ではこれらの理論を用いて粘土の3軸圧縮クリープ試験のような2相系多孔質材料の円柱供試体が軸対称状態の荷重を長期に受けた場合の解を示す。

**3.1 圧密理論式の Laplace 変換と Laplace 変換された解**

いま、Fig. 4 示したように円柱座標系  $(x_1, x_2, x_3)$  を用いて (11) 式を書き表わすと、

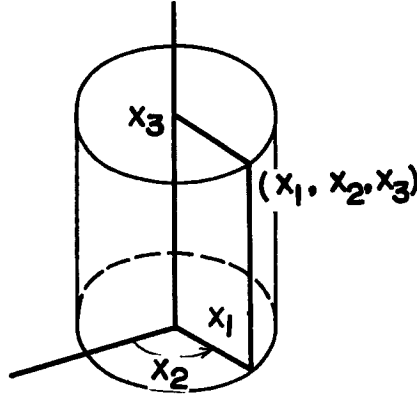


Fig. 4 Cylindrical coordinate.

$$\left. \begin{aligned} \left( \nabla^2 - \frac{1}{x_1^2} \right) * dG_1 - \frac{\partial e_v}{\partial x_1} * dK - 2 \frac{\partial u_e}{\partial x_1} &= 0 \\ \nabla^2 u_3 * dG_1 - \frac{\partial e_v}{\partial x_3} * dK - 2 \frac{\partial u_e}{\partial x_3} - 2\gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

また、(10) 式、(11) 式より  $u_e$  を消去すると

$$\nabla^2 e_v * dL - \frac{\alpha}{k} \frac{\partial e_v}{\partial t} = 0$$

ここに、 $u_1, u_3$  はそれぞれ  $x_1, x_3$  軸方向の変位、 $e_v$  は圧縮を正にした場合の体積ひずみで、

$$\frac{\partial e_v}{\partial t} + \frac{k}{\alpha} \nabla^2 u_e = 0, \quad e_v = -\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{u_1}{x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)$$

$$L = \frac{1}{3}(2G_1 + G_2), \quad K = \frac{1}{3}(G_1 + 2G_2)$$

$$\gamma = (1 - n_0)(\gamma_s - \gamma_w), \quad \alpha = (2 - n_0)\gamma_w$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

また、有効応力は、

$$\tau_{11}' = -\frac{\partial u_1}{\partial x_1} * dG_1 + \frac{1}{3} e_v * d(G_2 - G_1)$$

$$\tau_{33}' = -\frac{\partial u_3}{\partial x_3} * dG_1 + \frac{1}{3} e_v * d(G_2 - G_1)$$

$$\tau_{13}' = -\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) * dG_1$$

これをつきの境界条件が  $t=0$  において与えられ、その後時間とともにこの境界条件が変化しない場合について解く。境界条件：

$$\left. \begin{aligned} & x_1 = a, 0 \leq x_3 \leq h \quad (0 \leq t < \infty) \text{ で} \\ & \quad \tau_{11}' = p, \tau_{13}' = 0, u_e = 0 \\ & 0 \leq x_1 \leq a, x_3 = 0 \quad (0 \leq t < \infty) \text{ で} \\ & \quad u_3 = 0, \tau_{13}' = 0, \frac{\partial u_e}{\partial x_3} = 0 \\ & 0 \leq x_1 \leq a, x_3 = h, \quad (0 \leq t < \infty) \text{ で} \\ & \quad 2\pi \int_0^a (\tau_{33}' + u_e) x_1 dx_1 = \pi a^2 q, \tau_{13}' = 0, \frac{\partial u_e}{\partial x_3} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

いま、これらの諸量を無次元化するため、

$$u_1 = a \bar{u}_1, \quad u_3 = h \bar{u}_3, \quad u_e = \alpha h \bar{u}_e, \quad x_1 = ar, \quad x_3 = hz$$

とおき、 $\gamma$  のえいきょうを無視すると、(12) 式は、

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial r} + \frac{\alpha^2}{h^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial z^2} - \frac{\bar{u}_1}{r^2}\right) * dG_1 - \frac{\partial \bar{e}_v}{\partial r} * dK - 2\alpha h \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial r} = 0 \\ & \left(\frac{h^2}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial r^2} + \frac{h^2}{\alpha^2} \frac{\partial \bar{u}_3}{r \partial r} + \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial z^2}\right) * dG_1 - \frac{\partial \bar{e}_v}{\partial z} * dK - 2\alpha h \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial z} = 0 \\ & \left(\frac{\partial^2 \bar{e}_v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{e}_v}{\partial r} + \frac{\alpha^2}{h^2} \frac{\partial^2 \bar{e}_v}{\partial z^2}\right) * dL - \frac{\alpha^2 \alpha}{k} \frac{\partial \bar{e}_v}{\partial t} = 0 \\ & \frac{\partial^2 \bar{u}_e}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial r} + \frac{\alpha^2}{h^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_e}{\partial z^2} = -\frac{\alpha^2}{kh} \frac{\partial \bar{e}_v}{\partial t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

ここに、

$$\bar{e}_v = -\left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial r} + \frac{\bar{u}_1}{r} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial z}\right)$$

$$\bar{\tau}_{11}' = -\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial r} * dG_1 + \frac{1}{3} \bar{e}_v * d(G_2 - G_1)$$

$$\bar{\tau}_{33}' = -\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial z} * dG_1 + \frac{1}{3} \bar{e}_v * d(G_2 - G_1)$$

$$\bar{\tau}_{13}' = -\left(\frac{a}{h} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial z} + \frac{h}{a} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial r}\right) * dG_1$$

このとき、(13) 式で与えられた境界条件はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 &r=1, 0 \leq z \leq 1, (0 \leq t < \infty) \text{ で} \\
 &\quad \bar{\tau}_{11}' = p, \bar{\tau}_{13}' = 0, \bar{u}_e = 0 \\
 &0 \leq r \leq 1, z=0, (0 \leq t < \infty) \text{ で} \\
 &\quad \bar{u}_3 = 0, \bar{\tau}_{13}' = 0, \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial z} = 0 \\
 &0 \leq r \leq 1, z=1, (0 \leq t < \infty) \text{ で} \\
 &\quad 2\pi \int_0^1 (\bar{\tau}_{33}' + \alpha h \bar{u}_e) r dr = \pi q, \bar{\tau}_{13}' = 0, \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial z} = 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

(14) 式の合成積の取り扱いを容易にするために、Laplace 変換を用いる。すなわち、2つの関数の Stieltjes の合成積の Laplace 変換は

$$\mathcal{L}(\varphi(t) * d\psi(t)) = \overline{\varphi(s)} \cdot s \overline{\psi(s)}$$

ここに、 $\overline{\varphi(s)}$ ,  $\overline{\psi(s)}$  は  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  の Laplace 変換で、  
 $\overline{\varphi(s)} = \mathcal{L}\varphi(t) = \int_0^\infty \varphi(t) e^{-st} dt$  など

となる。この関係を用いると (14), (15) 式は、

$$\left. \begin{aligned}
 &\frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial r} - \frac{V_1}{r^2} + \frac{a^2}{h^2} \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial r} (PE + Q\Phi) \\
 &\frac{\partial^2 V_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} + \frac{a^2}{h^2} \frac{\partial^2 V_3}{\partial z^2} = \frac{a^2}{h^2} \frac{\partial}{\partial z} (PE + Q\Phi) \\
 &\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{a^2}{h^2} \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \lambda^2 E \\
 &\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{a^2}{h^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -\frac{a^2 s}{kh} E
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

ここに、 $V_1, V_3, E, \Phi$  はそれぞれ、 $\bar{u}_1, \bar{u}_3, \bar{e}, \bar{u}_e$  の Laplace 変換であり、 $\bar{G}_1, \bar{G}_2$  を  $G_1, G_2$  の Laplace 変換とすると

$$P = \frac{\bar{G}_1 + 2\bar{G}_2}{3\bar{G}_1}, \quad Q = \frac{2ah}{s\bar{G}_1}, \quad \lambda^2 = \frac{3a^2\alpha}{k(2\bar{G}_1 + \bar{G}_2)}$$

一方、境界条件は

$$\left. \begin{aligned}
 &r=1, 0 \leq z \leq 1 \text{ で} \\
 &\quad T_{11}' = \frac{P}{s}, \quad T_{13}' = 0, \quad \Phi = 0 \\
 &0 \leq r \leq 1, z=0 \text{ で} \\
 &\quad V_3 = 0, \quad T_{13}' = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \\
 &0 \leq r \leq 1, z=1 \text{ で} \\
 &\quad 2\pi \int_0^1 (T_{33}' + \alpha h \Phi) r dr = \frac{\pi q}{s}, \quad T_{13}' = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 T_{11}' &= -s\bar{G}_1 \frac{\partial V_1}{\partial r} + \frac{s}{3} (\bar{G}_2 - \bar{G}_1) E \\
 T_{33}' &= -s\bar{G}_1 \frac{\partial V_3}{\partial z} + \frac{s}{3} (\bar{G}_2 - \bar{G}_1) E \\
 T_{13}' &= -s\bar{G}_1 \left( \frac{a}{h} \frac{\partial V_1}{\partial z} + \frac{h}{a} \frac{\partial V_3}{\partial r} \right)
 \end{aligned}$$

つぎに、(17) 式の境界条件のもとに (16) 式を解く。境界条件から  $E, \Phi$  は  $z$  に無関係と考えられる。式

(16) の第3式から

$$E = AI_0(\lambda r) \dots\dots\dots (18)$$

とかける。ここに、 $A$  は積分定数で、 $I_0(\lambda r)$  は変形された0次 Bessel 関数である。これを (16) 式の第4式に代入して

$$\phi = C - \frac{2\bar{G}_1 + \bar{G}_2}{3\alpha h} AI_0(\lambda r) \quad (C: \text{積分定数})$$

これに、境界条件  $\phi|_{r=1} = 0$  を用いると、

$$\phi = \frac{(2\bar{G}_1 + \bar{G}_2)s}{3\alpha h} A \{I_0(\lambda) - I_0(\lambda r)\} \dots\dots\dots (19)$$

(18), (19) 式を (16) 式の第1式, 第2式に代入すると、

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial r} - \frac{V_1}{r^2} = -A\lambda I_1(\lambda r)$$

$$\frac{h^2}{a^2} \frac{\partial^2 V_3}{\partial r^2} + \frac{h^2}{a^2} \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial z^2} = 0$$

上の第1式の一般解は、 $V_1 = C_1 r$  ( $C_1$ : 積分定数)

特殊解は、 $V_1 = -\frac{A}{\lambda} I_1(\lambda)$  であるから

$$V_1 = -\frac{A}{\lambda} I_1(\lambda) + C_1 r$$

また、 $V_3|_{z=0} = 0$  を用いると第2式から

$$V_3 = C_2 z$$

しかるに、 $V_1, V_3$  は、

$$-\left(\frac{\partial V_1}{\partial r} + \frac{V_1}{r} + \frac{\partial V_3}{\partial z}\right) = E$$

の関係を満足しなければならないから、上に求めた  $V_1, V_3$  と (18) 式を用いると

$$2C_1 + C_2 = 0 \quad \therefore C_2 = -2C_1$$

したがって、

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= -\frac{A}{\lambda} I_1(\lambda r) + C_1 r \\ V_3 &= -2C_1 z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

(18)~(20) 式を用いると、(17) 式から

$$T_{11}' = AI_0(\lambda r)s \frac{2G_1 + G_2}{3} - AsG_1 \frac{I_1(\lambda)}{\lambda} - sC_1G_1$$

$$T_{33}' + ah\phi = \frac{s}{3}(G_2 - G_1)AI_0(\lambda r) + 2C_1G_1s + s \frac{(2\bar{G}_1 + \bar{G}_2)}{3} A \{I_0(\lambda) - I_0(\lambda r)\}$$

したがって、境界条件、

$$T_{11}' \Big|_{r=1} = \frac{P}{s}, \quad 2\pi \int_0^1 (T_{33}' + ah\phi) r dr \Big|_{z=1} = \frac{\pi q}{s}$$

から積分定数  $A, C_1$  をきめると

$$A = \frac{(2p+q)\lambda}{s^2 \bar{A}}, \quad C_1 = \frac{q-p}{3s^2 \bar{G}_1} + \frac{(2p+q)I_1(\lambda)}{3s^2 \bar{A}}$$

ここに、 $\bar{A} = (2\bar{G}_1 + \bar{G}_2)\lambda I_0(\lambda) - 4\bar{G}_1 I_1(\lambda)$

したがって、これらの積分定数を用いて変位、ひずみ、過剰間げき水圧、有効応力を書くと、

$$V_1 = \frac{q-p}{3s^2 \bar{G}_1} r + \frac{2p+q}{3} \frac{I_1(\lambda)r - 3I_1(\lambda r)}{s^2 \bar{A}} \Bigg|$$



$$\left. \begin{aligned} V_3 &= -\frac{2(q-p)}{3s^2\bar{G}_1}z - \frac{2p+q}{3} \frac{2I_1(\lambda)}{s^2A}z \\ E &= (2p+q) \frac{\lambda I_0(\lambda r)}{s^2A} \\ \phi &= \frac{2p+q}{3} \frac{(2\bar{G}_1 + \bar{G}_2)\lambda\{I_0(\lambda) - I_0(\lambda r)\}}{\alpha h s A} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

また、

$$\left. \begin{aligned} T_{11}' &= \frac{p-q}{3s} + \frac{2p+q}{3} \frac{(2\bar{G}_1 + \bar{G}_2)\lambda I_0(\lambda r) - \bar{G}_1\{I_1(\lambda) + \frac{3I_1(\lambda r)}{r}\}}{sA} \\ T_{33}' &= \frac{2(q-p)}{3s} + \frac{2p+q}{3} \frac{-3\bar{G}_1\lambda I_0(\lambda r) + 2\bar{G}_1 I_1(\lambda) + (2\bar{G}_1 + \bar{G}_2)\lambda I_0(\lambda)}{sA} \\ T_{13}' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

この式から、 $V_1, V_3, T_{11}', T_{33}'$  は  $(q-p)$  に比例する項（以後これを偏差成分という）と  $(2p+q)/3$  に比例する項（以後これを等方成分という）から成り立っている。また、境界条件から推定されるように、 $V_1, E, \phi, T_{11}', T_{33}'$  はいずれも  $z$  に無関係で  $r$  のみの関数であり、 $V_3$  は  $z$  のみの関数で  $z$  に比例している。 $\bar{G}_1, \bar{G}_2$  は  $s$  の関数であるがその関数形がきまれば、Laplace の逆変換することにより、 $\bar{u}_1, \bar{u}_3, \dots$  を求めることができる。また、粘土の構造骨格のクリープ定数として  $G_1, G_2$  を求めようとする場合には、用いた境界条件と同じ条件で試験を行ない、変位、排水量などの得られたデータを Laplace 変換することにより、 $\bar{G}_1, \bar{G}_2$  を決定することもできると思われる。

3.2  $G_1, G_2$  が一定の場合の Laplace の逆変換による解

いま、もっとも簡単な場合として、 $G_1, G_2$  が一定の場合について (21) (22) 式を Laplace の逆変換することにより、解を求める。 $G_1, G_2$  が一定 ( $0 \leq t < \infty$ ) のとき、

$$\bar{G}_1 = \frac{G_1}{s}, \bar{G}_2 = \frac{G_2}{s} \quad (G_1, G_2 : \text{一定}, Rs > 0)$$

したがって、(22) 式は、

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{q-p}{3sG_1}r + \frac{2p+q}{3} \frac{I_1(\lambda)r - 3I_1(\lambda r)}{sII} \\ V_3 &= -\frac{2(q-p)}{3sG_1}z - \frac{2p+q}{3} \frac{2I_1(\lambda)}{sII}z \\ E &= (2p+q) \frac{\lambda I_0(\lambda r)}{sII} \\ \phi &= \frac{2p+q}{3} \frac{\lambda(2G_1 + G_2)\{I_0(\lambda) - I_0(\lambda r)\}}{\alpha h s II} \\ T_{11}' &= \frac{p-q}{3s} + \frac{2p+q}{3} \frac{(2G_1 + G_2)\lambda I_0(\lambda r) - G_1\{I_1(\lambda) + \frac{3I_1(\lambda r)}{r}\}}{sII} \\ T_{33}' &= \frac{2(q-p)}{3s} + \frac{2p+q}{3} \frac{-3G_1\lambda I_0(\lambda r) + 2G_1 I_1(\lambda) + (2G_1 + G_2)\lambda I_0(\lambda)}{sII} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

ここに、 $II = (2G_1 + G_2)\lambda I_0(\lambda) - 4G_1 I_1(\lambda)$

これらの Laplace 逆変換を求めるためには、

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{ts} V_1 ds \text{ など}$$

の複素積分を行なう必要があるが、まず、 $V_1$  の逆変換について述べる。式 (23) の第1式の右辺第1項の Laplace の逆変換は、

$$\neq \frac{q-p}{3sG_1} r = \frac{q-p}{3G_1} r$$

また、 $V_1$  の右辺第 2 項は  $s=0$  および  $\Pi=0$  で特異点を持ち、これらの点での留数計算を行なえばよい。

$$I_0(\lambda) = 1 + \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^4 + \dots$$

$$\frac{I_1(\lambda)}{\lambda} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{1!2!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!3!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^4 + \dots \right]$$

したがって、

$$\frac{4G_1}{2G_1+G_2} \frac{I_1(\lambda)}{\lambda} = \frac{2G_1}{2G_1+G_2} \left\{ 1 + \frac{1}{1!2!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \dots \right\} < I_0(\lambda) \quad (\lambda \neq 0)$$

したがって、 $\lambda$  が実数のとき、 $\Pi=0$  を満足する  $\lambda$  は  $\lambda=0$  のみである。いま、 $\lambda \neq 0$  の  $\lambda$  に対して  $\lambda = i\nu$  とおくと、

$$I_0(\lambda) = J_0(\nu), \quad I_1(\lambda) = iJ_1(\nu)$$

だから

$$(2G_1+G_2)\nu J_0(\nu) - 4G_1 J_1(\nu) = 0 \dots \dots \dots (24)$$

ここに、 $J_0(\nu)$ 、 $J_1(\nu)$  は 0 次および 1 次の第 1 種 Bessel 関数である。したがって、上式を満足するような  $\nu$  の値を  $\nu_n (n=1, 2, \dots)$  とすると、 $V_1$  の第 2 項の逆変換は、

$$s = 0, \quad s_n = \frac{k(2G_1+G_2)\lambda_n^2}{3a^2\alpha} = -\frac{k(2G_1+G_2)\nu_n^2}{3a^2\alpha} \quad (n=1, 2, \dots)$$

での留数計算により求めることができる。 $s = s_n$  における留数の計算はつぎのように行なう。 $\Pi$  を  $\lambda = \lambda_n$  に関して Taylor 展開すると、 $\Pi|_{\lambda=\lambda_n} = 0$  だから

$$\begin{aligned} \Pi &= (\lambda - \lambda_n) \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} + \frac{(\lambda - \lambda_n)^2}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \lambda^2} + \dots \\ &= (\lambda - \lambda_n) \{ 2G_2 I_0(\lambda) + (2G_1 + G_2) \lambda I_1(\lambda) \} \\ &\quad + \frac{(\lambda - \lambda_n)^2}{2} \{ (2G_1 + G_2) \lambda I_0(\lambda) + 2G_2 I_0(\lambda) \} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow s_n} (s - s_n) \frac{I_1(\lambda)r - 3I_1(\lambda r)}{s\Pi} e^{ts} &= \lim_{s \rightarrow s_n} \frac{k(2G_1+G_2)(\lambda^2 - \lambda_n^2)}{3a^2\alpha} \frac{I_1(\lambda)r - 3I_1(\lambda r)}{s\Pi} e^{ts} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \frac{k(2G_1+G_2)(\lambda + \lambda_n)}{3a^2\alpha} \frac{I_1(\lambda)r - 3I_1(\lambda r)}{s \left[ I_0(\lambda) \left\{ 2G_1 - \frac{(2G_1+G_2)^2 \nu^2}{4G_1} \right\} + \dots \right]} \\ &= \frac{-8G_1}{(2G_1+G_2)^2 \nu_n^2 - 8G_1 G_2} \frac{J_1(\nu_n)r - 3J_1(\nu_n r)}{\nu_n J_0(\nu_n)} \exp \left( -\frac{k(2G_1+G_2)}{3a^2\alpha} \nu_n^2 t \right) \end{aligned}$$

したがって、いま  $\Theta_n = (2G_1+G_2)^2 \nu_n^2 - 8G_1 G_2$  とおくと、

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= \frac{q-p}{3G_1} r - \frac{2p+q}{3G_2} r \\ &\quad - \frac{2p+q}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8G_1 J_1(\nu_n)r - 3J_1(\nu_n r)}{n \nu_n \Theta_n J_0(\nu_n)} \exp(-\nu_n^2 T) \end{aligned}$$

以下、同様にして、

$$\begin{aligned} \bar{u}_3 &= -\frac{2(q-p)}{3G_1} z - \frac{2p+q}{3G_2} z + \frac{2p+q}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16G_1 J_1(\nu_n)}{n \nu_n \Theta_n J_0(\nu_n)} \exp(-\nu_n^2 T) \\ \bar{e}_v &= \frac{2p+q}{G_2} - (2p+q) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8G_1 J_0(\nu_n r)}{n \Theta_n J_0(\nu_n)} \exp(-\nu_n^2 T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{r}_e &= -\frac{2p+q}{3\alpha h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8G_1(2G_1+G_2)}{\theta_n} \frac{J_0(\nu_n)-J_0(\nu_n r)}{J_0(\nu_n)} \exp(-\nu_n^2 T) \\ \bar{r}_{11}' &= p + \frac{2p+q}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8G_1}{\theta_n} \frac{G_1 \frac{J_1(\nu_n)}{\nu_n} + 3G_1 \frac{J_1(\nu_n r)}{\nu_n r} - (2G_1+G_2)J_0(\nu_n r)}{J_0(\nu_n)} \\ &\quad \times \exp(-\nu_n^2 T) \\ \bar{r}_{33}' &= q + \frac{2p+q}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8G_1}{\theta_n} \frac{-2G_1 \frac{J_1(\nu_n)}{\nu_n} + (G_1-G_2)J_0(\nu_n r)}{J_0(\nu_n)} \\ &\quad \times \exp(-\nu_n^2 T) \end{aligned} \quad (25)$$

ここに、 $\theta_n = (2G_1+G_2)^2 \nu_n^2 - 8G_1G_2$

$$T = \frac{k(2G_1+G_2)}{3\alpha^2 \alpha} t$$

以上により、 $G_1, G_2$  が一定の場合について Laplace の逆変換により変位、応力などを求めたが、これは Laplace 変換を用いなくて直接解いた解と一致する。この解法については、付録で述べる。

つぎに (25) 式に示された解の特性について吟味する。(24) 式を満足する  $\nu_n$  に対しては、付録で述べるように、Bessel 展開により任意の  $x$  に対して次式が成り立つ。

$$\frac{2p+q}{3G_2} x = \frac{2p+q}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16G_1}{\nu_n \theta_n} \frac{J_1(\nu_n x)}{J_0(\nu_n)} \quad (26)$$

これを  $x$  について微分すると

$$\frac{2p+q}{3G_2} = \frac{2p+q}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8G_1}{\theta_n} \frac{J_0(\nu_n x)}{J_0(\nu_n)}$$

いま、これらの関係を用いて載荷直後における供試体の挙動について述べる。(25) の第2式より  $t=0$  (したがって、 $T=0$ ) においては、 $\bar{e}_0=0$  すなわち載荷直後においては体積ひずみは供試体中どこでもゼロである。また、式 (25) の第1式を用いると、

$$\begin{aligned} &\frac{2p+q}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8G_1}{\nu_n \theta_n} \frac{rJ_1(\nu_n) - 3J_1(\nu_n r)}{J_0(\nu_n)} \\ &= \frac{2p+q}{3} r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8G_1}{\nu_n \theta_n} \frac{J_1(\nu_n x)}{J_0(\nu_n)} \Big|_{x=1} - \frac{2p+q}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8G_1}{\nu_n \theta_n} \frac{3J_1(\nu_n r)}{J_0(\nu_n)} \\ &= \frac{1}{2} r \cdot \frac{2p+q}{3G_2} - \frac{2p+q}{2G_2} r = -\frac{2p+q}{3} r \end{aligned}$$

だから

$$\bar{u}_1 \Big|_{T=0} = \frac{q-p}{3G_1} r$$

同様にして、

$$\bar{u}_3 \Big|_{T=0} = -\frac{2(q-p)}{3G_1} z$$

したがって、供試体の  $T=0$  における変形\* すなわち即時変形について考えると\*  $\bar{u}_1, \bar{u}_3$  はいずれも偏差成分のみより成っており、 $T=0$  において体積ひずみはゼロであることから、これはせん断ひずみにより生じた変形であることがわかる。したがってこの変形は、三笠<sup>10)</sup>も指摘しているように、見かけのヤング率  $E_u$ 、ポアソン比  $\nu_u$  が

$$E_u = \frac{3}{2} G_1, \nu_u = \frac{1}{2}$$

として、同様の境界条件のもとに解いた弾性理論解と一致するものと思われる。つぎに、載荷後、時間の経過とともに圧密が次第に進行していき、それにともない応力、変形、間げき水圧なども等方成分が変化していく形で変化していく。そして、 $t \rightarrow \infty$  の最終状態ではこれらつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_1 &= \frac{q-p}{3G_1} r - \frac{2p+q}{3G_2} r \\ \bar{u}_3 &= -\frac{2(q-p)}{3G_1} z - \frac{2p+q}{3G_2} z \\ \bar{e}_v &= \frac{2p+q}{G_2}, \quad \bar{u}_e = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

$$\bar{\tau}_{11}' = p, \quad \bar{\tau}_{33}' = q, \quad \bar{\tau}_{13}' = 0 \quad \dots\dots\dots (28)$$

この式より、 $\bar{u}_1, \bar{u}_3$  はいずれも偏差成分および等方成分より成っていて、それぞれ半径  $r$ , 高さ  $z$  に比例している。また、 $q > p$  の場合、 $\bar{u}_1$  は初期状態において半径方向に膨張するが、圧密の進行とともに逆に収縮する。また、 $\bar{u}_3$  は初期状態で圧縮し、その後、圧密の進行とともにさらに圧縮していく。また、体積ひずみは圧縮を正にしたとき、初期状態でゼロであるが、その後増加していく。ここで、特に注目されるのは  $\bar{\tau}_{33}'$  の挙動である。 $\bar{\tau}_{33}'$  は载荷直後から半径  $r$  の関数として挙動してきたが、 $t \rightarrow \infty$  においては場所に無関係な応力  $q$  に収束する。したがって、 $t \rightarrow \infty$  では、 $\bar{\tau}_{11}', \bar{\tau}_{33}'$  はいずれも場所に無関係に一定の値に落ち着くことがわかる。

以上に述べた計算の 1 例として、 $\bar{e}_v, u_e/(2p+q)$  を時間の対数に対してプロットしたものを Fig. 5 (a), (b) に、また、変位  $\bar{u}_1 (= u_1/a), \bar{u}_3 (= u_3/h)$  を  $\log t$  に対してプロットしたものを Fig. 6 (a), (b) に示す。これらの計算条件はいずれも図に示した通りで同じである。なお、体積ひずみ  $\bar{e}_v$ , 過剰間げき水圧  $\bar{u}_e$  はいずれも応力差  $(q-p)$  には無関係で  $(2p+q)/3$  にのみ依存する。計算では、 $(2p+q)/3 = 1000 \text{g/cm}^2$  (一定)

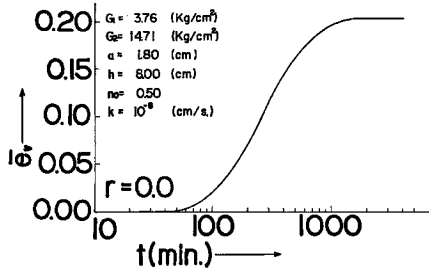
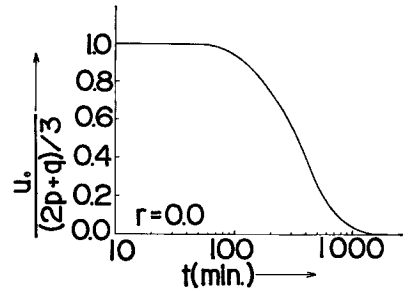


Fig. 5 (a) Volume strain ~ time relationship.



(b) Excess pore pressure ~ time relationship.

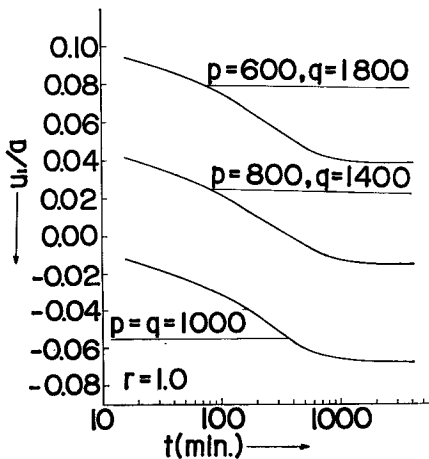
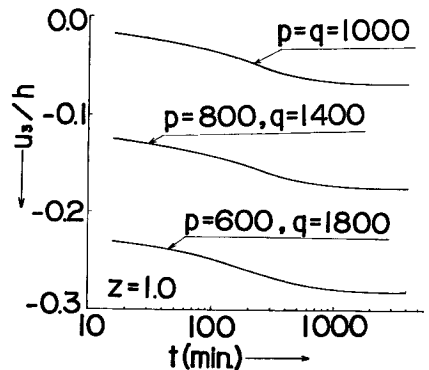


Fig. 6 (a) Radial displacement ~ time relationship.



(b) Vertical displacement ~ time relationship.

にとつてあるのと同じとなる。なお、図中  $p, q$  の単位は  $\text{g/cm}^2$  である。

#### 4. 結 語

粘土の構造骨格の応力～ひずみ関係に Stieltjes の合成積を用いて展開されている線型粘弾性理論を適用し、このような構造骨格と非圧縮性の間げき水より成る2相系多孔質材料の3次元圧密理論を導びいた。さらに、この理論を用いて、粘土の3軸圧縮クリープ試験と同様の境界条件をもった軸対称問題を解いた。以上により、結論としてつぎのことがいえる。

1) 土-水系の圧密中における間げき率の変化を考慮に入れた連続の式は、非線型微分方程式になるが、体積ひずみが微小であるとするに従来求められているものと同じ形になる。ただし、圧密係数の形は多少異なっている。

2) 得られた圧密理論式は、Stieltjes の合成積で書くとき、構造骨格が弾性とした場合に対応した形で得られ、Laplace 変換を用いることにより、弾性多孔質材料の場合に類似した取り扱いができる。

3) 粘土の構造骨格に合った形で緩和関数  $G_1(t), G_2(t)$  の形をきめてやれば、本文で述べたような軸対称問題において、式 (23) の解を Laplace 変換することにより供試体の実際の挙動がわかる。また、逆に粘土の3軸圧縮クリープ試験などより得られたデータを Laplace 変換することにより  $G_1, G_2$  の形を決めることができる。

4) 軸対称問題において緩和関数  $G_1, G_2$  を一定とした場合 Laplace の逆変換により、実際の供試体の応力、変形などが得られ、これは Laplace 変換を用いなくて解いた場合に一致した。さらに解の形より供試体の変形は外力の偏差成分による即時変形とその後の圧密の進行にともなう経時変化に分けられる。さらに、 $T \rightarrow \infty$  においては、変位は外力の偏差成分と等方成分に比例する2つの項より成る。

以上、本研究において得られた結果について述べたが、今後これらの結果を用いて粘土地盤の3次元的沈下解析を進めていくために、3軸圧縮クリープ試験、あるいは、土槽による平面ひずみ条件のもとにおける載荷試験などを行ない、これらの実験データと3次元圧密理論を結びつけていきたいと思っている。

最後に、本研究にあたって終始御指導をいただいた柴田徹教授および福尾義昭助教授に心からの謝意を表します。

#### 参 考 文 献

- 1) Terzaghi, K.: Die Theorie der Hydrodynamischen Spannungerscheinungen und Ihr Erdbautechnisches Anwendungs Gebiet, Proc. Int. Conf. Appl. Mech., Vol. 1, 1924, p. 288.
- 2) Rendulic, L.: Der Hydrodynamische Spannungsausgleich in Zentral Entwässerten Tonzylindern, Wasserw. und. Tech., 3-1, 1935.
- 3) Schiffman, R.L.: Consolidation of Soil Under Time Dependent Loading and Varying Permeability, Highway Research Board Vol. 37, 1958, pp. 584-617.
- 4) Biot, M.A.: A General Theory of Three Dimensional Consolidation, Jour. Appl. Phys., Vol. 12, 1941, pp. 155-164.
- 5) Carrillo, N.: Simple Two and Three Dimensional Cases in the Theory of Consolidation of Soils, Jour. Math. Phys., Vol. 21, 1942, pp. 1-5.
- 6) Barron, R.B.: Consolidation of Fine Grained Soils by Drain Wells, Proc. A.S.C.E. Trans., 1948, pp. 718-754.
- 7) Richart, F.E.: A Review of the Theories for Sand Drains, Proc. A.S.C.E., SM 3, 1957, pp. 1301-1338.
- 8) 赤井浩一：提体二次元圧密の研究—提体基礎の間げき水圧の分布—土木学会論文集, Vol. 16, 1953, p. 51.
- 9) McNamee, J. and R.E. Gibson: Displacement Functions and Linear Transforms Applied to Diffusion through Porous Elastic Media, Quat. Jour. Mech. and Appl. Math., Vol. 13, Pt. 1, 1960, pp. 98-111.

- 10) McNamee, J. and R. E. Gibson: Plane Strains and Axially Symmetric Problems of the Consolidation of a Semi-infinite Clay Stratum, *Quat. Jour. Mech. and Appl. Math.*, Vol. 13, Pt. 2, 1960, pp. 210-227.
- 11) Gibson, R. E. and J. McNamee: The Consolidation Settlement of a Load Uniformly Distributed over a Rectangular Area, *Proc. 4th Int. Conf. Soil Mech.*, Vol. 1, 1957, pp. 320-323.
- 12) Schiffman, R. L. and A. A. Fungaroli: Consolidation Due to Tangential Loads, *Proc., 6th Int. Conf. Soil Mech.*, Vol. 2, pp. 188-192.
- 13) Taylor, D. W. and W. Merchant: A Theory of Clay Consolidation Accounting for Secondary Compression, *Jour. Math. and Phys.*, Vol. 19-3, p. 167.
- 14) Biot, M. A.: Theory of Stress-Strain Relation in Anisotropic Viscoelasticity and Relaxation Phenomena, *Jour. Appl. Phys.*, Vol. 25, 1954, pp. 1385-1391.
- 15) Biot, M. A.: Theory of Deformation of Porous Viscoelastic Anisotropic Solid, *Jour. Appl. Phys.*, Vol. 27, 1956, pp. 459-567.
- 16) Biot, M. A.: Thermoelasticity and Irreversible Thermodynamics, *Jour. Appl. Phys.*, Vol. 27, 1956, pp. 240-253.
- 17) たとえば, Chrisian, J. T.: Undrained Stress Distribution by Numerical Method, *Proc. A. S. C. E. SM6*, 1968, pp. 1333-1345.
- 18) Gurtin, M. E. and E. Sternberg: On the Linear Theory of Viscoelasticity, *Archi. Rat. Analysis*, Vol. 11, 1962, pp. 291-356.
- 19) Mikasa, M.: On the Settlement of Clay Layer by Partial Load, *Proc. 1st J. N. Conf. Appl. Mech.*, 1951, pp. 303-308.

付 録

軸対称供試体の圧密問題の直接解法

ここでは, 本文 (14) 式において  $G_1, G_2$  が定数の場合について, 本文の場合と同じ境界条件の解を Laplace 変換を用いなくて直接求める。いま,  $\psi(t)$  はつぎのような階段関数とする。

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & (-\infty < t < 0) \\ \psi(\text{一定}) & (0 \leq t < \infty) \end{cases}$$

このとき,  $\varphi(t)$  を  $0 < t < \infty$  において 1 階連続微分可能とすると,

$$\varphi(t) * d\psi(t) = \psi(t) * d\varphi(t) = \psi \cdot \varphi(0+) + \psi \cdot \int_{0+}^{\infty} \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} d\tau = \psi \{ \varphi(0+) + \varphi(t) - \varphi(0+) \} = \psi \cdot \varphi(t)$$

この関係を用いると本文 (14) 式は

$$\left. \begin{aligned} G_1 \left( \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial r} + \frac{a^2}{h^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial z^2} - \frac{\bar{u}_1}{r^2} \right) - K \frac{\partial \bar{e}_v}{\partial r} - 2\alpha h \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial r} &= 0 \\ G_1 \left( \frac{h^2}{a^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial r^2} + \frac{h^2}{a^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial z^2} \right) - K \frac{\partial \bar{e}_v}{\partial z} - 2\alpha h \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial z} &= 0 \\ L \left( \frac{\partial^2 \bar{e}_v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{e}_v}{\partial r} + \frac{a^2}{h^2} \frac{\partial^2 \bar{e}_v}{\partial z^2} \right) - \frac{a^2 \alpha}{k} \frac{\partial \bar{e}_v}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \bar{u}_e}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial r} + \frac{a^2}{h^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_e}{\partial z^2} &= -\frac{a^2}{kh} \frac{\partial \bar{e}_v}{\partial t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに,

$$\begin{aligned} \bar{e}_v &= - \left( \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial r} + \frac{\bar{u}_1}{r} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial z} \right) \\ L &= \frac{1}{3} (2G_1 + G_2), \quad K = \frac{1}{3} (G_1 + 2G_2) \\ \gamma &= (1 - n_0)(\gamma_s - \gamma_w), \quad \alpha = (2 - n_0)\gamma_w \end{aligned}$$

$$\bar{\tau}_{11}' = -G_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial r} + \frac{1}{3}(G_2 - G_1)e_v$$

$$\bar{\tau}_{33}' = -G_1 \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial z} + \frac{1}{3}(G_2 - G_1)e_v$$

$$\bar{\tau}_{13}' = -G_1 \left( \frac{a}{h} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial z} + \frac{h}{a} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial r} \right)$$

境界条件：

$$r=1, 0 \leq z \leq 1 \quad (0 \leq t < \infty) \text{ で}$$

$$\bar{\tau}_{11}' = p, \quad \bar{\tau}_{13}' = 0, \quad \bar{u}_e = 0$$

$$0 \leq r \leq 1, z=0, (0 \leq t < \infty) \text{ で}$$

$$\bar{u}_3 = 0, \quad \bar{\tau}_{13}' = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial z} = 0$$

$$0 \leq r \leq 1, z=1, (0 \leq t < \infty) \text{ で}$$

$$2\pi \int_0^1 (\bar{\tau}_{33}' + \alpha h \bar{u}_e) r dr = \frac{\pi q}{s}, \quad \bar{\tau}_{13}' = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial z} = 0$$

} ..... (2)

いま、境界条件から、 $e_v, \bar{u}_e$  を  $z$  に無関係な関数と考えると式 (1) の第3式より変数分離法により、つぎのような形に書ける。

$$\bar{e}_v = C + \sum A_n J_0(\nu_n r) e^{-b_n^2 t} \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $b_n^2 = \frac{2G_1 + G_2}{3} \frac{k}{a^2 \alpha} \nu_n^2$

これを同じ式の第4式に代入すると

$$\bar{u}_e = C - \frac{2G_1 + G_2}{3} \sum \frac{A_n J_0(\nu_n r)}{\alpha h} e^{-b_n^2 t}$$

これで、 $r=1 (0 \leq z \leq 1)$  で  $\bar{u}_e = 0$  の境界条件より、

$$\bar{u}_e = \frac{2G_1 + G_2}{3} \sum \frac{A_n}{\alpha h} (J_0(\nu_n) - J_0(\nu_n r)) e^{-b_n^2 t} \dots\dots\dots (4)$$

(3), (4) 式を式 (1) の第1式に代入して

$$\bar{u}_1 = C_1 r - \sum A_n \frac{J_1(\nu_n r)}{\nu_n} e^{-b_n^2 t} + r \sum C_{1n} e^{-b_n^2 t}$$

同様に (3), (4) 式を式 (1) の第2式に代入することにより、

$$\bar{u}_3 = C_3 z + z \sum C_{3n} e^{-b_n^2 t}$$

とかける。いま、

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial r} + \frac{\bar{u}_1}{r} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial z} = -\bar{e}_v$$

の条件より、

$$C = -(2C_1 + C_3) \quad \therefore C_3 = -(C + 2C_1)$$

$$2C_{1n} + C_{3n} = 0 \quad \therefore C_{3n} = -2C_{1n}$$

したがって、

$$\bar{\tau}_{11}' = \left( \frac{G_2 - G_1}{3} C - G_1 C_1 \right) + \sum A_n \left\{ \frac{2G_1 + G_2}{3} J_0(\nu_n r) - G_1 \frac{J_1(\nu_n r)}{\nu_n r} \right\} e^{-b_n^2 t} - G_1 \sum C_{1n} e^{-b_n^2 t}$$

とかけるが、 $r=1$  で  $\bar{\tau}_{11}' = p$  なる境界条件を考えると、

$$p = \frac{G_2 - G_1}{3} C - G_1 C_1 \dots\dots\dots (5)$$

$$A_n \left\{ \frac{2G_1 + G_2}{3} J_0(\nu_n) - G_1 \frac{J_1(\nu_n)}{\nu_n} \right\} - G_1 C_{1n} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{33} &= \bar{\tau}'_{33} + \alpha h \bar{u}_e \\ &= \frac{2G_1 + G_2 C}{3} + 2G_1 C_1 - G_1 \sum A_n J_0(\nu_n r) e^{-b_n^2 t} \\ &\quad + \frac{2G_1 + G_2}{3} \sum A_n J_0(\nu_n) e^{-b_n^2 t} - G_1 \sum C_{3n} e^{-b_n^2 t} \end{aligned}$$

したがって、境界条件、

$$2\pi \int_0^1 \bar{\tau}_{33} r dr \Big|_{z=1} = \frac{\pi q}{s}$$

より、

$$\begin{aligned} q &= \left( \frac{2G_1 + G_2 C}{3} + 2G_1 C_1 \right) + \frac{2G_1 + G_2}{3} \sum A_n J_0(\nu_n) e^{-b_n^2 t} \\ &\quad - G_1 \sum C_{3n} e^{-b_n^2 t} - 2G_1 \sum A_n \frac{J_1(\nu_n)}{\nu_n} e^{-b_n^2 t} \end{aligned}$$

したがって、

$$q = \frac{2G_1 + G_2 C}{3} + 2G_1 C_1 \dots\dots\dots (7)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \left\{ \frac{2G_1 + G_2}{3} J_0(\nu_n) - 2G_1 \frac{J_1(\nu_n)}{\nu_n} \right\} A_n + 2G_1 C_{1n} \dots\dots\dots (8) \\ &\quad (\because C_{3n} = -2C_{1n}) \end{aligned}$$

(5), (7) 式より、

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{q-p}{3G_1} - \frac{2p+q}{3G_2} \\ C_3 &= -\frac{2(q-p)}{3G_1} - \frac{2p+q}{3G_2} \end{aligned}$$

また、(6), (8) 式より、 $A_n, C_{1n}$  はいずれもゼロでないためには、

$$\begin{vmatrix} \frac{2G_1 + G_2}{3} J_0(\nu_n) - G_1 \frac{J_1(\nu_n)}{\nu_n} & -G_1 \\ \frac{2G_1 + G_2}{3} J_0(\nu_n) - 2G_1 \frac{J_1(\nu_n)}{\nu_n} & 2G_1 \end{vmatrix} = 0$$

よって、

$$(2G_1 + G_2) J_0(\nu_n) - 4G_1 \frac{J_1(\nu_n)}{\nu_n} = 0 \dots\dots\dots (9)$$

(6) 式を満足するような  $\nu_n (n=1, 2, \dots)$  に対して

$$\begin{aligned} \nu_n \frac{dJ_1(\nu_n)}{d\nu_n} &= \nu_n J_0(\nu_n) - J_1(\nu_n) = \left( \frac{4G_1}{2G_1 + G_2} - 1 \right) J_1(\nu_n) = \frac{2G_1 - G_2}{2G_1 + G_2} J_1(\nu_n) \\ \therefore \nu_n J_1'(\nu_n) - \frac{2G_1 - G_2}{2G_1 + G_2} J_1(\nu_n) &= 0 \end{aligned}$$

したがって、 $J_1(\nu_n r)$  は直交する。このような  $\nu_n$  に対して

$$\frac{2p+q}{3G_2} r = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_1(\nu_n r)$$

と展開できたとすると、

$$\int_0^1 \frac{2p+q}{3G_2} r \cdot r J_1(\nu_n r) dr = B_n \int_0^1 r \{J_1(\nu_n r)\}^2 dr$$

しかるに、

$$\int_0^1 \frac{2p+q}{3G_2} r \cdot r J_1(\nu_n r) dr = \frac{2p+q}{3G_2} \frac{1}{\nu_n} [r^2 J_1(\nu_n r)]_0^1 = \frac{2p+q}{3G_2} \frac{J_2(\nu_n)}{\nu_n}$$



$$\int_0^1 r \{J_1(\nu_n r)\}^2 dr = \frac{\{J_1(\nu_n)\}^2}{2\nu_n^2} \left\{ \frac{(2G_1 - G_2)^2}{(2G_1 + G_2)^2} + \nu_n^2 - 1 \right\} = \frac{1}{2} \{ \nu_n^2 (2G_1 + G_2)^2 - 8G_1 G_2 \} \frac{\{J_0(\nu_n)\}^2}{16G_1^2}$$

したがって、

$$\nu_n^2 (2G_1 + G_2)^2 - 8G_1 G_2 = \theta_n$$

とおくと、

$$B_n = \frac{2p+q}{3} \frac{32G_1^2}{G_2} \frac{J_2(\nu_n)}{\nu_n \theta_n \{J_0(\nu_n)\}^2}$$

一方、(9)式を用いると、

$$J_2(\nu_n) = \frac{G_2}{2G_1} J_0(\nu_n) \dots\dots\dots (10)$$

よって、

$$B_n = \frac{2p+q}{3} \frac{16G_1}{\nu_n \theta_n J_0(\nu_n)}$$

したがって、

$$\frac{2p+q}{3G_2} r = \frac{16G_1(2p+q)}{3} \sum \frac{J_1(\nu_n r)}{\nu_n \theta_n J_0(\nu_n)}$$

項別微分 (可能である) すると、

$$\frac{2p+q}{G_2} = (2p+q) \sum \frac{8G_1}{\theta_n} \frac{J_0(\nu_n r)}{J_0(\nu_n)}$$

$t=0$  で  $\bar{e}_v=0$  だから、

$$A_n = -(2p+q) \frac{8G_1}{\theta_n} \frac{1}{J_0(\nu_n)}$$

したがって、

$$\bar{e}_v = \frac{2p+q}{G_2} - (2p+q) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8G_1 J_0(\nu_n r)}{\theta_n J_0(\nu_n)} e^{-b_n^2 t}$$

$$\bar{u}_1 = \left( \frac{q-p}{3G_1} - \frac{2p+q}{3G_2} \right) r - \frac{2p+q}{3} \sum \frac{8G_1}{\nu_n \theta_n} \frac{r J_1(\nu_n) - 3J_1(\nu_n r)}{J_0(\nu_n)} e^{-b_n^2 t}$$

$$\bar{u}_3 = - \left( \frac{2(q-p)}{3G_1} + \frac{2p+q}{3G_2} \right) z + \frac{2p+q}{3} \sum \frac{16G_1}{\nu_n \theta_n} \frac{J_1(\nu_n)}{J_0(\nu_n)} z e^{-b_n^2 t}$$

$$\bar{r}_{11}' = p + \frac{8G_1(2p+q)}{3} \sum \frac{G_1 \frac{J_1(\nu_n)}{\nu_n} + 3G_1 \frac{J_1(\nu_n r)}{\nu_n r} - (2G_1 + G_2) J_0(\nu_n r)}{\theta_n J_0(\nu_n)} e^{-b_n^2 t}$$

$$\bar{r}_{33}' = q + \frac{8G_1(2p+q)}{3} \sum \frac{-2G_1 \frac{J_1(\nu_n)}{\nu_n} + (G_2 - G_1) J_0(\nu_n r)}{\theta_n J_0(\nu_n)} e^{-b_n^2 t}$$

これらの式は、本文において Laplace 変換の手法で求めた式と一致する。したがって、これらの式の特性も本文において述べたと同じである。